Applications linéaires

« La règle de trois est la première, la plus utile et la plus belle de toutes les règles d'arithmétique.
Car toutes les autres ont besoin d'elle, et de toutes elle se passe. »
L'arithmétique nouvellement composée
par Estienne de La Roche (1470-1530)

Dans le chapitre sur les espaces vectoriels, nous avons étudié les objets de façon *statique*.
Dans ce chapitre, nous nous penchons sur l'étude *dynamique* des espaces vectoriels grâce aux applications qui agissent sur ces espaces. Par leur action, elles permettent la mise en relation de différents espaces, leur déformation géométrique...

Attention, ce chapitre comprend beaucoup de théorèmes. Il y a donc un effort à faire pour structurer les connaissances et apprendre à penser à la bonne notion au bon moment. Cependant cette abondance de théorèmes est plutôt une bonne nouvelle : cela veut dire qu'il existe souvent un théorème pas loin de ce que l'on cherche, et qu'il n'est donc pas nécessaire de faire de grands raisonnements pour s'y raccrocher.

Nous disposons d'un double regard sur les application linéaires :

- une vision théorique *intrinsèque*,
- une vision calculatoire *matricielle*.

En fonction des problèmes, il faudra choisir celle qui est la plus adaptée.

1 Définitions et structure

Les applications étudiées ici ne sont pas quelconques : nous allons nous concentrer uniquement sur les applications qui respectent la structure de l'espace vectoriel.
En d'autres termes, toute opération faite dans l'espace de départ, doit se retrouver, à l'identique, dans l'espace d'arrivée.

Par exemple, si on multiplie un vecteur par un scalaire $\lambda \in \mathbf{R}$ dans l'espace de départ E, alors, cela doit revenir à multiplier son image par le même scalaire λ. De même, additionner deux vecteurs dans l'espace de départ, doit revenir à additionner leur image dans l'espace d'arrivée.

Ces propriétés très restrictives permettent de *transporter* notre travail entre deux espaces. Ainsi, il est possible d'effectuer toutes sortes d'opérations sur un espace source E et elles sont alors appliquées, de facto, sur l'autre espace F par l'intermédiaire de l'application.

En algèbre *générale*, les applications qui respectent la structure de l'ensemble sont appelées *morphismes* : elles préservent la forme. Dans le cas particulier des espaces vectoriels, on parle davantage d'applications linéaires : la raison apparaît clairement avec les exemples et la définition qui suit.

Exemple

On définit l'espace vectoriel E correspondant aux paniers de courses possibles de votre professeur préféré le vendredi soir.
Pour simplifier, on ne comptabilise que les courgettes, les aubergines et les litrons de rouge qui constituent l'essentiel du panier. On modélise donc le panier par un triplet $(c, a, r) \in \mathbf{R}^3$ où c représente le poids de courgettes, a, le poids d'aubergines et r le litrage de rouge.
Pour avoir une structure d'espace vectoriel, on accepte les valeurs négatives (denrées rendues au commerçant).

On munit donc $E = \mathbf{R}^3$ de sa structure d'espace vectoriel usuelle et on définit l'application f qui donne le prix du panier ainsi composé. On s'aide des prix unitaires suivants (supposés invariables d'un vendredi sur l'autre) :

- les courgettes valent 3 €/kg,
- les aubergines valent $4,5$ €/kg,
- le litron de rouge vaut $2,5$ €.

On a donc $\quad \forall (c, a, r) \in \mathbf{R}^3, \quad f(c, a, r) = 3\,c + 4,5\,a + 2,5\,r.$
On remarque que les commerçants sont durs en affaires et ne font aucune réduction lors des achats en grande quantité. Ainsi, le prix du panier suit une règle de proportionnalité suivant la quantité de denrées qui le composent : par exemple, si on double la quantité de chacune des trois denrées, alors le prix du panier est également doublé : $f(2\,c, 2\,a, 2\,r) = 2\,f(c, a, r)$.
Plus généralement, pour toute multiplication des quantités par $\lambda \in \mathbf{R}$, le prix est aussi multiplié par λ :

$$\forall (c, a, r) \in \mathbf{R}^3,\ \forall \lambda \in \mathbf{R},\ f(\lambda c, \lambda a, \lambda r) = \lambda f(c, a, r)$$

Si on note $u = (c, a, r)$ le panier considéré, alors $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.
De même, si on note u, le panier de vendredi dernier et v celui de cette semaine. Le prix des deux paniers mis ensemble est égal à la somme des prix des deux paniers considérés séparément : $f(u+v) = f(u) + f(v)$.
Ces deux propriétés définissent une application linéaire.

Ce n'est pas plus difficile que cela : ce chapitre reprend l'étude de la proportionnalité vue au collège.

Exemple

Dans l'exemple précédent, l'application était à valeurs dans $\mathbf{R}$.
On peut tout aussi bien créer une application à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ si l'image est le couple « (prix, volume) ».
On définit[1] alors $f : (c, a, r) \mapsto (3\,c+4, 5\,a-2, 5\,r, c+a+r)$ qui est une application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$: on note $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$.
Tout ce qu'il faut pour que l'application soit linéaire, c'est que les quantités image (ici le prix et le volume) suivent la règle de proportionnalité par rapport aux données source (ici les denrées).

Définition 1.1 *(L'espace des applications linéaires)*

Soient E et F, deux espaces vectoriels.
Une application $f : E \to F$ est dite linéaire si elle vérifie **une** des assertions suivantes (équivalentes) :

- $\begin{cases} \forall (u,v) \in E^2, \ f(u+v) = f(u) + f(v) \\ \forall \lambda \in \mathbf{R}, \ \forall u \in E, \ f(\lambda u) = \lambda f(u) \end{cases}$.
- $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \ \forall (u,v) \in E^2, \ f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$.
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2, \ \forall (u,v) \in E^2, \ f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Ainsi, les applications linéaires respectent les deux opérations des espaces vectoriels : l'addition et la multiplication externe.

Une application linéaire traduit un rapport de proportionnalité.

Exemple

L'application $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est-elle une application linéaire de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$?
Solution :
f n'est clairement pas linéaire : elle ne traduit pas un rapport de proportionnalité.
Un contre-exemple suffit pour le montrer : $f(1) = \mathrm{e}$, mais $f(0 \times 1) = 1 \neq 0 \times f(1)$.

[1] On suppose que les trois aliments ont la même densité, ce qui n'est pas tout à fait réaliste, mais même si on prend en compte les différences de densité, on obtient une application linéaire.

Exemple

Donner l'ensemble des applications linéaires de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
Solution :
Ce sont les applications de proportionnalité : c'est-à-dire les applications $x \mapsto ax$ pour $a \in \mathbf{R}$ (ce n'est pas pour rien si elles s'appellent « *linéaires* »).
On peut le démontrer par analyse-synthèse :
Analyse : si on suppose que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une application $\mathbf{R}-$linéaire, alors

$$\forall x \in \mathbf{R}, \ f(x) = f(x \times 1) = x\, f(1).$$

Si on note $a = f(1)$, alors $\forall x \in \mathbf{R}, \ f(x) = ax$.
Synthèse : si $a \in \mathbf{R}$, et $f : x \mapsto ax$, alors f est bien linéaire. En effet,

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \ \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad f(\lambda x + y) = a(\lambda x + y) = \lambda a x + a y = \lambda f(x) + f(y).$$

Conclusion :
$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est $\mathbf{R}-$linéaire si et seulement si il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $f : x \mapsto ax$.

Propriété 1.2

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $f(0_E) = 0_F$.

Preuve

$f(0_E) = f(0_{\mathbf{R}} \cdot 0_E) = 0_{\mathbf{R}} \cdot f(0_E) = 0_F$. ■

Exemple

L'application $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (x+y, y-1, y) \end{cases}$ est-elle linéaire ?
Solution :
$f(0,0) = (0,-1,0) \neq (0,0,0)$.
D'après la propriété 1.2, l'application f n'est pas linéaire.
☞ Quand on demande de vérifier si une application f est linéaire, la première chose à faire est de calculer $f(0)$.

Définition 1.3 *(Applications particulières)*

- On appelle **endomorphisme** de E toute application linéaire de E dans E.
  On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- On appelle **morphisme identité**, l'endomorphisme $x \mapsto x$ de E dans E.
  On le note Id_E.
- On appelle **isomorphisme** toute application linéaire bijective.
- On appelle **automorphisme** tout endomorphisme bijectif.
  On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Explications
Le morphisme identité ne *fait rien*. Il reste dans le même espace et ne modifie pas l'objet qu'il prend en argument. Il joue le rôle d'élément neutre pour la loi de composition entre endomorphismes.
Un isomorphisme, est un morphisme qui agit de façon réversible : il existe une application réciproque qui fait le travail inverse. En particulier, il ne perd, ni n'ajoute aucune information au vecteur sur lequel il agit. Nous verrons lors de l'étude de la dimension finie qu'un isomorphisme transforme un espace vectoriel en un autre de même nature géométrique : une droite en une autre droite, un plan en un plan...
Un automorphisme est un isomorphisme qui agit au sein du même espace vectoriel : l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont les mêmes. Géométriquement, il déforme l'espace de façon réversible. Par exemple, les rotations sont des automorphismes du plan.

Exemple
L'application qui donne le couple (prix, volume) en fonction du panier de courses (exemples précédents) est une application linéaire non bijective. Ce n'est pas un isomorphisme. La connaissance du couple (prix, volume) ne me permet pas de retrouver la composition exacte du panier (pas injectif).

Exemple

- L'application nulle de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ est un endomorphisme non bijectif.
- $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (y,x) \end{cases}$ est un automorphisme de $\mathbf{R}^2$.

Définition 1.4

S'il existe un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(E,F)$,
alors on dit que les deux espaces E et F sont **isomorphes**.

Savoir que deux espaces sont isomorphes est très pratique. Cela veut dire que toutes les opérations et propriétés (liées à la structure d'espace vectoriel) que l'on aura démontré pour l'un pourront être appliquées à l'autre par l'intermédiaire de l'isomorphisme. Ces deux espaces se comportent donc comme s'il s'agissait de deux images déformées du même espace.

Exemple
Montrer qu'un espace vectoriel E est toujours isomorphe à lui-même.
Solution :
On prend l'application identité qui est un automorphisme de E.

Ici, nous avons défini les applications linéaires *individuellement* : chacune de leur côté. Mais si on prend un peu de recul, on peut s'apercevoir qu'il existe une harmonie entre elles. Ou pour parler plus mathématiquement, que l'on peut doter l'ensemble des applications linéaires de structures algébriques.

Ainsi, nous allons voir que $(\mathcal{L}(E,F),+,\cdot)$ est lui-même un espace vectoriel ainsi que $(\mathcal{L}(E),+,\cdot)$.

Propriété 1.5 *(Opérations sur les applications linéaires)*

Soient E et F deux espaces vectoriels

- Toute combinaison linéaire d'applications linéaires de $\mathcal{L}(E,F)$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E,F)$.
- Toute combinaison linéaire d'endomorphismes de E est un endomorphisme de E .

$$(\mathcal{L}(E),+,\cdot) \text{ et } (\mathcal{L}(E,F),+,\cdot) \text{ sont des espaces vectoriels.}$$

Preuve
Si on admet que F^E est un espace vectoriel, alors :

- Soient f et g deux applications linéaires de $\mathcal{L}(E,F)$. $\forall (u,v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbf{R}$,
$$\begin{aligned}(f+g)(u+\lambda v) &= f(u+\lambda v) + g(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v) + g(u) + \lambda g(v) \\ &= (f+g)(u) + \lambda (f+g)(v)\end{aligned}$$
Donc $f+g$ est linéaire : $f+g \in \mathcal{L}(E,F)$.
- Il ne reste qu'à montrer le produit par un scalaire. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mu \in \mathbf{R}$.
$$\forall (u,v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \begin{aligned}(\mu f)(u+\lambda v) &= \mu f(u+\lambda v) = \mu f(u) + \mu\lambda f(v) \\ &= (\mu f)(u) + \lambda (\mu f)(v)\end{aligned}$$
- L'application nulle de E dans F est linéaire.

C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{F}^E$.
L'espace des endomorphismes est un cas particulier pour $F = E$. ■

Exemple
Montrer que l'application $f : (x,y,z) \mapsto (x+y, z, x-z)$ est un automorphisme de $\mathbf{R}^3$ et donner son application réciproque.
Solution :
Pour montrer que f est linéaire, il suffit de remarquer que l'image de (x,y,z) par f est obtenue par combinaison linéaire des coefficients du vecteur (x,y,z). Cela suffit.
Si on veut le montrer avec la définition (ce qu'il faut aussi savoir faire) :
Soient $(u,u') \in \left(\mathbf{R}^3\right)^2$, et $\lambda \in \mathbf{R}$, on note $u = (x,y,z)$ et $u' = (x',y',z')$.

$$\begin{aligned}f\left(u+\lambda u'\right) &= f\left(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z'\right) \\ &= \left(x+\lambda x' + y + \lambda y', z+\lambda z', x+\lambda x' - \left(z+\lambda z'\right)\right) \\ &= \left(x+y+\lambda(x'+y'), z+\lambda z', x-z+\lambda(x'-z')\right) \\ &= (x+y, z, x-z) + \left(\lambda(x'+y'), \lambda z', \lambda(x'-z')\right) \\ &= (x+y, z, x-z) + \lambda\left(x'+y', z', x'-z'\right) \\ &= f(x,y,z) + \lambda f\left(x',y',z'\right) \\ &= f(u) + \lambda f\left(u'\right).\end{aligned}$$

Donc f est bien linéaire.
Pour montrer que c'est un isomorphisme, il faut donc montrer qu'elle est bijective, c'est-à-dire que pour tout $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$, il existe un unique antécédent (x,y,z) par f. Cela revient donc à résoudre $f(x,y,z) = (a,b,c)$, ce qui permettra de trouver l'application réciproque en même temps.

$$f(x,y,z) = (a,b,c) \iff (x+y, z, x-z) = (a,b,c)$$
$$\iff \begin{cases} x+y = a \\ z = b \\ x - z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x = b+c \\ y = a-b-c \\ z = b \end{cases}$$

Donc f est un isomorphisme d'application réciproque

$$f^{-1} : (a,b,c) \mapsto (b+c, a-b-c, b)\,.$$

2 Image et noyau

E et F désignent deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire.

Propriété 2.1

- L'image d'un sous-espace vectoriel E' de E par une application linéaire est un sous espace vectoriel de F.
- L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un espace vectoriel.

On rappelle que l'image directe de E' par f est définie par :

$$f(E') = \{f(u),\ u \in E'\}\,.$$

Explications

À nouveau, ces propriétés traduisent le fait que l'application linéaire respecte la structure d'espace vectoriel. En particulier, si la stabilité est vérifiée dans l'espace de départ, alors elle se trouve naturellement vérifiée dans l'image : l'image est un espace vectoriel.

Preuve

- Soit E' un sous-espace vectoriel de E, montrons que $f(E')$ est un sous espace vectoriel de F.
  - $0_E \in E'$ (car E' est un sev de E), et donc $0_F = f(0_E) \in f(E')$.
  - Soit $(v,v') \in (f(E'))^2$, et $\lambda \in \mathbf{R}$,
    il existe $(u,u') \in E'^2$ tel que $v = f(u)$ et $v' = f(u')$ (définition de l'image directe).
    Or $v + \lambda v' = f(u) + \lambda f(u') = f(u+\lambda u')$. On peut donc poser $w = u + \lambda u'$.
    E' est stable par combinaison linéaire, donc $w \in E'$, ainsi $v+\lambda v' = f(w) \in f(E')$
    .

  Donc $f(E')$ non vide et stable par combinaison linéaire : c'est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée F.
- Soit H un sous-espace vectoriel de F, montrons que $f^{-1}(H)$ est un sous espace vectoriel de E.
  - $0_F \in H$ (car H est un sev de F), or $f(0_E) = 0_F$, donc $0_E \in f^{-1}(H)$.
  - Soit $(u,u') \in \left(f^{-1}(H)\right)^2$, et $\lambda \in \mathbf{R}$,
    $f(u+\lambda u') = f(u) + \lambda f(u')$.
    Or $f(u) \in H$ et $f(u') \in H$ par définition de u et u'.
    Et H est un espace vectoriel, donc $f(u) + \lambda f(u') \in H$.
    Ainsi $f(u+\lambda u') \in H$, donc $u + \lambda u' \in f^{-1}(H)$.

  Donc $f^{-1}(H)$ est non vide et stable par combinaison linéaire : c'est un sous-espace vectoriel de l'espace E.

■

Définition 2.2

L'**image** de f est l'image directe de E par f.

$$\mathrm{Im}\,(f) = \left\{f(u),\ u \in E\right\}.$$

Le **noyau** de f est l'ensemble des antécédents de 0_F par f.

$$\mathrm{Ker}\,(f) = f^{-1}\left(\{0_F\}\right) = \left\{u \in E, f(u) = 0_F\right\}.$$

Propriété 2.3

$\mathrm{Im}\,(f)$ est un sous espace vectoriel de F. $\mathrm{Ker}\,(f)$ est un sous espace vectoriel de E.

Preuve

Ce sont des cas particuliers de la propriété 2.1. ■

Exemple

Soit $E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4,\ \text{tel que } x+y-3z = 0 \ \text{ et } \ z = y+t\right\}$.
Interpréter E comme le noyau d'une application linéaire.
Solution :
On pose

$$f : \begin{cases} \mathbf{R}^4 & \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z,t) \mapsto (x+y-3z,\ z-y-t). \end{cases}$$

f est clairement une application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^2$ et $E = \mathrm{Ker}\,(f)$.
Il en découle que E est un espace vectoriel.

Exemple

Soit $f : (x,y) \mapsto (x, x+y, 2x-y)$. Donner une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Im}\,(f)$.

Solution :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(f) &= \left\{(x,\, x+y,\, 2x-y),\, (x,\, y) \in \mathbf{R}^2\right\} \\ &= \left\{x(1,\, 1,\, 2) + y\,(0,\, 1,\, -1)\,,\, (x,\, y) \in \mathbf{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\,((1,\, 1,\, 2),\, (0,\, 1,\, -1)))\,.\end{aligned}$$

La famille est génératrice et elle est clairement libre (non colinéaires).
Donc $((1,\, 1,\, 2),\, (0,\, 1,\, -1)))$ est une base de Im (f).
Im (f) est un plan de $\mathbf{R}^3$.

3 Composition d'applications linéaires

Propriété 3.1

- La composée de deux applications linéaires est linéaire.
- La réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.

Preuve

- Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. ⚠ $g \notin \mathcal{L}(E,F)$ pour que la composée existe.

$$\begin{aligned}\forall (u,v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad (g\circ f)\,(u+\lambda v) &= g\,(f\,(u+\lambda v)) \\ &= g\,(f(u)+\lambda f(v)) \quad \text{(linéarité de } f) \\ &= g\,(f(u)) + \lambda g\,(f(v)) \quad \text{(linéarité de } g) \\ &= (g\circ f)\,(u) + \lambda\,(g\circ f)\,(v).\end{aligned}$$

- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ bijective, alors f admet une réciproque f^{-1}, mais rien ne dit a priori que f^{-1} est aussi linéaire. Montrons-le.
  Soient $(w,w') \in F$, $\lambda \in \mathbf{R}$, on pose $u = f^{-1}(w)$ et $u' = f^{-1}(w')$.

$$\begin{aligned}f^{-1}\left(w+\lambda w'\right) = f^{-1}\left(f(u)+\lambda f(u')\right) &= f^{-1}\left(f\left(u+\lambda u'\right)\right) \quad \text{(linéarité de } f) \\ &= u + \lambda u' \qquad (\text{car } f^{-1}\circ f = \mathrm{Id}_E) \\ &= f(w) + \lambda f(w').\end{aligned}$$

  Donc $f^{-1} \in \mathcal{L}(E,F)$. ■

Corollaire 3.2

Soit E un espace vectoriel,

- $\mathrm{GL}(E)$ est stable par composition,
- si $f \in \mathrm{GL}(E)$, alors $f^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$.

Preuve

- La composée de deux applications linéaires est encore linéaire, et la composition de deux bijections est une bijection.
- Nous avons vu que f^{-1} est linéaire. De plus, elle est bijective de réciproque f. Ainsi $f \in \mathrm{GL}(E)$.

■

Exemple

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathrm{GL}(E)$.
Montrer que $f \circ g = 0 \iff f = 0$.
Solution :
Il suffit de composer à droite par g^{-1}.

Propriété 3.3 *(Rappel)*

1. La composée de deux injections est une injection.
2. La composée de deux surjections est une surjection.
3. La composée de deux bijections est une bijection.
   En particulier, si f et g sont deux isomorphismes, alors $f\circ g$ est un isomorphisme et $(f\circ g)^{-1} = g^{-1}\circ f^{-1}$.

Preuve

Voir le chapitre sur les applications. ■

Définition 3.4 *(Puissances)*

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$,
On définit les **puissances** de f par

$$\begin{cases} & f^0 = \mathrm{Id}_E \\ \forall n \in \mathbf{N}, & f^{n+1} = f\circ f^n = f^n \circ f.\end{cases}$$

Explications

Faire la puissance n-ième de f, c'est appliquer f, n fois de suite.
Cela suppose que f soit un endomorphisme pour que l'espace d'arrivée corresponde à l'espace source.

Définition 3.5 *(Endomorphisme nilpotent)*

f est dit nilpotent d'ordre $p \in \mathbf{N}^*$ si $\quad f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$.

Remarque : la notation 0 désigne l'endomorphisme nul.

Exemple

Montrer qu'un endomorphisme nilpotent n'est pas inversible.
Solution :
S'inspirer de l'exercice sur les matrices : une matrice nilpotente n'est pas inversible.

Propriété 3.6 *(Binôme de Newton et formule de Bernoulli)*

Soient f et g deux endomorphismes qui **commutent**, c'est-à-dire tels que $f \circ g = f \circ g$.
$\forall n \in \mathbf{N}$,

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k} g^k \qquad \text{(Binôme de Newton)}$$

$$f^{n+1} - g^{n+1} = (f-g) \sum_{k=0}^{n} f^k g^{n-k} = (f-g) \sum_{k=0}^{n} f^{n-k} g^k \qquad \text{(Formule de Bernoulli)}$$

⚠ L'hypothèse de commutativité est indispensable et il faut absolument la rappeler à chaque fois que l'on fait appel à l'une de ces formules.

Méthode *(Recherche de l'inverse d'un endomorphisme)*

Comme cela a été vu dans le chapitre sur les applications, pour montrer qu'une application $f \in \mathcal{L}(E)$ est inversible, il suffit de trouver son inverse. C'est-à-dire $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
Une méthode très utilisée consiste à trouver une relation polynomiale en f qui est égale à l'endomorphisme nul. Cette méthode est détaillée dans l'exemple qui suit.

Exemple *(Méthode du polynôme annulateur)*

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que $f^3 + 2f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E = 0$.
Montrer que f est inversible et donner son inverse en fonction des puissances (positives) de f.
Solution :
D'après la relation polynomiale, $f \circ \left(f^2 + 2f + \mathrm{Id}_E\right) = -3\mathrm{Id}_E$.
Donc par linéarité $f \circ \left(\frac{-1}{3}\left(f^2 + 2f + \mathrm{Id}_E\right)\right) = \mathrm{Id}_E$.
Ainsi, en notant $g = \frac{-1}{3}\left(f^2 + 2f + \mathrm{Id}_E\right) \in \mathcal{L}(E)$, on a bien $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.
De plus, f et g commutent (car g est une expression polynomiale en f), donc $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
Ainsi, f est inversible et $f^{-1} = g$.

$$f^{-1} = -\frac{1}{3}\left(f^2 + 2f + 1\right).$$

4 Action sur une base

Si on munit E d'une base, alors toute application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$ peut être caractérisée par son action sur cette base : il suffit de connaître les images des éléments de la base de E pour connaître complètement l'application linéaire.

Théorème 4.1 *(Caractérisation par l'image d'une base)*

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $\mathcal{E} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de E.
f est décrite de manière unique par son action sur la base : $(f(e_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$.
Tout vecteur $x \in E$ peut être décomposé sur la base :

$$x = \sum_{j \in [\![1,n]\!]} x_j e_j, \qquad \text{ainsi} \quad f(x) = \sum_{j \in [\![1,n]\!]} x_j f(e_j).$$

Exemple

Si on reprend l'exemple du panier de courses, il suffit de connaître les prix unitaires des produits de *base* pour connaître le prix de n'importe quel panier.

Propriété 4.2

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_i)_{i \in I}$ une base de E,
alors $\left(f(e_i)\right)_{i \in I}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$.

En d'autres termes, tous les éléments de l'image $\mathrm{Im}\,(f)$ peuvent être obtenus à partir des images de la base de E : il suffit de connaître l'image des éléments de la base de E pour générer l'espace $\mathrm{Im}\,(f)$ tout entier.

Preuve

Soit $y \in \mathrm{Im}\,(f)$, alors par définition de l'image, il existe un antécédent x : $f(x) = y$.
Or x peut être décomposé sur la base $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$: $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p$.
avec $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in \mathbf{R}^p$. Donc $y = f(x) = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p)$.
Par linéarité de f, $y = \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \cdots + \lambda_p f(e_p)$.
Ainsi, tout $y \in \mathrm{Im}\,(f)$ s'écrit comme combinaison linéaire de $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p))$.
Donc $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$.

■

Théorème 4.3 *(Caractérisation des applications injectives et surjectives)*

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_i)_{i \in I}$ une base de E.

1. f est injective si, et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.
   si, et seulement si $\left(f(e_i)\right)_{i \in I}$ est une famille libre de F.
2. f est surjective si, et seulement si $\mathrm{Im}\,(f) = F$.
   si, et seulement si $\left(f(e_i)\right)_{i \in I}$ est une famille génératrice de F.
3. f est bijective si, et seulement si $\mathrm{Im}\,(f) = F$ et $\ker(f) = \{0_E\}$.
   si, et seulement si $\left(f(e_i)\right)_{i \in I}$ est une base de F.

C'est la caractérisation des applications injectives qui nous servira le plus (pour la surjectivité, c'est simplement la définition que nous rappelons ici). Dès que l'on demande de montrer qu'une application est injective, il faut penser à étudier son noyau.

Cette caractérisation traduit bien la rigidité d'une application linéaire : pour étudier l'unicité de l'antécédent de n'importe quelle image, il suffit de le faire pour 0 et cela nous donne le résultat pour tout le reste de l'espace vectoriel ! Injectivité et liberté sont deux façons d'exprimer l'unicité d'une écriture. De même, surjectivité et caractère générateur expriment l'existence de l'écriture.

Preuve

1. - $1^{\text{ère}}$ équivalence.
     (sens direct) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ injective, montrons que son noyau est réduit à $\{0_E\}$.
     f est linéaire, donc $f(0_E) = 0_F$ (cf propriété 1.2).
     Ainsi, par unicité de l'antécédent, $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\}$.
     (sens réciproque)
     On suppose $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\}$ et on cherche à montrer que f est injective.
     Soient $(u, u') \in E^2$ tels que $f(u) = f(u')$.
     Alors $f(u) - f(u') = 0_F$ et par linéarité, $f(u - u') = 0_F$.
     Ainsi $u - u' \in \mathrm{Ker}\,(f)$, et d'après notre hypothèse : $u - u' = 0_E$.
     Donc $u = u'$ et l'application est injective.
   - 2^{e} équivalence.
     (sens direct) On suppose f injective.
     Soit $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbf{R}^p$ tel que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(e_k) = 0$, alors, par linéarité de f $f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k\right) = 0$.
     Ainsi $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et on sait que f est injective, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0\}$ comme cela vient d'être montré.
     Donc $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k = 0$.
     Or $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ est une base, la famille est donc libre. Donc tous les λ_k sont nuls.
     Donc la famille $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p))$ est libre.
     (sens réciproque) On suppose que la famille est libre et on veut montrer que f est injective (c'est-à-dire que $\ker(f) = \{0_E\}$).
     Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$. $x \in E$ donc on peut le décomposer sur la base $(e_1, e_2, \cdots e_p)$:
     $$\exists (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbf{R}^p \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k.$$
     Ainsi $0_F = f(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(e_k)$ (par linéarité).
     Or la famille des $(f(e_k))_{k \in [\![1,p]\!]}$ est supposée libre, donc tous les λ_k sont nuls.
     Donc $x = 0$.
     Donc $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$ et f est injective.
2. f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\, f = F$.
   Or $(f(e_k))_{k \in [\![1,p]\!]}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f$.
   f est donc surjective, si et seulement si c'est une famille génératrice de F.
3. Conséquence des deux points précédents.

■

Se souvenir

Entre des espaces de dimension finie :

Un isomorphisme est une application qui transforme une base en une autre.

En particulier, l'image d'une base de E par un isomorphisme est une base de F.

Corollaire 4.4

Deux espaces de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils sont de même dimension.

Exemple

Montrer qu'une application est injective si et seulement si elle « transforme » *toute* famille libre de E en une famille libre de F.

Solution :

(sens direct) Supposons $f : E \to F$ injective.
Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille libre de E, montrons alors que $(f(u_i))_{i \in I}$ est une famille libre de F.
Soient $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbf{R}^I$ des scalaires.

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I} \lambda_i f(u_i) = 0 &\Rightarrow f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i u_i\right) = 0 && \text{par linéarité de la fonction} \\
&\Rightarrow \sum_{i \in I} \lambda_i u_i \in \ker(f) \\
&\Rightarrow \sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0 && \text{par injectivité de } f \\
&\Rightarrow \forall i \in I,\ \lambda_i = 0 && \text{par liberté de la famille } (u_i)_{i \in I}.
\end{aligned}$$

Ce qui démontre bien que la famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est libre.
Remarque : on pourrait aussi prouver cette implication en considérant toute famille libre comme base de l'espace qu'elle engendre et utiliser le théorème 4.3 appliqué à la restriction de f à cet espace (qui reste injective).
(sens réciproque) Si f transforme toute famille libre en une famille libre. C'est en particulier vrai pour une base (qui est une famille libre particulière). D'après le théorème 4.3, f est donc injective.
⚠ Dans la réciproque, rien n'indique lorsque f n'est pas injective, que l'image d'une famille libre est nécessairement liée.
La réciproque indique simplement, que parmi toutes les familles libres de E, il en existe *au moins* une, dont l'image par f est une famille liée.

Exemple

Soit $f : (x, y, z, t) \mapsto (x + 2y - z + t, x + y, -z - t)$. f est-elle injective ?

Solution :

f est clairement linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ car les coordonnées de l'image s'écrivent comme combinaisons linéaires des coefficients du vecteur (x, y, z, t).

Pour étudier l'injectivité, il suffit de chercher le noyau :

$$\begin{aligned}(x,y,z,t)\in \operatorname{Ker}(f) &\iff f(x,y,z,t)=(0,0,0)\\ &\iff \begin{cases} x+2y-z+t=0\\ x+y=0\\ x+y-z-t=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x+y=0 & \leftarrow L_2\\ y-z+t=0 & \leftarrow L_1-L_2\\ -z-t=0 & \leftarrow L_3-L_2\end{cases}\end{aligned}$$

Le système a trois pivots x,y,z et un paramètre t : il admet donc une infinité de solutions.
Donc $\ker(f)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$, ainsi f n'est pas injective.
☝ On remarque que s'il y a plus d'équations que d'inconnues, alors le système admet nécessairement au moins un paramètre : l'application n'est pas injective.
Ceci permet de voir qu'une application de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ ne peut pas être injective si $n \geqslant p$. Nous reverrons ce théorème un peu plus loin dans le chapitre.

5 Matrice d'une application linéaire

Dans cette partie, nous allons utiliser les bases (en dimension finie), pour décrire complètement les vecteurs et caractériser les applications linéaires.
Cette démarche a l'avantage (et l'inconvénient) d'être moins abstraite et permettra de réaliser de nombreuses démonstrations de façon exclusivement calculatoire.
C'est ce que nous appelons l'approche *matricielle*.

A Matrice dans une base

Le résultat fondateur de cette approche est le théorème 4.1 selon lequel une application linéaire est entièrement déterminée par son action sur une base.
On considère donc deux espaces de dimension finie E et F.
$\mathcal{E}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ est une base de E et $\mathcal{F}=(u_1,u_2,\cdots,u_p)$ est une base de F.
Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$.

1. **Décomposition sur la base de départ :**
   D'après le théorème 4.1, pour tout vecteur $x\in E$, on peut écrire
   $$x=\sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \quad \text{et} \quad f(x)=\sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j).$$
2. **Décomposition sur la base de d'arrivée :**
   Or $\mathcal{F}=(u_1,u_2,\cdots,u_p)$ est une base de F, donc pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, on peut décomposer $f(e_j)$ de façon unique dans la base $\mathcal{F}$:
   $$f(e_j)=\sum_{i=1}^{p} a_{i,j}u_i.$$
3. **Écriture matricielle :**
   Dans la base $\mathcal{F}$, $f(e_j)$ peut donc s'écrire comme la matrice colonne
   $$\operatorname{mat}_{\mathcal{F}}(f(e_j))=\begin{pmatrix}a_{1,j}\\a_{2,j}\\ \vdots\\ a_{p,j}\end{pmatrix}$$
   Ainsi $y=f(x)=x_1f(e_1)+x_2f(e_2)+\cdots+x_jf(e_j)+\cdots+x_nf(e_n)$.
   Matriciellement :
   $$\begin{aligned}Y=\operatorname{mat}_{\mathcal{F}}(f(x)) &= x_1\begin{pmatrix}a_{1,1}\\a_{2,1}\\ \vdots\\ a_{p,1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{1,2}\\a_{2,2}\\ \vdots\\ a_{p,2}\end{pmatrix}+\cdots+x_j\begin{pmatrix}a_{1,j}\\a_{2,j}\\ \vdots\\ a_{p,j}\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}a_{1,n}\\a_{2,n}\\ \vdots\\ a_{p,n}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & & & a_{2,n}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{i,1} & & & a_{i,n}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{p,1} & & & a_{p,n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\ x_j\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=AX\end{aligned}$$

Notation

On note $A=\operatorname{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ la matrice de l'application f entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.
Pour deux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ données, la matrice décrit parfaitement l'application linéaire.

Conséquence

Toute application linéaire entre des espaces vectoriels de dimension finie peut être caractérisée par une matrice.

Cette matrice dépend du choix des bases.

Explications
Le fait de choisir des bases particulières permet de ne pas se préoccuper de la nature de l'espace vectoriel considéré. Tout vecteur s'écrit dans la base sous la forme d'un n-uplet de $\mathbf{R}^n$. Ainsi, on peut oublier l'espace vectoriel ambiant pour travailler dans $\mathbf{R}^n$.
Par exemple, pour l'espace des applications polynomiales $\mathbf{R}_{n-1}[x]$, choisir la base canonique revient à modéliser chaque polynôme par le tableau (vecteur) de ses coefficients.
Les résultats prouvés sur $\mathbf{R}^n$ pourront donc être appliqués à n'importe quel espace vectoriel de dimension finie n (en choisissant une base quelconque pour celui-ci). Cela

explique pourquoi le programme se limite à l'étude des espaces vectoriels de type $\mathbf{R}^n$.

De même, toute application linéaire entre E de dimension n et F de dimension p peut s'écrire sous la forme d'une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$.

Remarque : La matrice qui est introduite ici correspond exactement à celle que nous avions déjà obtenue, de façon plus intuitive, pour trouver le noyau d'une application linéaire de $\mathcal{L}\left(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p\right)$ (lors de l'application du pivot).
Ce chapitre permet de formaliser cette approche pour appliquer ce même procédé avec des espaces plus compliqués (par exemple les fonctions polynomiales) ou avec des bases autres que la base canonique.
Ceci sera développé dans le chapitre sur les changements de base.

Méthode *(Écrire une application linéaire dans une base)*

La matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ s'obtient en écrivant les vecteurs colonne $f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)$ côte à côte dans la base $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \cdots, u_p)$.

$\mathcal{E}$: départ

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \quad & f(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \boxed{\begin{array}{c} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{p,2} \end{array}} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p,1} & & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \\ f_p \end{array} \end{array}$$

$\mathcal{F}$: arrivée

Propriété 5.1 *(« Réciproque »)*

Toute matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$ peut être interprétée comme la matrice d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ avec $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^p$ munis de leur base canonique.

⚠ L'espace de départ correspond aux colonnes de la matrice. Ainsi, la dimension de l'espace de départ est le nombre de **colonnes** et celle de l'espace d'arrivée est le nombre de lignes. Pour $f : \mathbf{R}^{\mathbf{n}} \to \mathbf{R}^p$, la matrice est dans $\mathcal{M}_{p,\mathbf{n}}(\mathbf{R})$.

Matriciel versus intrinsèque :

- *L'approche matricielle* consiste en une description des objets à partir d'une base de l'espace. Cette description est toujours tributaire du choix préalable d'une base. Nous verrons dans le chapitre consacré, que changer de base n'est pas aisé.

- Au contraire, *l'approche intrinsèque*, n'utilise aucune base pour décrire les objets mais uniquement leurs propriétés intrinsèques. C'est moins calculatoire et d'avantage lié à la nature propre de l'objet en question. Mais c'est souvent plus abstrait.

Ces deux approches sont complémentaires, et il faut savoir jongler entre les deux.

Théorème 5.2

Soit E un espace de dimension p et F un espace de dimension n.
On note $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ respectivement des bases de E et de F.

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E,F) & \to \mathcal{M}_{n,p} \\ f & \mapsto \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
En particulier, $\dim\left(\mathcal{L}(E,F)\right) = n \times p = \dim(E) \times \dim(F)$.

B Action matricielle d'une application linéaire

Théorème 5.3 *(Calcul matriciel de $f(x)$)*

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives

$$\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n) : \text{base de } E \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_p) : \text{base de } F.$$

Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $x \in E$, on note $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ et $X = \mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(x)$.

La matrice colonne de $f(x)$ dans la base $\mathcal{F}$ est AX.

Preuve

Il suffit d'écrire le produit matriciel comme cela a été fait en introduction de cette partie.

■

Explications

N'oublions pas que nous sommes en algèbre linéaire : on ne fait qu'étudier des situations de proportionnalité. Revenez donc en 4ème quelques instants et vous remarquerez que vous l'aviez déjà appris : calculer $f(x)$, c'est multiplier x par le coefficient de proportionnalité a. La seule différence est qu'ici, le coefficient de proportionnalité n'est pas un nombre, mais une matrice.

Chercher l'image d'un vecteur par une application linéaire revient à faire un produit matriciel.

C Opérations sur les matrices

Théorème 5.4

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie.
On désigne par $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des bases respectives de ces trois espaces.

- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $f' \in \mathcal{L}(E,F)$, alors
$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2; \qquad \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\lambda f + \mu f') = \lambda\, \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) + \mu\, \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f').$$
- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f).$$
- $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $f \in \mathrm{GL}(E) \iff \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et dans ce cas :
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f^{-1}) = \left(\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)\right)^{-1}.$$

Preuve

- immédiat en construisant la matrice de $\lambda f + \mu f'$.
- pour un $x \in E$ quelconque, on vérifie que $(v \circ f)(x) = g(f(x))$.
  Ainsi, avec les matrices, cela revient à faire successivement le produit avec $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ puis $\mathrm{mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g)$.
- Il suffit de construire la matrice de l'application identité.
- Si $f \in \mathrm{GL}(E)$, alors on utilise les deux points précédents :
$$I_n = \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}\left(f \circ f^{-1}\right) = \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f^{-1})$$
  Réciproquement, si la matrice est inversible, alors il existe une application g représentée par la matrice inverse. Et le calcul précédent montre alors que $g = f^{-1}$ (et en particulier que $f \in \mathrm{GL}(E)$). ■

⚠ On choisit les mêmes bases pour les différentes applications : la matrice dépend du choix de la base.

⚠ Si on prend deux bases différentes de E : $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, alors $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(\mathrm{Id}_E) \neq I_n$.

Remarque : La première propriété revient à dire que pour les bases de E et de F fixées (avec $\dim E = n$ et $\dim F = p$),

l'application $\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E,F) & \to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R}) \\ f & \mapsto \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) \end{cases}$ est linéaire.

Propriété 5.5 *(Isomorphisme entre deux bases différentes)*

Si $f \in \mathrm{GL}(E)$ et $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux bases de E, alors
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(f^{-1}) = \left(\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(f)\right)^{-1}.$$

Preuve

On adapte la preuve précédente. ■

Retour en arrière :
Dans le chapitre sur les matrices, nous avions admis qu'il suffit d'avoir une matrice inverse à droite ou à gauche pour montrer qu'une matrice est inversible. C'est une conséquence de ce corollaire.
Plus précisément, nous avions formulé ainsi le théorème :
Pour qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ soit inversible, il suffit qu'il existe un inverse à gauche, ou un inverse à droite. C'est-à-dire
$$\begin{aligned} A \quad \text{inversible} &\iff (\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \text{ tel que } AB = I_n) \\ &\iff (\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \text{ tel que } BA = I_n) \end{aligned}$$
En quoi cela est-il une conséquence du théorème précédent ?
Cela vient du fait qu'une matrice carrée A représente un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dans une certaine base.
S'il existe B telle que $AB = I_n$, alors on peut interpréter B comme la matrice d'un endomorphisme $g \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$. Ceci prouve que f est surjective (prouvé en exercice dans le chapitre sur les application).
En effet, $g(E) = E$ donc $E = \mathrm{Id}_E(E) = f(g(E)) = f(E)$, ce qui prouve que $\mathrm{Im}\,(u) = E$: u est surjective.
Or u est un endomorphisme donc sa surjectivité est équivalente à sa bijectivité.
Donc u est un isomorphisme de E.
Ainsi $A \in \mathrm{GL}(E)$.
On montre de même que l'existence d'un inverse à gauche équivaut à l'injectivité de u et donc à sa bijectivité.
Ce résultat qui est vrai pour les matrices (dimension finie) est faux en dimension infinie.

6 Rang d'une application linéaire

Dans cette partie, E et F désignent des espaces de dimension finie.
$\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ désignent des bases de E et F.

Définition 6.1 *(Rang d'une application linéaire)*

Le **rang** d'une application linéaire de E vers F est la dimension de son image $\mathrm{Im}\,(f)$.
$$\mathrm{rg}\,(f) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right).$$

Propriété 6.2 *(Lien avec le rang de la famille image d'une base)*

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F))$ et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E.

$$\mathrm{rg}\,(f) = \mathrm{rg}\,\left(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)\right).$$

Preuve

$\mathrm{rg}\,(f) = \dim f(E) = \dim\left(\mathrm{Vect}\,\left(f(e_1), \cdots, f(e_n)\right)\right) = \mathrm{rg}\,\left(f(e_1), \cdots, f(e_n)\right).$ ■

On peut donc définir de façon équivalente :

Définition 6.3 *(Rang d'une matrice)*

Le **rang d'une matrice** est égal (de façon équivalente) :

1. au rang de son application linéaire. Il ne dépend pas du choix des bases.
2. au nombre de pivots de sa matrice échelonnée.
3. au rang de la famille de ses vecteurs colonne.

Preuve

Le rang d'une application linéaire ne dépend pas du choix de la base d'après la définition 6.1. C'est intrinsèque à l'application linéaire.
Ce rang est égal à celui de la famille $(f(e_1),\ f(e_2),\ \cdots, f(e_n))$. d'après la propriété 6.2.
Or, ces vecteurs forment justement les vecteurs colonne de la matrice A.
Enfin, il a été prouvé dans le chapitre sur les espaces vectoriels en dimension finie, que le rang de cette famille est égal au nombre de pivots de la matrice échelonnée. ■

Propriété 6.4

Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$,

$$\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,\left(A^T\right).$$

Preuve

Admis (on obtient le même nombre de pivots que l'on travaille sur les lignes ou les colonnes). ■

Théorème 6.5 *(Lecture du nombre de pivots)*

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$ sa matrice (le choix des bases n'importe pas).

- Le nombre de pivots de A est égal
  - au rang de f,
  - à la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$,
  - à la dimension de l'espace engendré par les vecteurs colonne.
- Le nombre d'inconnues secondaires (nombre de colonnes - pivots) de A est égal
  - à la dimension de $\ker(f)$.

Ainsi

- f est **surjective** si et seulement si A admet autant de pivots que de lignes.
- f est **injective** si et seulement si A admet autant de pivots que de colonnes.
- f est **bijective** si et seulement si $A \underset{L}{\sim} I_n$.

Théorème 6.6 *(Théorème du rang)*

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$

$$\mathrm{rg}\,(f) + \dim(\ker f) = \dim(E).$$

Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$,

$$\mathrm{rg}\,(f) + \dim(\ker f) = n.$$

Preuve

nombre de pivots + nombre de paramètres = nombre de colonnes. ■

Méthode

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$, et $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$, On réalise le pivot sur les **lignes** de A.
Les colonnes qui ont donné les pivots

- forment une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.
- forment une base de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonne.

Propriété 6.7

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $\mathrm{rg}\,(f) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F))$.	Si $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$, alors $\mathrm{rg}\,(f) \leqslant \min(n,p)$.

Preuve

Si $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E,
alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))$, donc l'image possède une famille génératrice à n éléments. Donc $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) \leqslant n = \dim(E)$.
Or $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, donc $\dim \text{Im}(f) \leqslant \dim(F)$. ■

Théorème 6.8 *(Rang et composition)*

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, $\text{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$.	Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q)$, $\text{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$.

Preuve

$\text{Im}(g \circ f) = (g \circ f)(E) = g(\text{Im}(f))$ et d'après la propriété précédente 6.7,
$\text{rg}(g \circ g) \leqslant \dim \text{Im}(f) = \text{rg}(f)$.
De plus, $\text{Im}(f) \subset F$, donc par croissance de l'image directe,
$\text{Im}(g \circ f) = g(f(E)) \subset g(F) = \text{Im}(g)$.
D'après la propriété précédente 6.7, $\text{rg}(g \circ f) \leqslant \dim \text{Im}(g) = \text{rg}(g)$ ■

Propriété 6.9 *(Invariance du rang par la composée avec un isomorphisme)*

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\varphi_E \in \text{GL}(E)$, et $\varphi_F \in \text{GL}(F)$ alors $\text{rg}\, f = \text{rg}(f \circ \varphi_E) = \text{rg}(\varphi_F \circ f) = \text{rg}(\varphi_F \circ f \circ \varphi_E)$.	Si $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$, $\varphi_1 \in \text{GL}(\mathbf{R}^n)$, et $\varphi_2 \in \text{GL}(\mathbf{R}^p)$ alors $\text{rg}\, f = \text{rg}(f \circ \varphi_1) = \text{rg}(\varphi_2 \circ f) = \text{rg}(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1)$.

Remarque : Les hypothèses de ce théorème sont trop fortes : il suffit d'avoir φ_E surjective et φ_F injective pour avoir l'égalité.

Preuve

$\varphi_E(E) = E$ car l'application est bijective et en particulier surjective. Donc $(f \circ \varphi)(E) = u(E)$, ainsi $\text{rg}(f \circ \varphi) = \text{rg}\, f$.
Et par bijectivité de φ_F, $\varphi_F(\text{Im}(f))$ est isomorphe à $\text{Im}(f)$ et en particulier les deux espaces ont la même dimension (il suffirait d'avoir φ_F injective, car alors φ_F serait bijective sur son image).
Donc $\text{rg}(\varphi_F \circ f) = \text{rg}\, f$. ■

Propriété 6.10

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors • f injective $\iff$ $\text{rg}\, f = \dim E$, • f surjective $\iff$ $\text{rg}\, f = \dim F$, • f bijective $\iff$ $\text{rg}\, f = \dim E = \dim F$	Si $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$, alors • f injective $\iff$ $\text{rg}\, f = n$, • f surjective $\iff$ $\text{rg}\, f = p$, . • f bijective $\iff$ $\text{rg}\, f = n = p$.

Preuve

Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E (on pose $n = \dim E$).

- *preuve intrinsèque :* f est injective si et seulement si elle est bijective sur son image.
  preuve équivalente qui utilise les bases : f est injective si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))$ est une famille libre de $\text{Im}\, u$. Or c'est toujours une famille génératrice de $\text{Im}\, f$.
  f est donc injective si et seulement si c'est une base de $\text{Im}\, f$, c'est-à-dire si et seulement si $\text{rg}\, f = \dim \text{Im}\, f = n$.
- f est un surjective si et seulement si $\text{Im}\, f = F$.
  si et seulement si $\text{rg}\, f = \dim F$ (car l'inclusion $\text{Im}\, f \subset F$ est toujours vérifiée).
- Conséquence des deux points précédents. ■

Explications

Ces propriétés doivent devenir naturelles pour vous.
Ainsi, il faut se rappeler qu'une application linéaire ne peut pas *dilater* un espace : elle ne peut pas augmenter la dimension et $\text{rg}\, f = \dim(\text{Im}\, f) \leqslant n$.
La dimension de l'image ne peut être plus grande que celle de l'espace de départ.
La conséquence immédiate est que, si $\dim F > \dim E$, alors f ne peut pas être surjective, elle ne peut pas « remplir » F tout entier car il eusse fallu pour cela que f dilatât l'espace.

De même, si la dimension de l'espace d'arrivée est strictement plus petite que celle de l'espace de départ, cela veut dire que f doit perdre de l'information en chemin : elle ne peut pas être injective.

Corollaire 6.11

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, • $\dim E > \dim F$ $\Rightarrow f$ n'est pas injective. • $\dim E < \dim F$ $\Rightarrow f$ n'est pas surjective.	Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$, • $n > p$ $\Rightarrow f$ n'est pas injective. • $n < p$ $\Rightarrow f$ n'est pas surjective.

Théorème 6.12

Si f est un endomorphisme en dimension finie,
ou si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim E = \dim F$ alors

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective.}$$

Exemple

Soit $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (x + y, x - y, 2x - y) \end{cases}$. Sans aucun calcul, on sait que cette application n'est pas surjective car la dimension de l'espace d'arrivée est supérieure à la dimension de l'espace de départ : $\operatorname{rg} f \leqslant 2$.

Explications

Dans le chapitre sur les espaces vectoriels, nous avions vu que si une famille est composée d'autant de vecteurs que la dimension de l'espace, alors le fait que ce soit une base, qu'elle soit libre ou qu'elle soit génératrice est équivalent.
Il s'agit du même théorème pour les applications linéaires. Ainsi, la bijectivité, l'injectivité et la surjectivité correspondent respectivement au fait que l'image d'une base est : soit une base, soit une famille libre, soit une famille génératrice.

Méthode *(Prouver que f est un isomorphisme)*

Pour montrer qu'une application linéaire entre deux espaces de dimension finie est un isomorphisme, on peut successivement :

1. Montrer que les deux espaces ont la même dimension,
2. Montrer que l'application est injective (noyau réduit à 0).

C'est souvent l'injectivité d'une application qui est la plus simple à démontrer (montrer que si $x \in \operatorname{Ker}(f)$, alors $x = 0$). Lorsque les espaces sont de même dimension, cela peut donc permettre de montrer la surjectivité (qui est en général plus dure à montrer directement).