Convexité

Fonctions convexes

Propriété 0.1

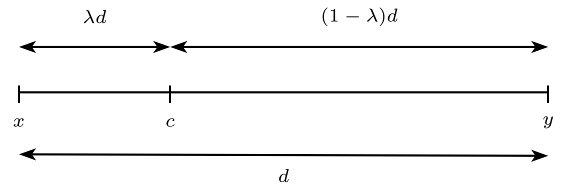
Pour deux réels $x \leqslant y$ et pour $\lambda \in [0,\, 1]$,

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in [x,\, y].$$

De plus, si on pose $f\ : \lambda \mapsto (1-\lambda)x + \lambda y$, alors f réalise une bijection continue et strictement croissante de $[0,\, 1]$ sur $[x,\, y]$ et de $]0,\, 1[$ sur $]x,\, y[$.

Explications

On considère un segment $[x,\, y]$, avec $x \leqslant y$ et $\lambda \in [0,\, 1]$. On note $c = (1-\lambda)x + \lambda y$.
Le point c décrit alors le segment $[x,\, y]$ lorsque λ varie de 0 à 1.
D'un point de vue physique, le point c correspond au barycentre (centre de gravité) des points x et y affectés respectivement des masses $(1-\lambda)$ et λ (on travaille avec une unité de masse égale à la somme des masses présentes en x et en y pour avoir $1-\lambda+\lambda = 1$).



$\star$ Ainsi, le point c sera d'autant plus proche de x que la masse affectée à x est importante par rapport à celle affectée à y, c'est-à-dire pour λ proche de 0.
$\star$ Quand λ s'approche de 1, la masse sur y devient largement prépondérante et c est proche de y.
$\star$ Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, on observe que x et y sont affectés des mêmes masses et que le barycente est exactement au milieu : $x = \frac{x+y}{2}$.
Dans le cas général, si on note $d = y - x$ la distance entre x et y, alors $c = (1-\lambda)x + \lambda y = x + \lambda(y-x) = x + \lambda d$.
On voit bien alors que λ désigne la proportion du segment entre x et c.
On remarque également que l'on peut obtenir l'intervalle ouvert en prenant la restriction à $]-1,\, 1[$.
Ce *paramétrage* est une bijection de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $[0,\, 1]$ sur $[x,\, y]$.
Il permet de décrire facilement n'importe quel segment et il est immédiatement généralisable en dimensions supérieures avec

$$\overrightarrow{OC} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}.$$

Définition 0.2 *(Fonction convexe)*

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f\ : I \to \mathbf{R}$.
f est **convexe** sur I si, et seulement si

$$\forall (x,\, y) \in I^2,\, \forall \lambda \in [0,\, 1],\, f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

⚠ La notion de convexité n'a de sens que sur un **intervalle** (sinon, il n'y a aucune raison que le point dont on recherche l'image soit dans I).

Explications

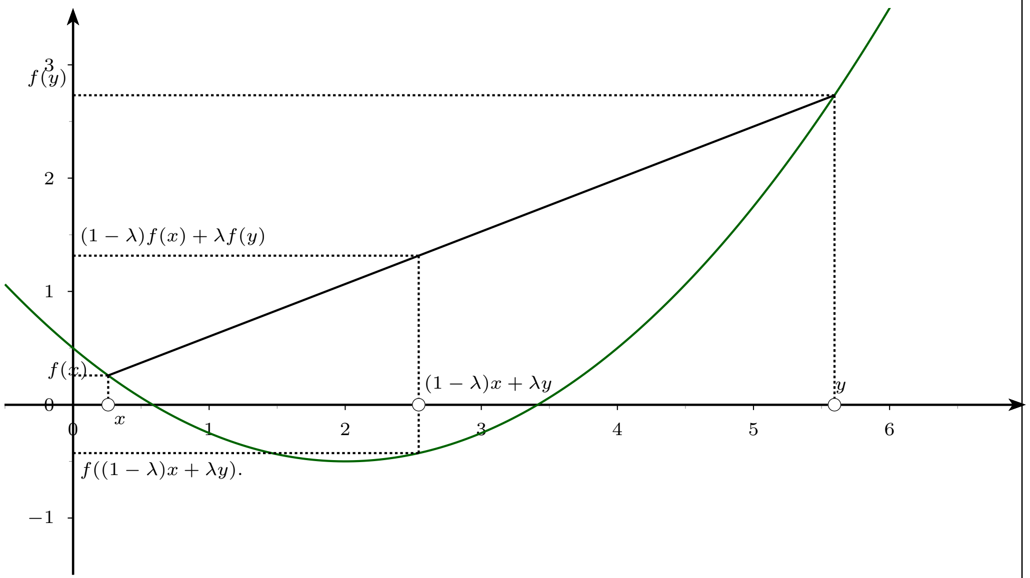
Géométriquement, une fonction est convexe, lorsqu'elle est sous ses cordes.
La corde à la courbe entre x et y est définie par l'ensembles des barycentres des points du plan $(x,\, f(x))$ et $(y,\, f(y))$ qui s'écrivent en coordonnées barycentriques sous la forme

$$\left(\, (1-\lambda)x + \lambda y \ ,\ (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)\,\right).$$

Le fait que la courbe de la fonctions soit sous cette corde se traduit alors simplement

$$f\left(\, (1-\lambda)x + \lambda y\,\right) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

C'est bien la définition d'une fonction convexe.



Définition 0.3

Une fonction f définie sur un intervalle I est **concave** sur I, si $-f$ est convexe sur I.

Exemple

$x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbf{R}$.
En effet, pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et $\lambda \in [0, 1]$,

$$((1-\lambda)x+\lambda y)^2 = (1-\lambda)^2x^2+\lambda^2y^2+2(1-\lambda)\lambda xy.$$

Or $2\,|xy| \leqslant x^2+y^2$, donc

$$((1-\lambda)x+\lambda y)^2 \leqslant \left((1-\lambda)^2+(1-\lambda)\lambda\right)x^2+\left(\lambda^2+(1-\lambda)\lambda\right)y^2 = (1-\lambda)\,x^2+\lambda y^2.$$

Donc la fonction est bien convexe.

Théorème 0.4 *(Inégalité de Jensen)*

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I et $n \geqslant 1$ un entier.
Pour tous points $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de I
et pour tous réels positifs $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k).$$

Pour $n = 2$, on retrouve la définition de la convexité en prenant $\lambda = \lambda_2$ et donc $\lambda_1 = 1-\lambda$.

Preuve

On prouve le résultat par récurrence sur n.
Initialisation : pour $n = 1$, le résultat est trivial (on a la même expression de part et d'autre de l'inégalité).
Hérédité : On suppose le résultat vrai à un rang $n \geqslant 1$ et on veut le montrer au rang $n+1$.
On considère donc $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ des points de I et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1})$ des réels positifs de somme 1.
Si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$, alors $\lambda_{n+1} = 1$ et on se ramène au cas de l'initialisation.
On suppose donc à présent qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$.
Ainsi, par positivité des λ_i, on sait que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \neq 0$ ce qui permet de poser :

$$x = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k, \quad \text{et} \quad y = x_n.$$

On note également $\mu = \lambda_{n+1}$ de sorte que $1-\mu = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k$.
⋆ Montrons que $x \in I$. Par positivité des λ_k, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \min_{i\in[\![1,\,n]\!]}(x_i) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \max_{i\in[\![1,\,n]\!]}(x_i).$$

En divisant par $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k$, on obtient donc $\min_{i\in[\![1,\,n]\!]}(x_i) \leqslant x \leqslant \max_{i\in[\![1,\,n]\!]}(x_i)$.
Or I est un intervalle, donc $x \in I$.
⋆ D'après la convexité de f sur I appliquée avec μ, on trouve donc

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right) = f\left((1-\mu)x+\mu y\right) \leqslant (1-\mu)f(x)+\mu f(y) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x)+\lambda_{n+1}f(x_{n+1}).$$

Or, en appliquant l'hypothèse de récurrence aux points $(x_1, \cdots, x_n)$ affectés des coefficients $\left(\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k}\lambda_1, \cdots \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k}\lambda_n\right)$ on trouve alors

$$f(x) \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k).$$

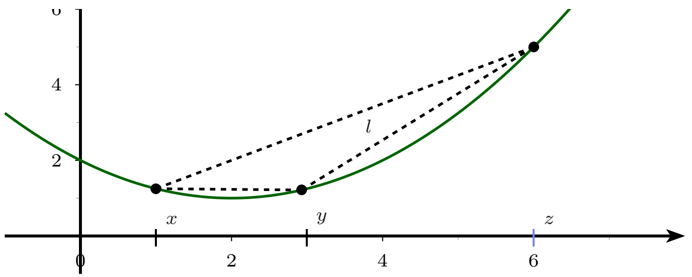
On conclut donc immédiatement sur la validité de l'hérédité. ■

Théorème 0.5 *(Croissance des pentes)*

Soit f définie sur un intervalle I.
f est convexe sur I si, et seulement si

$$\forall (x,\, y,\, z) \in I^3,\ x < y < z \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Une seule inégalité des pentes suffit pour avoir la réciproque.



Ce théorème est à apprendre avec son schéma où on observe bien les pentes des différentes cordes à la courbe, que l'on classe aisément par ordre croissant.
Cette propriété est souvent très efficace pour démontrer des résultats sur les fonctions convexes.

Preuve

Sens direct.
Soit f convexe sur I. Comme $y \in]x,\, z[$, il existe $\lambda \in]0,\, 1[$ tel que $y = (1-\lambda)x + \lambda z$.
On remarque alors que $y - x = \lambda\,(z-x)$. Par convexité de f, on peut écrire

$$f(y) = f\left((1-\lambda)x + \lambda z\right) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(z).$$

Ainsi, on obtient $f(y) - f(x) \leqslant \lambda(f(z) - f(x))$. Or $z - x \neq 0$, donc $\lambda = \frac{y-x}{z-x}$ ce qui donne $f(y) - f(x) \leqslant (y-x)\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$.
De plus $y - x > 0$, donc

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

On fait de même avec $1-\lambda$, ce qui donne $f(y) - f(z) \leqslant (1-\lambda)\left(f(x) - f(z)\right) = \frac{y-z}{x-z}\left(f(x) - f(z)\right)$.
En divisant alors par $y - z < 0$, on obtient

$$\frac{f(z)-f(y)}{z-y} = \frac{f(y)-f(z)}{y-z} \geqslant \frac{f(x)-f(z)}{x-z} = \frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

Ce qui donne la deuxième inégalité.
Réciproque : supposons à présent que la fonction f vérifie une des inégalités des pentes sur I.
On pose alors $x < z$ deux points de I et $\lambda \in [0,\, 1]$. On note $y = (1-\lambda)x + \lambda z \in [x,\, z]$.
Si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, une simple vérification montre que $f\,(y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(z)$ et qu'on a même l'égalité.
Supposons à présent que $\lambda \in]0,\, 1[$,

- Si f vérifie la première inégalité, alors $y \in]x,\, z[$ et on peut appliquer l'inégalité des pentes.
  Ainsi
  $$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$
  Et par produit avec $y - x > 0$, on retrouve $f(y) \leqslant f(x) + \frac{y-x}{z-x}\left(f(z) - f(x)\right)$.
  Or $\frac{y-x}{z-x} = \lambda$, donc $f(y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(z)$ ce qui prouve la convexité de f.
- De même, si f vérifie la deuxième inégalité, alors
  $$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$
  Et par produit avec $z - x > 0$, on trouve $-f(y) \geqslant -f(z) + \frac{z-y}{z-x}\left(f(z) - f(x)\right)$.
  Puis par produit par $-1 < 0$, on obtient $f(y) \leqslant \left(1 - \frac{z-y}{z-x}\right) + \frac{z-y}{z-x}f(x)$.
  Or $\frac{z-y}{z-x} = 1 - \lambda$, donc $f(y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(z)$ ce qui prouve la convexité de f.
- Enfin, si f vérifie l'inégalité entre les deux extrêmes, alors
  $$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$
  Et par produit avec $y - x > 0$, on trouve $f(y) + \frac{y-x}{z-y}f(y) \geqslant f(x) + \frac{y-x}{z-y}f(z)$.
  C'est-à-dire
  $$\frac{z-x}{z-y}f(y) \leqslant f(x) + \frac{y-x}{z-y}f(z).$$
  Ce qui donne par produit avec $\frac{z-y}{z-x} > 0$,
  $$f(y) \leqslant \frac{z-y}{z-x}f(x) - \frac{y-x}{z-x}f(z).$$
  Or $\frac{z-y}{z-x} = 1 - \lambda$, donc $f(y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(z)$ ce qui prouve la convexité de f.

■

Propriété 0.6

Soit f une fonction convexe sur I. Soient x et y deux points de I avec $x < y$.
La courbe de f sur $[x,\, y]$ est sous la corde $[(x,\, f(x),\, (y,\, f(y)]$ et au dessus en dehors de $[x,\, y]$.
Autrement dit, La courbe de f est en dessous de ses sécantes entre les points de séquence et au dessus en dehors.

Preuve

Tout point c du segment $[x, y]$ peut s'écrire sous la forme $c = (1-\lambda)x + \lambda y$ avec $\lambda \in [0,\, 1]$.
Par convexité de f, on en déduit donc que $f(c) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.
$f(c)$ désigne l'ordonnée au point c sur la courbe de f et $(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ désigne l'ordonnée au point c sur la corde.
Ceci prouve bien que la courbe de f est au dessus de sa corde sur $[x,\, y]$.
Pour $z > y$, l'inégalité des pentes donne $\frac{f(z)-f(y)}{z-y} \geqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.
Et par positivité de $z - y$

$$\underbrace{f(z)}_{\text{sur la courbe}} \geqslant \underbrace{f(y) + (z-y)\frac{f(y)-f(x)}{y-x}}_{\text{sur la corde}}.$$

On obtient la même chose pour un point avant x par un raisonnement similaire (exercice). ■

Théorème 0.7

Si f est dérivable sur un intervalle I et à valeurs réelles.

f est convexe sur I si, et seulement si f' est croissante sur I.

Corollaire 0.8

Si f est deux fois dérivable sur un intervalle I et à valeurs réelles.

f est convexe sur I si, et seulement si f'' est positive sur I.

Preuve

Si f est convexe sur I, on note $x < y$ deux points de I. Pour tout point $x + h \in]x, y[$, l'inégalité des pentes donne

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Par passage de l'inégalité à la limite quand $h \to 0$, on trouve donc

$$f'(x) \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Par ailleurs, pour $h < 0$ tel que $y + h \in]x, y[$, l'inégalité des pentes donne

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(y) - f(y+h)}{-h} = \frac{f(y+h) - f(y)}{h}.$$

À nouveau, par passage à la limite, on trouve

$$f'(x) \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'(y).$$

Ce qui prouve bien la croissance de f'.
Réciproquement, si f est croissante sur I, alors pour $x < y < z$, d'après l'égalité des accroissements finis, il existe c_1 et c_2 tels que $x < c_1 < y < c_2 < y$ et

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c_1) \leqslant f'(c_2) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Ce qui prouve bien que f est convexe. ■

Théorème 0.9

Si f est convexe sur I, $a \in I$ et f dérivable en a.
Alors f est au dessus de sa tangente en a.

Preuve

Cela revient à montrer que pour tout $x \in I$,

$$f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x - a).$$

Pour $x > a$, on pose $a + h \in]a, x[$ et par convexité, on obtient

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leqslant \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

En passant l'inégalité à la limite pour $h \to 0$, on obtient $f'(a) \leqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ce qui se transforme en l'inégalité cherchée.
On fait de même pour $x < a$.
(Pour $x = a$, c'est trivial). ■