Applications linéaires

« La règle de trois est la première, la plus utile et la plus belle de toutes les règles d'arithmétique.
Car toutes les autres ont besoin d'elle, et de toutes elle se passe. »
L'arithmétique nouvellement composée
par Estienne de La Roche (1470-1530)

Dans le chapitre sur les espaces vectoriels, nous avons étudié les objets de façon *statique* à l'instar de ce qui a été fait avec les ensembles finis.
Dans ce chapitre, nous nous penchons sur l'étude *dynamique* des espaces vectoriels grâce aux applications qui agissent sur ces espaces. Par leur action, elles permettent la mise en relation de différents espaces, leur déformation géométrique...

Attention, ce chapitre comprend beaucoup de théorèmes. Il y a donc un effort à faire pour structurer les connaissances et apprendre à penser à la bonne notion au bon moment. Cependant cette abondance de théorèmes est plutôt une bonne nouvelle : cela veut dire qu'il existe souvent un théorème pas loin de ce que l'on cherche, et qu'il n'est donc pas nécessaire de faire de grands raisonnements pour s'y raccrocher.

Nous adopterons un double regard sur les application linéaires :

- une vision théorique *intrinsèque*,
- une vision calculatoire *matricielle*, privilégiée par le programme.

En fonction des problèmes, il faudra choisir celle qui est la plus adaptée.

Notations : Dans tout le chapitre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1 Définitions

Les applications étudiées ici ne sont pas quelconques. Au contraire, nous allons nous concentrer sur des applications qui respectent la structure de l'espace vectoriel.
En d'autres termes, toute opération faite dans l'espace de départ, doit se retrouver, à l'identique, dans l'espace d'arrivée.

Par exemple, si on multiplie un vecteur par un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ dans l'espace de départ E, alors, cela doit revenir à multiplier son image par le même scalaire λ. De même, additionner deux vecteurs dans l'espace de départ, doit revenir à additionner leur image dans l'espace d'arrivée.

Ces propriétés très restrictives permettent de *transporter* notre travail entre deux espaces. Ainsi, il est possible d'effectuer toutes sortes d'opérations sur un espace source E et elles sont alors appliquées, de facto, sur l'autre espace F par l'intermédiaire de l'application.

En algèbre *générale*, les applications qui respectent la structure de l'ensemble sont appelées *morphismes* : elles préservent la forme. Dans le cas particulier des espaces vectoriels, on parle davantage d'applications linéaires : la raison apparaît clairement avec les exemples et la définition qui suit.

Exemple

On définit l'espace vectoriel E correspondant aux paniers de courses possibles de votre professeur préféré le vendredi soir.
Pour simplifier, on ne comptabilise que les courgettes, les aubergines et les litrons de rouge qui constituent l'essentiel du panier. On modélise donc le panier par un triplet $(c, a, r) \in \mathbf{R}^3$ où c représente le poids de courgettes, a, le poids d'aubergines et r le litrage de rouge.
Pour avoir une structure d'espace vectoriel, on accepte les valeurs négatives (denrées rendues au commerçant).

On munit donc $E = \mathbf{R}^3$ de sa structure d'espace vectoriel usuelle et on définit l'application f qui donne le prix du panier ainsi composé. On s'aide des prix unitaires suivants (supposés invariables d'un vendredi sur l'autre) :

- les courgettes valent 3 €/kg,
- les aubergines valent $4,5$ €/kg,
- le litron de rouge vaut $2,5$ €.

On a donc $\quad \forall (c, a, r) \in \mathbf{R}^3, \quad f(c, a, r) = 3\,c + 4,5\,a + 2,5\,r$.
On remarque que les commerçants sont durs en affaires et ne font aucune réduction lors des achats en grande quantité. Ainsi, le prix du panier suit une règle de proportionnalité suivant la quantité de denrées qui le composent : par exemple, si on double la quantité de chacune des trois denrées, alors le prix du panier est également doublé : $f(2\,c, 2\,a, 2\,r) = 2\,f(c, a, r)$.

Plus généralement, pour toute multiplication des quantités par $\lambda \in \mathbf{R}$, le prix est aussi multiplié par λ :

$$\forall (c,a,r) \in \mathbf{R}^3,\ \forall \lambda \in \mathbf{R},\ f(\lambda c, \lambda a, \lambda r) = \lambda f(c,a,r)$$

Si on note $u = (c,a,r)$ le panier considéré, alors $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.
De même, si on note u, le panier de vendredi dernier et v celui de cette semaine.
Le prix des deux paniers mis ensemble est égal à la somme des prix des deux paniers considérés séparément : $f(u+v) = f(u) + f(v)$.
Ces deux propriétés définissent une application linéaire.

Ce n'est pas plus difficile que cela : ce chapitre reprend l'étude de la proportionnalité vue au collège.

Exemple

Dans l'exemple précédent, l'application était à valeurs dans $\mathbf{R}$.
On peut tout aussi bien créer une application à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ si l'image est le couple « (prix, volume) ».
On définit[1] alors $f : (c,a,r) \mapsto (3\,c+4, 5\,a-2, 5\,r, c+a+r)$ qui est une application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$: on note $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$.
Tout ce qu'il faut pour que l'application soit linéaire, c'est que les quantités image (ici le prix et le volume) suivent la règle de proportionnalité par rapport aux données source (ici les denrées).

Définition 1.1 *(L'espace des applications linéaires)*

Soient E et F, deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbf{K}$.
Une application $f : E \to F$ est dite $\mathbf{K}-$linéaire si elle vérifie **une** des assertions suivantes (équivalentes) :

- $\begin{cases} \forall (u,v) \in E^2,\ \ f(u+v) = f(u) + f(v) \\ \forall \lambda \in \mathbf{K},\ \forall u \in E,\ f(\lambda u) = \lambda f(u) \end{cases}$.
- $\forall \lambda \in \mathbf{K},\ \ \forall (u,v) \in E^2,\ f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$.
- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2,\ \ \forall (u,v) \in E^2,\ f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Ainsi, les applications linéaires respectent les deux opérations des espaces vectoriels : l'addition et la multiplication externe.

> une application linéaire traduit un rapport de proportionnalité.

Remarque : lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité sur le choix de $\mathbf{K}$, on parle d'application linéaire au lieu de $\mathbf{K}-$linéaire.

1. On suppose que les trois aliments ont la même densité, ce qui n'est pas tout à fait réaliste, mais même si on prend en compte les différences de densité, on obtient une application linéaire.

Exemple

L'application $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est-elle une application $\mathbf{R}-$linéaire de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$?
Solution :
f n'est clairement pas linéaire : elle ne traduit pas un rapport de proportionnalité.
Un contre-exemple suffit pour le montrer : $f(1) = \mathrm{e}$, mais $f(0 \times 1) = 1 \neq 0 \times f(1)$.

Exemple

Donner l'ensemble des applications $\mathbf{R}-$linéaires de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
Solution :
Ce sont les applications de proportionnalité : c'est-à-dire les applications $x \mapsto ax$ pour $a \in \mathbf{R}$ (ce n'est pas pour rien si elles s'appellent « *linéaires* »).
On peut le démontrer par analyse-synthèse :
Analyse : si on suppose que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une application $\mathbf{R}-$linéaire, alors

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = f(x \times 1) = x\, f(1).$$

Si on note $a = f(1)$, alors $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = ax$.
Synthèse : si $a \in \mathbf{R}$, et $f : x \mapsto ax$, alors f est bien linéaire. En effet,

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbf{R},\quad f(\lambda x + y) = a(\lambda x + y) = \lambda a x + a y = \lambda f(x) + f(y).$$

Conclusion :
$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est $\mathbf{R}-$linéaire si et seulement si il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $f : x \mapsto ax$.

Propriété 1.2 *(Action d'une application linéaire)*

- Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $f(0_E) = 0_F$.
- L'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un espace vectoriel.

Explications

À nouveau, ces propriétés traduisent le fait que l'application linéaire respecte la structure d'espace vectoriel. En particulier, si la stabilité est vérifiée dans l'espace de départ, alors elle se trouve naturellement vérifiée dans l'image : l'image est un espace vectoriel.

Preuve

- $f(0_E) = f(0_{\mathbf{K}} \cdot 0_E) = 0_{\mathbf{K}} \cdot f(0_E) = 0_F$.
- Soit G un sous-espace vectoriel de E, montrons que $f(G)$ est un sous espace vectoriel de F.
  - $0_E \in G$ (car G est un sev de E), et donc $0_F = f(0_E) \in f(G)$.
  - Soit $(v,v') \in (f(G))^2$, et $\lambda \in \mathbf{K}$,
    il existe $(u,u') \in G^2$ tel que $v = f(u)$ et $v' = f(u')$ (définition de l'image directe).
    Or $v + \lambda v' = f(u) + \lambda f(u') = f(u + \lambda u')$. On peut donc poser $w = u + \lambda u'$.
    G est stable par combinaison linéaire, donc $w \in G$, ainsi $v + \lambda v' = f(w) \in f(G)$.

  Donc $f(G)$ non vide et stable par combinaison linéaire : c'est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée F.

■

Exemple

L'application $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (x+y, y-1, y) \end{cases}$ est-elle linéaire ?

Solution :
$f(0,0,0) = (0,-1,0) \neq (0,0,0)$.
D'après la propriété 1.2, l'application f n'est pas linéaire.

☝ Quand on demande de vérifier si une application f est linéaire, la première chose à faire est de calculer $f(0)$.

Définition 1.3 *(Applications particulières)*

- On appelle **endomorphisme** de E toute application linéaire de E dans E.
  On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- On appelle **morphisme identité**, l'endomorphisme $x \mapsto x$ de E dans E.
  On le note Id_E.
- On appelle **isomorphisme** toute application linéaire bijective.
- On appelle **automorphisme** tout endomorphisme bijectif.
  On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Explications
Le morphisme identité ne *fait rien*. Il reste dans le même espace et ne modifie pas l'objet qu'il prend en argument. Nous verrons qu'il joue le rôle d'élément neutre pour la loi de composition entre endomorphismes.
Un isomorphisme, est un morphisme qui agit de façon réversible : il existe une application réciproque qui fait le travail inverse. En particulier, il ne perd, ni n'ajoute aucune information au vecteur sur lequel il agit. Nous verrons qu'un isomorphisme transforme un espace vectoriel en un autre de même nature géométrique : une droite en une autre droite, un plan en un plan...
Un automorphisme est un isomorphisme qui agit au sein du même espace vectoriel : l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont les mêmes. Géométriquement, il déforme l'espace de façon réversible. Par exemple, les rotations sont des automorphismes du plan.

Exemple

L'application qui donne le couple (prix, volume) en fonction du panier de courses (exemples précédents) est une application linéaire non bijective. Ce n'est pas un isomorphisme. La connaissance du couple (prix, volume) ne me permet pas de retrouver la composition exacte du panier (pas injectif).

Exemple

- L'application nulle de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ est un endomorphisme non bijectif.
- $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}_1[X] \\ (a_0,a_1) & \mapsto a_0 + a_1 X \end{cases}$ est un isomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}_1[X]$.
  En effet, l'application est linéaire et elle est bijective car pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}_1[X]$, il existe un unique couple $(a_0,a_1) \in \mathbf{R}^2$ tel que $P = a_0 + a_1 X = f(a_0,a_1)$.
- $f : \begin{cases} \mathbf{C}^2 & \to \mathbf{C}^2 \\ (x,y) & \mapsto (y,x) \end{cases}$ est un automorphisme de $\mathbf{C}^2$.

Définition 1.4

S'il existe un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(E,F)$,
alors on dit que les deux espaces E et F sont **isomorphes**.

On verra que cela revient à avoir la même nature géométrique.
Savoir que deux espaces sont isomorphes est très pratique. Cela veut dire que toutes les opérations et propriétés (liées à la structure d'espace vectoriel) que l'on aura démontré pour l'un pourront être transposées à l'autre par l'intermédiaire de l'isomorphisme. Ces deux espaces se comportent donc comme s'il s'agissait de deux images déformées du même espace.

Exemple

$\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}_1[X]$ sont isomorphes (avec l'application de l'exemple précédent).
Ainsi travailler les polynômes ou sur les listes de leurs coefficients revient au même.

Exemple

Montrer qu'un espace vectoriel E est toujours isomorphe à lui-même.
Solution :
On prend l'application identité qui est un automorphisme de E.

Ici, nous avons défini les applications linéaires *individuellement* : chacune de leur côté. Mais si on prend un peu de recul, on peut s'apercevoir qu'il existe une harmonie entre elles. Ou pour parler plus mathématiquement, que l'on peut doter l'ensemble des applications linéaires de structures algébriques.
Ainsi, nous allons voir que $(\mathcal{L}(E,F),+,\cdot)$ est lui-même un espace vectoriel ainsi que $(\mathcal{L}(E),+,\cdot)$.

Propriété 1.5 *(Opérations sur les applications linéaires)*

Soient E et F deux espaces vectoriels

- La somme de deux applications linéaires de $\mathcal{L}(E,F)$ est une application linéaire.
  $\longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ est stable par somme.
- Toute combinaison linéaire d'applications linéaires de $\mathcal{L}(E,F)$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E,F)$.
  $\longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ est stable par combinaison linéaire.

$$(\mathcal{L}(E),+,\cdot) \text{ est un espace vectoriel.}$$

- La composée de deux applications linéaires est linéaire.
- La réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.

Preuve

- Soient f et g deux applications linéaires de $\mathcal{L}(E,F)$. $\forall (u,v)\in E^2, \forall\lambda\in\mathbf{K}$,

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda u+v) &= f(u+\lambda v)+g(u+\lambda v) = f(u)+\lambda f(v)+g(u)+\lambda g(v)\\ &= (f+g)(u)+\lambda(f+g)(v).\end{aligned}$$

  Donc $f+g$ est linéaire : $f+g\in\mathcal{L}(E,F)$.
- Il ne reste qu'à montrer le produit par un scalaire. Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $\mu\in\mathbf{K}$.

$$\forall (u,v)\in E^2, \forall\lambda\in\mathbf{K},\quad \begin{aligned}(\mu f)(\lambda u+v) &= \mu f(u+\lambda v) = \mu f(u)+\mu\lambda f(v)\\ &= (\mu f)(u)+\lambda(\mu f)(v).\end{aligned}$$

- Soient $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $g\in\mathcal{L}(F,G)$. ⚠ $g\notin\mathcal{L}(E,F)$ pour que la composée existe.

$$\forall (u,v)\in E^2, \forall\lambda\in\mathbf{K},\quad \begin{aligned}(g\circ f)(\lambda u+v) &= g(f(u+\lambda v)) \quad (\text{linéarité de } f)\\ &= g(f(u)+\lambda f(v))\\ &= g(f(u))+\lambda g(f(v)) \quad (\text{linéarité de } g)\\ &= (g\circ f)(u)+\lambda(g\circ f)(v).\end{aligned}$$

- Si $f\in\mathcal{L}(E,F)$ bijective, alors f admet une réciproque f^{-1}, mais rien ne dit a priori que f^{-1} est aussi linéaire.
  Soient $(w,w')\in F$, $\lambda\in\mathbf{K}$, on pose $u=f^{-1}(w)$ et $u'=f^{-1}(w')$.

$$\begin{aligned}f^{-1}(w+\lambda w') = f^{-1}(f(u)+\lambda f(u')) &= f^{-1}(f(u+\lambda u')) \quad (\text{linéarité de } f)\\ &= u+\lambda u' \quad (\text{car } f^{-1}\circ f=\mathrm{Id}_E)\\ &= f(w)+\lambda f(w').\end{aligned}$$

  Donc $f^{-1}\in\mathcal{L}(E,F)$.

■

Corollaire 1.6

Soit E un espace vectoriel,

- $\mathrm{GL}(E)$ est stable par composition,
- si $f\in\mathrm{GL}(E)$, alors $f^{-1}\in\mathrm{GL}(E)$.

Preuve

- La composée de deux applications linéaires est encore linéaires, et la composition de deux bijections est une bijection.
- Nous avons vu que f^{-1} est linéaire. De plus, elle est bijective de réciproque f. Ainsi $f\in\mathrm{GL}(E)$.

■

Exemple

Montrer que l'application $f:(x,y,z)\mapsto(x+y,z,x-z)$ est un automorphisme de $\mathbf{R}^3$ et donner son application réciproque.

Solution :

Pour montrer que f est linéaire, il suffit de remarquer que l'image de (x,y,z) par f est obtenue par combinaison linéaire des coefficients du vecteur (x,y,z). Cela suffit.
Si on veut le montrer avec la définition (ce qu'il faut aussi savoir faire) :
Soient $(u,u')\in(\mathbf{R}^3)^2$, et $\lambda\in\mathbf{R}$, on note $u=(x,y,z)$ et $u'=(x',y',z')$.

$$\begin{aligned}f(u+\lambda u') &= f(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')\\ &= (x+\lambda x'+y+\lambda y', z+\lambda z', x+\lambda x'-(z+\lambda z'))\\ &= (x+y+\lambda(x'+y'), z+\lambda z', x-z+\lambda(x'-z'))\\ &= (x+y,z,x-z)+\lambda(x'+y',z',x'-z')\\ &= f(x,y,z)+\lambda f(x',y',z')\\ &= f(u)+\lambda f(u')\end{aligned}$$

Donc f est bien linéaire.
Pour montrer que c'est un isomorphisme, il faut donc montrer qu'elle est bijective, c'est-à-dire que pour tout $(a,b,c)\in\mathbf{R}^3$, il existe un unique antécédent (x,y,z) par f. Cela revient donc à résoudre $f(x,y,z)=(a,b,c)$, ce qui permettra de trouver l'application réciproque en même temps.

$$\begin{aligned}f(x,y,z)=(a,b,c) &\iff (x+y,z,x-z)=(a,b,c)\\ &\iff \begin{cases} x+y = a\\ z=b\\ x-z=c\end{cases} \iff \begin{cases} x = b+c\\ y=a-b-c\\ z=b\end{cases}\end{aligned}$$

Donc f est un isomorphisme d'application réciproque

$$f^{-1}:(a,b,c)\mapsto(b+c,a-b-c,b)$$

2 Image et noyau

E et F désignent deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

A Définition

Définition 2.1

L'**image** de f est l'image directe de E par f.

$$\mathrm{Im}\,(f) = \{f(u),\ u \in E\}.$$

Le **noyau** de f est l'ensemble des antécédents de 0_F par f.

$$\mathrm{Ker}\,(f) = \{u \in E, f(u) = 0_F\}.$$

Propriété 2.2

$\mathrm{Im}\,(f)$ est un sous espace vectoriel de F. $\mathrm{Ker}\,(f)$ est un sous espace vectoriel de E.

Preuve

Pour $\mathrm{Im}\,(f)$, on utilise la propriété 1.2.
Pour le noyau, on démontre avec la caractérisation des sous espaces vectoriels :

- $f(0_E) = 0_F$, donc $O_E \in \mathrm{Ker}\,(f)$.
- Si $(u, v) \in (\mathrm{Ker}\,(f))^2$, $\lambda \in \mathbf{K}$, $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v) = 0_F + \lambda 0_F = 0_F$.
  Donc $(u + \lambda v) \in \mathrm{Ker}\,(f)$.

■

Exemple

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4,\ \text{tel que } x + y - 3z = 0 \ \text{ et } \ z = y + t\}$.
Interpréter E comme le noyau d'une application linéaire.
Solution :
On pose $f : (x, y, z, t) \mapsto (x+y-3z,\ z-y-t)$. f est clairement une application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^2$ et $E = \ker(f)$. Il en découle que E est un espace vectoriel.

Exemple

Soit $f : (x, y) \mapsto (x, x + y, 2x - y)$. Donner une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Im}\,(f)$.

Solution :
On résout $f(x, y) = (a, b, c)$ pour voir à quelle condition sur (a, b, c) il y a des solutions.

$$f(x,y,z) = (a,b,c) \iff \begin{cases} x = a \\ x+y = b \\ 2x-y = c \end{cases} \iff \begin{cases} x = a \\ y = -a+b \\ 2x-y = c \end{cases}$$

Le système admet des solutions si et seulement si

$$2x - y = c \iff 2a - (-a + b) = c \iff 3a - b = c$$

Donc $\mathrm{Im}\, f = \{(a, b, 3a - b), (a, b) \in \mathbf{K}^2\} = \{a(1, 0, 3) + b(0, 1, -1),\ (a, b) \in \mathbf{K}^2\}$.

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,((1, 0, 3), (0, 1, -1))$$

Théorème 2.3 *(Caractérisation des applications injectives et surjectives)*

1. f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\}$.
2. f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\,(f) = F$.

C'est la caractérisation des applications injectives qui nous servira le plus (pour la surjectivité, c'est simplement la définition que nous rappelons ici). Dès que l'on demande de montrer qu'une application est injective, il faut penser à étudier son noyau.
Cette caractérisation traduit bien la rigidité d'une application linéaire : pour étudier l'unicité de l'antécédent de n'importe quelle image, il suffit de le faire pour 0 et cela nous donne le résultat pour tout le reste de l'espace vectoriel !

Preuve

1. - (sens direct) $f(0_E) = 0_F$ car f est linéaire (cf propriété 1.2).
     Et par unicité de l'antécédent, $\ker(f) = \{0_E\}$.
   - (sens réciproque)
     On suppose $\ker(f) = \{0_E\}$ et on cherche à montrer que f est injective.
     Soient $(u, u') \in E^2$ tels que $f(u) = f(u')$.
     Alors $f(u) - f(u') = 0_F$ et par linéarité, $f(u - u') = 0_F$.
     Ainsi $u - u' \in \mathrm{Ker}\,(f)$, et d'après notre hypothèse : $u - u' = 0_E$.
     Donc $u = u'$ et l'application est injective.
2. C'est la définition d'une application surjective : rien de spectaculaire.

■

Exemple

Soit $f : (x, y, z, t) \mapsto (x + 2y - z + t, x + y, -z - t)$.
L'application f est-elle injective ?
Solution :
f est clairement linéaire de $\mathbf{K}^4$ dans $\mathbf{K}^3$ car les coordonnées de l'image s'écrivent comme combinaison linéaire des coefficients du vecteur (x, y, z, t).
Pour étudier l'injectivité, il suffit de chercher le noyau :

$$\begin{aligned}(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}\,(f) &\iff f\,(x,y,z,t) = (0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} x+2y-z+t = 0 \\ x+y = 0 \\ x+y-z-t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x+y = 0 & \leftarrow L_2 \\ y-z+t = 0 & \leftarrow L_1 - L_2 \\ -z-t = 0 & \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}\end{aligned}$$

Le système a trois pivots x, y, z et un paramètre t : il admet donc une infinité de solutions. Donc $\ker(f)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$, ainsi f n'est pas injective.
☝ On remarque que s'il y a plus d'équations que d'inconnues, alors le système admet nécessairement au moins un paramètre : l'application n'est pas injective.

Ceci permet de voir qu'une application de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ ne peut pas être injective si $n \geqslant p$. Nous reverrons ce théorème un peu plus loin dans le chapitre.

B Action d'une application linéaire sur une base

Si l'espace de départ est un espace de **dimension finie**, on sait qu'il peut être facilement décrit par une base.
Ainsi, nous allons voir que toute application linéaire de $\mathcal{L}(E,F)$ sera elle-même décrite par son action sur cette base : il suffit de connaître les images des éléments de la base de E pour connaître complètement l'application linéaire.

Théorème 2.4 *(Caractérisation par l'image d'une base)*

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ est une base de E.
f est décrite de manière unique par son action sur la base : $f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p)$.
Pour tout vecteur $x \in E$,

$$\text{si} \quad x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j, \quad \text{alors} \quad f(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j).$$

Exemple

Si on reprend l'exemple du panier de courses vu plus haut, il suffit de connaître les prix unitaires des produits de *base* pour connaître le prix de n'importe quel panier.

Propriété 2.5

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, et $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ une base de E,
alors $\big(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p)\big)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$.

En d'autres termes, tous les éléments de l'image $\mathrm{Im}\,(f)$ peuvent être obtenus à partir des images de la base de E : il suffit de connaître l'image des éléments de la base de E pour générer l'espace $\mathrm{Im}\,(f)$ tout entier.

Preuve

Soit $y \in \mathrm{Im}\,(f)$, alors par définition de l'image, il existe un antécédent x : $f(x) = y$.
Or x peut être décomposé sur la base $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$: $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p$.
avec $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in \mathbf{K}^p$. Donc $y = f(x) = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p)$.
Par linéarité de f, $y = \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \cdots + \lambda_p f(e_p)$.
Ainsi, tout $y \in \mathrm{Im}\,(f)$ s'écrit comme combinaison linéaire de $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p))$.
Donc $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$.

■

Théorème 2.6

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, et $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ une base de E,

- f est injective de E dans F
  si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p))$ est une famille libre de F.
- f est surjective de E sur F
  si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p))$ est une famille génératrice de F.
- f est un isomorphisme de E dans F
  si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p))$ est une base de F.

Explications
Injectivité et liberté sont deux façons d'exprimer l'unicité d'une écriture.

Preuve

- **(sens direct)** On suppose u injective.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbf{K}^p$ tel que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(e_k) = 0$, alors $f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k\right) = 0$.
  Ainsi $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et on sait que f est injective, c'est-à-dire que $\ker(f) = \{0\}$.
  Donc $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k = 0$.
  Or $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ est une base, la famille est donc libre. Donc tous les λ_k sont nuls.
  Donc la famille $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p))$ est libre.
  (sens réciproque) On suppose que la famille est libre.
  Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f$.
  $x \in E$ et on peut le décomposer sur la base $(e_1, e_2, \cdots e_p)$:

  $$\exists(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbf{K}^p \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k.$$

  Ainsi $0_F = f(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(e_k)$ (par linéarité).
  Or la famille des $(f(e_k))_{k \in [\![1,p]\!]}$ est supposée libre, donc tous les λ_k sont nuls.
  Donc $x = 0$.
  Donc $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$ et f est injective.
- f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\, f = F$.
  Or $(f(e_k))_{k \in [\![1,p]\!]}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f$.
  f est donc surjective, si et seulement si c'est une famille génératrice de F.
- Conséquence des deux points précédents.

■

Se souvenir qu'entre des espaces de dimension finie :

Un isomorphisme est une application qui transforme une base en une autre.
En particulier, l'image d'une base de E par un isomorphisme est une base de F.

Théorème 2.7

Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.
En particulier, si $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ est un isomorphisme, alors $n = p$.

⚠ La réciproque est fausse, trouver un contre-exemple.

Solution :

L'application nulle est une application linéaire de $\mathbf{K}^n$ dans lui-même, mais elle n'est pas bijective.

Remarque : Dans le cadre des applications linéaires entre $\mathbf{K}^p$ et $\mathbf{K}^n$, les isomorphismes sont exactement les automorphismes (car l'espace de départ est alors égal à l'espace d'arrivée).

Explications

Pour pouvoir « revenir » en arrière (avoir un isomorphisme), il faut avoir autant d'informations à l'arrivée qu'au départ.
Si on reprend l'image du panier de courses, même avec les deux informations prix et volume, je ne peux pas deviner la composition du panier. Par contre, si j'ajoutais une troisième information indépendante (par exemple, la quantité de courgettes), alors je pourrais retrouver la composition de mon panier à partir de ces trois informations en résolvant un système.

Lien avec les systèmes linéaires :

On voit ici que l'on retrouve l'idée des systèmes linéaires : pour qu'un système soit inversible (c'est-à-dire, que le second membre puisse nous donner de façon unique la valeur des inconnues), alors, il est nécessaire d'avoir exactement autant d'équations que d'inconnues.

- S'il y a moins d'équations que d'inconnues $n < p$, alors le système est à paramètre : il existe plusieurs solutions pour un même second membre ; le système n'est pas injectif.
- S'il y a plus d'équations que d'inconnues $n > p$, alors nécessairement certaines équations sont redondantes entre-elles et il n'est pas possible de choisir le second membre de façon arbitraire. Pour certains seconds membres, il n'existe pas de solution (pivot dans le second membre) ; ce système n'est pas surjectif.
- Dans le cas où il y a autant d'équations que d'inconnues $n = p$, le système peut être bijectif mais ce n'est pas toujours le cas (par exemple, si une même équation est répétée plusieurs fois).

Dans la partie qui suit, nous allons utiliser les bases (en dimension finie), pour décrire complètement les vecteurs et caractériser les applications linéaires. Cela fera le lien avec les systèmes linéaires dont il vient d'être question.

Cette démarche a l'avantage (et l'inconvénient) d'être moins abstraite et permettra de réaliser de nombreuses démonstrations de façon exclusivement calculatoire.
C'est ce que nous avons appelé l'approche *matricielle* en introduction.

3 Matrice d'une application linéaire

A Matrice dans une base

Le résultat fondateur de cette approche est le théorème 2.4 selon lequel une application linéaire est entièrement déterminée par son action sur une base.
On considère donc deux espaces de dimension finie E et F. $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ est une base de E, $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est une base de F et f une application linéaire de E dans F.

1. **Décomposition sur la base de départ :**

   D'après le théorème 2.4, pour tout vecteur $x \in E$, on peut écrire

$$x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j, \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j).$$

2. **Décomposition sur la base d'arrivée :**

   Or $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est une base de F, donc pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on peut décomposer $f(e_j)$ de façon unique dans la base $\mathcal{F}$:

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i.$$

3. **Écriture matricielle :**

   Dans la base $\mathcal{F}$, la matrice des coordonnées de $f(e_j)$ s'écrit

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{F}}\left(f(e_j)\right) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}.$$

   $y = f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_j f(e_j) + \cdots + x_n f(e_n)$ s'écrit matriciellement :

$$Y = x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} + \cdots + x_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ a_{2,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & & & a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & & & a_{n,p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = AX.$$

   A est la matrice de f entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Notation

On note[2] $A=\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ la matrice de l'application f entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.
Pour deux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ fixées, la matrice décrit parfaitement l'application.
Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont les bases canoniques de E et F, alors on dit que

A est la matrice **canoniquement** associée à f.

Théorème 3.1

Toute application linéaire entre des espaces vectoriels de dimension finie peut être caractérisée par une matrice.

Cette matrice dépend du choix des bases.

Explications
Le fait de choisir des bases particulières permet de ne pas se préoccuper de la nature de l'espace vectoriel considéré. Tout vecteur s'écrit dans la base sous la forme d'un n-uplet de $\mathbf{K}^n$. Ainsi, on peut oublier l'espace vectoriel ambiant pour travailler dans $\mathbf{K}^n$.
Par exemple, pour l'espace de polynômes $\mathbf{K}_{n-1}[X]$, choisir la base canonique revient à modéliser chaque polynôme par le tableau (vecteur) de ses coefficients.
Les résultats prouvés sur $\mathbf{K}^n$ pourront donc être appliqués à n'importe quel espace vectoriel de dimension finie n (en choisissant une base quelconque pour celui-ci). Cela explique pourquoi le programme de BCPST-1 se limite à l'étude des espaces vectoriels de type $\mathbf{K}^n$.

Exemple

Soit $f:\begin{cases}\mathbf{R}^4 & \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto (x+y+z, x-2z+t, y+z-t).\end{cases}$

Déterminer la matrice canoniquement associée à f.

Solution :
Pour construire facilement cette matrice, on calcule $f(1,0,0,0)=(1,1,0)$ et on écrit verticalement ce vecteur pour la première colonne. On fait de même pour les deux autres colonnes qui sont données par $f(0,1,0)$ et $f(0,0,1)$.

On obtient $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

Une autre façon rapide de le voir est d'écrire l'expression de f en écrivant le vecteur image verticalement et en alignant les x, y, z et t :

$$f(x,y,z,t)=\begin{pmatrix} x & +y & +z & \\ x & & -2z & +t \\ & y & +z & -t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & +1y & +1z & +0t \\ 1x & +0y & -2z & +1t \\ 0x & +1y & +1z & -1t\end{pmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}}_{=A}\cdot\begin{pmatrix}x \\ y \\ z \\ t\end{pmatrix}$$

2. Il n'y a pas de notation officielle.

Méthode *(Écrire une application linéaire dans une base)*

La matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ s'obtient en écrivant les vecteurs colonne $f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p)$ côte à côte dans la base $\mathcal{F}=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$.

$\mathcal{E}$: départ

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & & f(e_p) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p}\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \\ \\ \leftarrow f_n \end{array} \end{array}$$

$\mathcal{F}$: arrivée

Propriété 3.2 *(« Réciproque »)*

Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ peut être interprétée comme la matrice d'une application linéaire $f\in\mathcal{L}(\mathbf{K}^p,\mathbf{K}^n)$ avec $\mathbf{K}^p$ et $\mathbf{K}^n$ munis de leur base canonique.

⚠ L'espace de départ correspond aux colonnes de la matrice. Ainsi, la dimension de l'espace de départ est le nombre de **colonnes** et celle de l'espace d'arrivée est le nombre de lignes. Pour $f:\mathbf{K}^{\mathbf{n}}\to\mathbf{K}^p$, la matrice est dans $\mathcal{M}_{p,\mathbf{n}}(\mathbf{K})$.

B Action matricielle d'une application linéaire

Théorème 3.3 *(Calcul matriciel de $f(x)$)*

Soient E et F deux espaces vectoriels avec $\dim E=p$ et $\dim F=n$.
$\mathcal{E}=(e_1,e_2,\cdots,e_p)$ est une base de E. $\mathcal{F}=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ est une base de F.
Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $A=\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ la matrice de f entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.
Soit $x\in E$ et $X=\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(x)$ la matrice colonne représentant x dans la base $\mathcal{E}$.

la matrice colonne de $f(x)$ dans la base $\mathcal{F}$ est AX.

Preuve
Il suffit d'écrire le produit matriciel. ■

Explications
N'oublions pas que nous sommes en algèbre linéaire : on ne fait qu'étudier des situations de proportionnalité. Revenez donc en 4e quelques instants et vous remarquerez que vous l'aviez déjà appris : calculer $f(x)$, c'est multiplier x par le coefficient de proportionnalité a. La seule différence est qu'ici, le coefficient de proportionnalité n'est pas un nombre, mais une matrice.

Chercher l'image d'un vecteur par une application linéaire revient à faire un produit matriciel.

C Opérations sur les matrices

Théorème 3.4

Soient E, F, G trois espaces de dimension finie, de bases respectives $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(E,F)$, alors
$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2; \qquad \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\lambda f + \mu g) = \lambda\, \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) + \mu\, \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(g).$$
- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f).$$
- $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $f \in \mathrm{GL}(E) \iff \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et dans ce cas :
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f^{-1}) = \left(\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)\right)^{-1}.$$

⚠ On choisit les mêmes bases pour les différentes applications : la matrice dépend du choix de la base. En particulier, si on prend deux bases différentes de E : $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, alors $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(\mathrm{Id}_E) \neq I_n$.

Preuve

- immédiat en construisant la matrice de $\lambda f + \mu g$.
- pour un $x \in E$ quelconque, on vérifie que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
Ainsi, avec les matrices, cela revient à faire successivement le produit avec $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ puis $\mathrm{mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g)$.
- Il suffit de construire la matrice de l'application identité.
- Si $f \in \mathrm{GL}(E)$, alors on utilise les deux points précédents :
$$I_n = \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}\left(f \circ f^{-1}\right) = \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f^{-1})$$
Réciproquement, si la matrice est inversible, alors il existe une application g représentée par la matrice inverse. Et le calcul précédent montre alors que $g = f^{-1}$ (et en particulier que $f \in \mathrm{GL}(E)$).

■

La première propriété revient à dire que pour les bases de E et de F fixées,

$$\text{l'application} \quad \Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E,F) & \to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}) \\ f & \mapsto \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) \end{cases} \quad \text{est } \mathbf{K}\text{-linéaire.}$$

Et d'après le théorème 3.1 et la propriété 3.2, c'est un isomorphisme.

Propriété 3.5 *(Isomorphisme entre deux bases différentes)*

Si $f \in \mathrm{GL}(E)$ et $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux bases de E, alors
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(f^{-1}) = \left(\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(f)\right)^{-1}.$$

⚠ On change l'ordre des bases entre f et f^{-1}.

Preuve

On adapte la preuve précédente. ■

Exemple

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ définie par $\begin{cases} a_{i,j} = 1 & \text{si } i = j \text{ ou } j = i+1, \\ a_{i,j} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'application linéaire canoniquement associée à A dans $\mathbf{R}^n$ et justifier, sans calculs, que c'est un automorphisme de $\mathbf{R}^n$.

Solution :

On lit les images avec les vecteurs colonne : $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_1 + e_2$, ... $f(e_n) = e_{n-1} + e_n$.

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto (x_1, x_1 + x_2, x_2 + x_3, \cdots, x_{n-1} + x_n)$$

La matrice associée est inversible (elle est écrite sous forme échelonnée avec n pivots).
Donc f est inversible : c'est un automorphisme de $\mathbf{R}^n$.

Exploiter l'isomorphisme Φ :

À présent que nous avons établi un lien linéaire et bijectif entre les applications linéaires et les matrices, on peut travailler indifféremment sur l'un ou l'autre objet. En fonction du problème, on passera d'une approche à l'autre.

- Toute matrice (ou tout système linéaire) peut être interprétée géométriquement avec des applications linéaires.
- À l'inverse, tout application linéaire (en dimension finie) peut être écrite sous forme matricielle. Cela permet de transformer un problème *géométrique* en un simple calcul matriciel.

Les deux sections qui suivent exploitent ce lien :

- matriciel $\to$ intrinsèque pour la section D.
- intrinsèque $\to$ matriciel pour la section E.

D Résolution de systèmes linéaires

Propriété 3.6

Pour tout système linéaire de taille $n \times p$ de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & \cdots & +a_{1,p}x_q & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & \cdots & +a_{2,p}x_q & = & b_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & +a_{n,2}x_2 & \cdots & +a_{n,p}x_q & = & b_n \end{cases}$$

où les $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et les $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont des coefficients dans $\mathbf{K}$.

On définit l'application linéaire

$$f : \begin{cases} \mathbf{K}^p & \to & \mathbf{K}^n \\ (x_1, x_2, \cdots, x_p) & \mapsto & \left(\sum_{j=1}^p a_{1,j}x_j, \sum_{j=1}^p a_{2,j}x_j, \cdots, \sum_{j=1}^p a_{n,j}x_j\right) \end{cases}.$$

On note les vecteurs $x = (x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \mathbf{K}^p$ et $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbf{K}^n$.

$$x \text{ est solution du système si et seulement si } f(x) = b.$$

Propriété 3.7

Le système est compatible si et seulement si $b \in \mathrm{Im}\,(f)$.
Dans ce cas, si x_0 est une solution particulière, alors l'ensemble des solutions est de la forme
$$\mathcal{S} = \left\{x_0 + x, \quad x \in \mathrm{Ker}\,(f)\right\}.$$

Preuve

Le système est compatible si et seulement s'il admet une solution $x_0 \in \mathbf{K}^p$.
C'est-à-dire, s'il existe $x_0 \in \mathbf{K}^p$ tel que $f(x_0) = b$.
Ainsi, le système est compatible si et seulement si $b \in \mathrm{Im}\,(f)$.
Si x_0 est une solution particulière, alors
$x \in \mathcal{S} \iff f(x) = b \iff f(x) = f(x_0) \iff f(x - x_0) = 0 \iff x - x_0 \in \mathrm{Ker}\,(f)$. ■

Propriété 3.8 *(Système de Cramer)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$,

$$\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}),\ \exists!\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}),\ \text{ tel que } AX = B \iff A \text{ est inversible.}$$

Preuve

Si on revient à l'application linéaire sous-jacente f, cela veut dire que
$\forall b \in F,\ \exists! x \in E,$ tel que $f(x) = b$. C'est la définition d'une application bijective, ce qui correspond à l'inversibilité de la matrice. ■

E Obtenir le noyau et l'image à partir de la matrice

On peut facilement obtenir une base du noyau et de l'image à partir de la matrice de l'application linéaire en réalisant un pivot de Gauss **sur les lignes** [3].
Un exemple à la fin de cette partie met en œuvre ces méthodes.

Le noyau :
Le noyau d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ s'obtient en résolvant $f(x) = 0_F$.
Cela revient donc à résoudre le système linéaire associé à f que l'on peut obtenir par la méthode du pivot.

Propriété 3.9

La dimension du noyau est donnée par le nombre de paramètres du système.

Méthode *(Obtenir le noyau par pivot sur les lignes)*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^n)$, et $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ sa matrice associée dans les bases canoniques.

1. On résout le système d'équation avec le pivot de Gauss sur les lignes de A.
   $\to k$ paramètres et $n - k$ inconnues principales.

2. Si on donne la valeur 1 à un paramètre fixé et 0 aux autres paramètres, alors on obtient un unique vecteur du noyau.
   On fait cela pour chacun des k paramètres ce qui donne k vecteurs générateur du noyau.
   Ces vecteurs forment aussi une famille libre (trivial) : c'est une base du noyau.

Image :
Si $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^n)$ et $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ est une base de $\mathbf{R}^p$, alors

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,\left(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p)\right).$$

Matriciellement, cela veut dire que l'image est engendrée par les vecteurs colonne de la matrice.
Il s'agit ensuite d'en extraire une famille libre maximale pour avoir une base de l'image.

Méthode *(Obtenir l'image par pivot sur les lignes)*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^n)$, et $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ sa matrice associée dans les bases canoniques.
La matrice échelonnée possède $r = n - k$ pivots.
Si on ne conserve dans la matrice initiale A que les vecteurs qui ont donné un pivot, on obtient une famille libre avec autant d'éléments que le rang de la matrice : c'est une base de l'image.

3. On peut également faire un travail *dual* sur les colonnes pour obtenir les mêmes résultats. En particulier, certains cours de BCPST privilégieront un pivot sur les colonnes pour obtenir le noyau (pour des raisons géométriques).
L'avantage de la présente méthode est qu'elle utilise la même procédure pour répondre aux deux questions : noyau comme image.

⚠ Il faut prendre les vecteurs colonne dans la matrice initiale A, et non dans la matrice échelonnée.

Preuve

Si on note A la matrice initiale et R une matrice échelonnée obtenue à partir de A (ce n'est pas utile d'aller jusqu'à la matrice échelonnée réduite).
On note A' la matrice obtenue en extrayant de A les r vecteurs qui ont donné un pivot dans $\mathbf{R}$.
On peut appliquer exactement les mêmes opérations sur les lignes de A' que celles réalisées sur A pour obtenir R. Comme on travaille uniquement sur les lignes et que les colonnes restent totalement indépendantes les unes des autres, on voit que l'on obtient alors exactement les r vecteurs de la matrice R qui possèdent des pivots.
C'est donc une matrice avec r colonnes qui contient r pivots : ces vecteurs colonnes forment une famille libre.
Or tout élément de l'image peut-être obtenu à partir de ces colonnes (les autres colonnes correspondent à des paramètres que l'on peut mettre à zéro).
Ainsi, la famille obtenue est à la fois libre et génératrice de l'espaces $\operatorname{Im} f$: c'est une base de $\operatorname{Im} f$. ■

Pour se souvenir :

Lorsque l'on fait un pivot sur les lignes, alors on lit directement :

- le noyau avec les colonnes nulles.
  En résolvant le système, chaque paramètre donne un vecteur de base du noyau.
- l'image avec les colonnes à pivot.
  les colonnes correspondantes dans la matrice initiale forment une base de $\operatorname{Im} u$.

Exemple

On considère l'application $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^5)$ définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^5$ par

$$f(x, y, z, t) = (x - y - 2z, 2x - y - 5z + t, x - 3z + t, -x + 3z - t, x + y - 4z).$$

Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.
À quelle(s) condition(s) sur a, b, c, d et e le vecteur (a, b, c, d, e) appartient-il à $\operatorname{Im}(f)$?

Solution :

f est clairement linéaire car le vecteur image s'écrit en fonction des coordonnées du vecteur (x, y, z, t).
Sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^4$ et $\mathbf{R}^5$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

On réalise le pivot de Gauss sur les lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \leftarrow L_3 - L_1 \\ \leftarrow L_4 + L_1 \\ \leftarrow L_5 - L_1 \end{matrix}$$

$$\sim_L \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow L_3 - L_2 \\ \leftarrow L_4 + L_2 \\ \leftarrow \frac{1}{2}L_5 - L_2 \end{matrix}$$

$$\sim_L \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow -L_5 \\ \leftarrow L_3 \\ \leftarrow L_4 \end{matrix}$$

On obtient 3 pivots donc l'image est de dimension 3. Une base de l'image s'obtient avec les colonnes qui ont donné des pivots (la première, la deuxième et la quatrième) :

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left((1, 2, 1, -1, 1), (-1, -1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, -1, 0)\right)$$

En effet, la famille donnée par les 4 vecteurs de la matrice A est génératrice de $\operatorname{Im}(f)$ (car c'est l'image d'une base par f) et les trois vecteurs en question en forment une famille libre extraite de cardinal maximal.
Le noyau est de dimension 1 car il y a un paramètre pour le système, on trouve ainsi

$$f(x, y, z, t) = 0_{\mathbf{R}^5} \iff \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ y - z + t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 3z \\ y &= z \\ t &= 0 \end{cases}$$

On obtient un vecteur de base avec $z = 1$ (les autres solutions sont proportionnelles) :

$$\operatorname{Ker}(f) = \{(3z, z, z, 0),\ z \in \mathbf{R}\} = \operatorname{Vect}\left(\ (3, 1, 1, 0)\ \right).$$

Pour trouver simplement une condition sur les coordonnées de (a, b, c, d, e) pour que le vecteur appartienne à $\operatorname{Im}(f)$, il suffit de chercher à quelle condition le système $f(x, y, z, t) = (a, b, c, d, e)$ admet au moins une solution.
On rajoute donc un second membre au système linéaire et on réalise exactement les mêmes opérations que précédemment sur les lignes. Après calculs, on obtient,

$$\left(\begin{array}{cccc|l} 1 & -1 & -2 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2a + b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2}a + b - \frac{e}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a - b - c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a + b + d \end{array}\right)$$

Le système est compatible si et seulement s'il n'y a pas de pivot dans le second membre, c'est à dire pour $2a - b - c = 0$ et $-a + b + d = 0$.

$$\operatorname{Im}(f) = \left\{(a, b, c, d, e) \in \mathbf{R}^5,\ \text{tel que } 2a - b - c = 0 \text{ et } -a + b + d = 0\right\}$$

4 Rang d'une application linéaire

Dans cette partie, E et F désignent des espaces de dimension finie.

Définition 4.1 *(Rang d'une application linéaire)*

Le **rang** d'une application linéaire f est égal à la dimension de son image $\mathrm{Im}\,(f)$.

Propriété 4.2

Les définitions suivantes sont équivalentes :

1. Le **rang** d'une matrice est égal au rang de son application linéaire associée. Il ne dépend pas du choix de la base.
2. Le **rang** d'une matrice est égal à celui de ses vecteurs colonne.
3. Le **rang** d'une matrice est égal au nombre de pivots de sa forme échelonnée.

Dans le chapitre sur les matrices, nous n'avions donné que la troisième définition du rang, les deux premières définitions ont l'avantage de permettre des interprétations géométriques du rang, c'est-à-dire liée à la nature intrinsèque de l'application linéaire. On utilisera donc l'une des deux premières formulations dans les exercices théoriques et on gardera la troisième formulation pour les exercices concrets en petite dimension lorsque le calcul matriciel est accessible.

Remarque : La preuve de l'équivalence de ces trois formulation est placée ici, mais elle utilise un résultat postérieur. Ce choix a été fait pour simplifier l'apprentissage et permettre une présentation des résultats qui mette en parallèle la vision matricielle et la vision intrinsèque du rang.

Preuve

- $(1 \iff 3)$
  Les vecteurs colonne de la matrice sont les images par f des vecteurs d'une base de l'espace de départ (méthodede la page 8). Or une telle famille est génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$ (propriété 2.5). Donc le rang de ces vecteurs colonne est égal à la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$.
  Ceci permet de justifier, en outre, que le rang ne dépend pas des bases choisies pour exprimer la matrice.
- $(1, 2 \iff 3)$ *On utilise la propriété 4.5 qui sera vue plus loin.*
  Dans le chapitre sur les matrices, nous avions vu que la réalisation du pivot de Gauss sur les lignes était équivalente à la multiplication de la matrice à gauche par des matrices inversibles. Or une matrice inversible représente un isomorphisme (propriété 3.4), les opérations sur les lignes reviennent donc à composer l'application linéaire par un isomorphisme à gauche. Or la propriété 4.5 qui sera vue plus loin montre que la composition d'une application linéaire par un isomorphisme ne change pas le rang. Ainsi, la multiplication à gauche par une matrice inversible, ne modifie pas le rang de la matrice. La matrice *initiale* et sa matrice échelonnée ont donc le même rang.
  Le rang de la matrice étant égal au rang de la famille des vecteurs colonne, c'est exactement égal au nombre de pivots.

■

Remarque : Dans la suite de cette partie, nous mettons en vis-à-vis deux écritures possibles pour chaque théorème.

- Une écriture intrinsèque pour une application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$.
- Une écriture matricielle.

Ces écritures sont équivalentes.

Propriété 4.3

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$, alors $$\mathrm{rg}\, f \leqslant \min(n,p)$$	Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, alors $$\mathrm{rg}\, A \leqslant \min(n,p)$$

Preuve

Si $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ est une base de $\mathbf{K}^p$, alors $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p))$, donc l'image possède une famille génératrice à p éléments.
Donc $\mathrm{rg}\, f = \dim \mathrm{Im}\,(f) \leqslant p$
De plus $\mathrm{Im}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$, donc $\dim \mathrm{Im}\,(f) \leqslant \dim \mathbf{K}^n = n$ ■

Théorème 4.4 *(Rang et composition)*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^q)$, $$\mathrm{rg}\,(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}\, f, \mathrm{rg}\, g)$$	Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbf{K})$, $$\mathrm{rg}\,(BA) \leqslant \min(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B)$$

Preuve

$\mathrm{Im}\,(g \circ f) = (g \circ f)(\mathbf{K}^p) = g\,(\mathrm{Im}\, f)$
et d'après la propriété 4.3, $\mathrm{rg}\ (g \circ f) \leqslant \dim \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{rg}\,(f)$.
De plus, $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathbf{K}^n$, donc par croissance de l'image directe,
$\mathrm{Im}\ (g \circ f) = g\,(f(\mathbf{K}^p)) \subset g(\mathbf{K}^n) = \mathrm{Im}\,(g)$. Donc $\mathrm{rg}\ (g \circ f) \leqslant \dim \mathrm{Im}\,(g) = \mathrm{rg}\,(g)$ ■

Propriété 4.5 *(Invariance du rang par la composée avec un isomorphisme)*

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$, $\varphi_1 \in \mathrm{GL}(\mathbf{K}^p)$, et $\varphi_2 \in \mathrm{GL}(\mathbf{K}^n)$ Alors $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\,(f \circ \varphi_1) = \mathrm{rg}\,(\varphi_2 \circ f) = \mathrm{rg}\,(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1)$	Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, et $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$, Alors $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\ (AQ) = \mathrm{rg}\ (PA) = \mathrm{rg}\ (PAQ)$

Remarque : Les hypothèses de ce théorème sont trop fortes : il suffit d'avoir φ_1 surjective et φ_2 injective pour avoir l'égalité.

Explications

C'est cette propriété qui justifie la méthode du pivot pour déterminer le rang d'une matrice. Faire un pivot sur les lignes, c'est multiplier par des matrices inversibles à gauche. C'est-à-dire composer par un automorphisme. Cela ne change pas le rang.

Preuve

$\varphi_1(\mathbf{K}^p) = \mathbf{K}^p$ car l'application est bijective et en particulier surjective.
Donc $(f \circ \varphi)(\mathbf{K}^p) = f(\mathbf{K}^p)$, ainsi $\operatorname{rg}(f \circ \varphi) = \operatorname{rg} f$.
Et par bijectivité de φ_2, $\varphi_2(\operatorname{Im}(f))$ est isomorphe à $\operatorname{Im}(f)$ et en particulier les deux espaces ont la même dimension (il suffirait d'avoir φ_2 injective, car alors φ_2 serait bijective sur son image). Donc $\operatorname{rg}(\varphi_2 \circ f) = \operatorname{rg} f$. ■

Propriété 4.6

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$, alors	Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, alors
• f injective $\iff$ $\operatorname{rg} f = p$	
• f surjective $\iff$ $\operatorname{rg} f = n$	
• f bijective $\iff$ $\operatorname{rg} f = n = p$	• $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \iff \operatorname{rg} A = n = p$

En particulier que pour que deux espaces soient isomorphes, ils doivent nécessairement avoir la même dimension.

Preuve

Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ une base de $\mathbf{K}^p$.

- **preuve intrinsèque :** f injective si et seulement si elle est bijective sur son image.
  preuve équivalente qui utilise les bases :
  $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.
  f est injective si et seulement si elle est libre dans $\operatorname{Im} f$ (propriété 2.6).
  f est donc injective si et seulement si c'est une base de $\operatorname{Im} f$, c'est-à-dire si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = p$.
- f est un surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = \mathbf{K}^n$.
  si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim \mathbf{K}^n = n$ (car l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset \mathbf{K}^n$ est toujours vérifiée).
- Conséquence des deux points précédents. ■

Explications

Il faut se rappeler qu'**une application linéaire ne peut pas *dilater* l'espace** : elle ne peut pas augmenter la dimension : $\operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Im} f) \leqslant n$.
La dimension de l'image ne peut être plus grande que celle de l'espace de départ.
Le conséquence immédiate est que, si $n = \dim \mathbf{K}^n > \dim \mathbf{K}^p = p$, alors f ne peut pas être surjective, elle ne peut pas « remplir » $\mathbf{K}^n$ tout entier à partir d'un espace de dimension plus petite $\mathbf{K}^p$.
De même, si la dimension de l'espace d'arrivée est strictement plus petite que celle de l'espace de départ, cela veut dire que f doit perdre de l'information en chemin : elle ne peut pas être injective.

Corollaire 4.7

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$,

- $p > n \Rightarrow f$ n'est pas injective,
- $p < n \Rightarrow f$ n'est pas surjective.

Explications

Voici une image pour se souvenir de ce résultat.
Réaliser une injection, c'est injecter un espace dans un autre. Ceci n'est donc possible que si l'espace d'arrivée et « plus grand » que l'espace de départ qu'on lui « injecte dedans ». Formellement, la dimension de l'espace d'arrivée doit être plus grande que celle de l'espace de départ pour qu'il soit possible de réaliser un injection.
De même, réaliser une surjection, c'est « recouvrir » l'espace d'arrivée, par l'espace de départ. Il faut donc au contraire que l'espace de départ soit « plus grand » que l'espace d'arrivée pour pouvoir le recouvrir intégralement. Si la dimension de l'espace d'arrivée est plus grande que celle de l'espace de départ, alors il n'est pas possible de réaliser une surjection.

Corollaire 4.8

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$, alors

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective.}$$

Remarque : Cette propriété se généralise pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec $\dim E = \dim F$.

Explications

Dans le chapitre sur les espaces vectoriels, nous avions vu que si une famille est composée d'autant de vecteurs que la dimension de l'espace, alors il y a équivalence entre le fait que ce soit une base, qu'elle soit libre ou qu'elle soit génératrice.
Il s'agit du même théorème pour les applications linéaires. Ainsi, la bijectivité, l'injectivité et la surjectivité correspondent respectivement au fait que l'image d'une base est : une base, une famille libre ou une famille génératrice.

Retour aux matrices :
Dans le chapitre sur les matrices, nous avions admis qu'il suffit d'avoir une matrice inverse à droite ou à gauche pour montrer qu'une matrice est inversible. C'est une conséquence de ce corollaire. Plus précisément, nous avions formulé ainsi le théorème :

> Pour qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ soit inversible, il suffit qu'il existe un inverse à gauche, ou un inverse à droite. C'est-à-dire
>
> $$\begin{aligned} A \quad \text{inversible} &\iff (\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \text{ tel que } AB = I_n) \\ &\iff (\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \text{ tel que } BA = I_n) \end{aligned}$$

En quoi cela est-il une conséquence du théorème précédent ? Cela vient du fait qu'une matrice carrée A représente un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$ dans une certaine base.

S'il existe B telle que $AB = I_n$, on peut interpréter B comme la matrice d'une autre application $g \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$ telle que que $f \circ g = \mathrm{Id}$.
Ainsi $\mathbf{K}^n = \mathrm{Id}(\mathbf{K}^n) = f(g(\mathbf{K}^n)) \subset \mathrm{Im}\,(f)$, et l'autre inclusion étant toujours vraie, $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbf{K}^n$. Donc f est surjective.
Or f est un endomorphisme, et la surjectivité est équivalente à la bijectivité. Donc f est un isomorphisme de E. Ainsi $A \in \mathrm{GL}(E)$.
On montre de même que l'existence d'un inverse à gauche équivaut à l'injectivité de f et donc à la bijectivité.
Ce résultat qui est vrai en dimension finie (matrices) est faux en dimension infinie.

Exemple

$$f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (x+y, x-y, 2x-y) \end{cases}$$ est-elle surjective ?

Solution :

Sans aucun calcul, on sait que cette application n'est pas surjective car la dimension de l'espace d'arrivée est supérieure à la dimension de l'espace de départ : $\mathrm{rg}\, f \leqslant 2$.

Méthode *(Prouver que f est un isomorphisme)*

Pour montrer qu'une application linéaire entre deux espaces de dimension finie est un isomorphisme, on peut successivement :

1. Montrer que les deux espaces ont la même dimension.
2. Montrer que l'application est injective (noyau réduit à 0).

C'est souvent l'injectivité d'une application qui est la plus simple à démontrer (montrer que si $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$, alors $x = 0$).
Lorsque les espaces sont de même dimension, cela peut donc permettre de montrer la surjectivité (qui est en général plus dure à montrer directement).

5 Tableau récapitulatif

Vision intrinsèque	**Vision matricielle**
$x \in \mathbf{K}^p$	$X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$
$f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$	$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$
$f(x)$	AX
$\lambda.f + g$	$\lambda A + B$
$f \circ g$	AB
$f \in \mathrm{GL}\,(\mathbf{K}^n)$	$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$
f^{-1}	A^{-1}
$\mathrm{rg}\, f$	$\mathrm{rg}\, A$
$\mathrm{rg}\, f \leqslant \min(\dim \mathbf{K}^p, \dim \mathbf{K}^n)$	$\mathrm{rg}\, A \leqslant \min(p,n)$