Fonctions de deux variables

Dans les situations concrètes, il est rare qu'un résultat ne dépende que d'un seul paramètre. Même si nous utilisons cette simplification couramment, on ne peut pas toujours s'y réduire.
D'un point de vue mathématique, la dépendance à plusieurs paramètres revient à définir une fonction de plusieurs variables. Dans ce chapitre, pour simplifier, nous nous limiterons à deux paramètres (variables) et nous supposerons que cette fonction est à valeurs réelles.

1 Représentation des fonctions de deux variables

A Définition

Exemple

On peut écrire la fonction « aire du rectangle » comme une fonction qui dépend du grand et du petit côté

$$A : (x, y) \mapsto xy.$$

La norme euclidienne dans le plan est une fonction de deux variables :

$$\|x, y\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Définition 1.1 *(Fonction réelle de deux variables réelles)*

Une fonction réelle de deux variables réelles est une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbf{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.

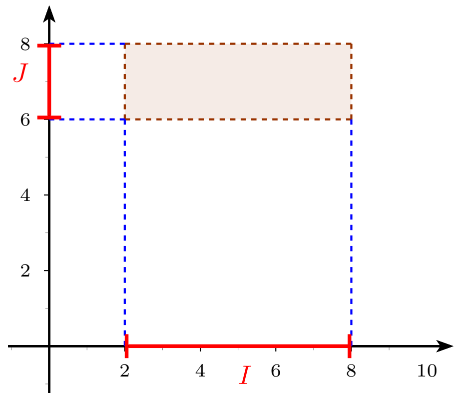
Autre définition équivalente :
Pour $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^2$, on dit que f est une fonction de 2 variables réelles, si à tout couple $(x, y) \in \mathcal{D}$, elle associe un unique réel $z = f(x, y)$.
z est appelé l'image de (x, y) par f.

Le domaine de définition peut être très compliqué. En général, nous travaillerons sur des *pavés* ouverts.

Définition 1.2 *(Pavé ouvert)*

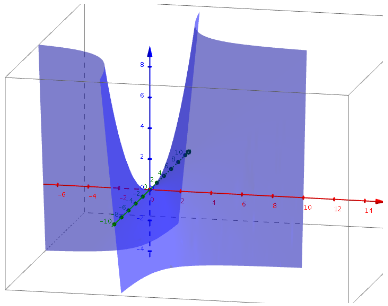
Un **pavé** ouvert de $\mathbf{R}^2$ est une partie $I \times J$ de $\mathbf{R}^2$ où I et J sont des intervalles ouverts de $\mathbf{R}$.

Un pavé est représenté par un rectangle dans le plan (bords exclus).

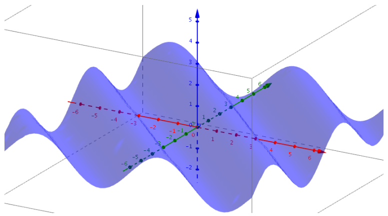


B Représentation graphique

Les fonctions à une variable sont représentées par une courbe dans le plan : l'axe des abscisses pour la variable, et l'axe des ordonnées pour l'image $f(x)$.
Dans le cas d'une fonction réelle à deux variables, il faudra 2 axes pour les variables et un axe pour les ordonnées. La fonction est donc représentée par une surface dans un espace de dimension 3.



Fonction $A(x,y) = xy$.



Fonction $f(x,y) = \sin(x+y)$.

Surfaces de fonctions de deux variables.

De même qu'une fonction d'une variable peut-être interprétée comme la déformation de l'axe des abscisses en la courbe représentative, ainsi, une fonction de deux variables peut être vue comme la déformation du plan (O,x,y) en la surface représentative.

C Applications partielles

Définition 1.3 *(Applications partielles)*

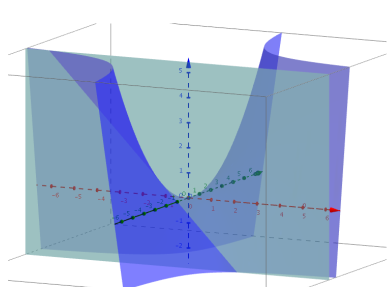
Soit f une fonction de deux variables définie sur le pavé $I \times J$ par

$$f\ :\ (x,y) \mapsto f(x,y).$$

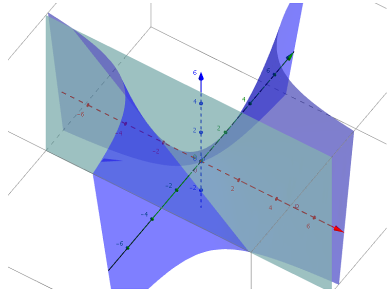
Les **applications partielles** de f en (x_0, y_0) sont définies par

$$f\,(\cdot\,,\,y_0)\ :\ x \mapsto f(x,y_0) \qquad \text{et} \qquad f\,(x_0\,,\,\cdot)\ :\ y \mapsto f(x_0,y).$$

Cela revient à suivre la surface à partir de (x_0, y_0) en longeant un chemin parallèle à l'axe des x ou à l'axe des ordonnées. Ce ne sont que des informations partielles et elles ne nous disent rien de ce qui se passe en dehors de ces deux axes.

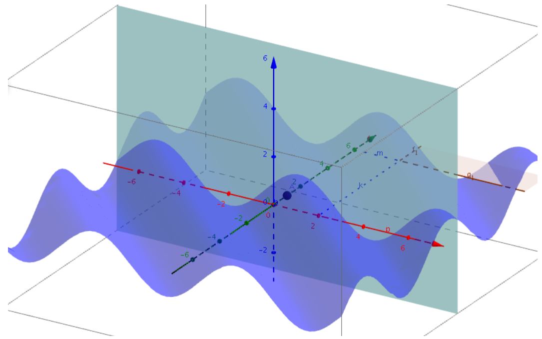


Vue avec l'angle par défaut.



Vue d'un autre angle.

Fonction $A(x,y) = xy$ intersectée avec le plan $y = 2$.



Fonction $f(x,y) = \sin(x+y)$ intersectée avec le plan $y = 2$.

La courbe de l'application partielle $f(\cdot, y_0)$ est donnée par l'intersection de la surface de la fonction avec le plan $y = y_0$.
Avec la fonction d'aire du rectangle $A\ :\ (x,y) \mapsto xy$. Si on fixe $y = y_0$ et que l'on fait bouger x, cela revient à l'étude de la fonction $A_{y_0}\ :\ x \mapsto xy_0$. On observe que c'est simplement une fonction linéaire. On voit sur la figure correspondante que l'intersection de la courbe avec le plan $y = y_0$ est bien une droite.

Exemple

Les applications partielle ne donnent que des indications *partielles* sur la courbe et peuvent être trompeuses.
Par exemple, si on considère la fonction « aire du rectangle » : $A\ :\ (x,y) \mapsto xy$ et que l'on souhaite son comportement à proximité de l'origine $(0,0)$, il est tentant d'étudier les applications partielle en ce point :

$$A\,(\cdot\,,0) : x \mapsto A(x,0) \qquad \text{et} \qquad A\,(0\,,\,\cdot) : y \mapsto A(0,y).$$

Or $A(\cdot\,,\,0)$ est identiquement nulle sur $\mathbf{R}$, de même pour l'application partielle $A\,(0\,,\,\cdot)$.
Pourtant, si on s'éloigne du point $(0,0)$ en ne suivant pas une de ces applications partielles, alors, l'application est non nulle. Même au voisinage de $(0,0)$:
Par exemple $A(x,x) = x^2 \neq 0$ dès que $x \neq 0$.

2 Calcul différentiel à l'ordre 1

A Régularité des fonctions

Précédemment, on avait interprété une fonction réelle d'une variable comme la déformation de l'axe des abscisses en la courbe de la fonction. La fonction est continue lorsque cette déformation se fait sans déchirure. La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ lorsqu'elle n'est pas pliée.
De même pour les fonctions de deux variables : une fonction est continue lorsque la surface n'est pas déchirée. Le caractère $\mathcal{C}^1$ correspond à l'absence de pliures.
La définition formelle de la continuité en un point (x_0, y_0) est similaire à celle des fonctions d'une seule variable que nous avons déjà vu. La seule différence est, qu'au lieu d'avoir $|x - x_0| \leqslant \eta$, on dit que la distance entre (x, y) et (x_0, y_0) doit être inférieure à η.

Définition 2.1 *(Fonction continue)*

Soit f, une fonction définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^2$ et à valeurs réelles.
Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$,
f est **continue** en (x_0, y_0) si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in \mathcal{D},\ \|x - x_0, y - y_0\| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leqslant \epsilon.$$

En général, on prendra la norme euclidienne du plan

$$\|x - x_0, y - y_0\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

On remarque que cette formulation généralise simplement celle déjà vue : pour une fonction d'une seule variable, on prend la norme définie par la valeur absolue.

⚠ Ce n'est pas parce que les applications partielles sont continues que l'application est continue.
Par exemple, on pourra s'intéresser à $(x, y) \mapsto \lfloor xy \rfloor$ en $(0, 0)$.

B Notions sur les dérivées partielles

Calculer une dérivée partielle, c'est fixer la valeur d'une variable et ne faire bouger que l'autre : on se ramène à une fonction d'une variable avec un paramètre fixé : l'application partielle correspondante.

Définition 2.2 *(Dérivée partielle)*

Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ définie sur un pavé $I \times J$ de $\mathbf{R}^2$.
Pour $(x, y) \in I \times J$, on définit les **dérivées partielles** de f (lorsqu'elles existent) par :

- La dérivée partielle de f par rapport à x en (x, y) est la dérivée de l'application partielle $f_y = f(\cdot, y)$.
  Elle se note
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_y'(x, y).$$
- La dérivée partielle de f par rapport à y en (x, y) est la dérivée de l'application partielle $f_x = f(x, \cdot)$.
  Elle se note
  $$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_x'(x, y).$$

Remarque : Les dérivées partielles sont des fonctions réelles de deux variables.

Exemple

La dérivée de l'application partielle $A_y = A(\cdot, y)$ par rapport à x se note alors

$$\frac{\partial A}{\partial x}(x, y) = A_y'(x) = y.$$

Cela veut dire qu'à y fixé, la fonction a une pente constante, cette pente dépend de y. Plus on éloigne le plan de de l'origine, plus la pente est importante.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par $\forall (r, \theta) \in \mathbf{R}^2,\ f(r, \theta) = r \cos \theta$.
Étudier la dérivabilité des fonctions partielles et calculer les dérivées partielles si elles existent.
Solution :

Exemple

Dérivée partielle de la norme euclidienne par rapport à une variable.
Solution :

On peut généraliser cela à davantage de variables, mais la visualisation est plus délicate.

Définition 2.3 *(Fonction de classe $\mathcal{C}^1$)*

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I\times J$ si f admet des dérivées partielles en tout point de $I\times J$ et si ces dérivées partielles sont continues (fonctions de deux variables). On note alors $f\in\mathcal{C}^1(I\times J,\mathbf{R})$.

Propriété 2.4

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue.

Preuve

Admis. ■

Exemple

Une application polynomiale de deux variables est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.

C Propriétés des applications $\mathcal{C}^1$ et opérations sur les dérivées partielles

Les opérations sur les dérivées des fonctions d'une variable se généralisent aux fonctions de deux variables.

Propriété 2.5

1. $\mathcal{C}^1(I\times J)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Les dérivées partielles sont linéaires.
$$\forall(f,g)\in\left(\mathcal{C}^1(I)\right),\ \forall\lambda\in\mathbf{R},\qquad f+\lambda g\in\mathbf{C}^1(I\times J)$$
avec
$$\frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}\qquad\text{et}\qquad\frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}.$$
2. $\mathcal{C}^1(I\times J)$ est stable par produit
$$\forall(f,g)\in\left(\mathcal{C}^1(I\times J)\right),\qquad f\times g\in\mathbf{C}^1(I\times J)$$
avec
$$\frac{\partial(f\times g)}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}\times g+f\times\frac{\partial g}{\partial x}\qquad\text{et}\qquad\frac{\partial(f\times g)}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}\times g+f\times\frac{\partial g}{\partial y}.$$
3. Si $(f,g)\in\left(\mathcal{C}^1(I\times J)\right)$, telle que g ne s'annule pas, alors $\dfrac{f}{g}\in\mathcal{C}^1(I\times J)$ et
$$\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x}=\frac{1}{g^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\times g-f\times\frac{\partial g}{\partial x}\right).$$

Propriété 2.6 *(Dérivée d'une composée)*

Soient $f\in\mathcal{C}^1(I\times J)$, $\varphi\in\mathcal{C}^1(]a,b[,I)$ et $\psi\in\mathcal{C}^1(]a,b[,J)$.
On considère l'application F d'une seule variable
$$F:\begin{cases}]a,b[&\to\mathbf{R}\\ t&\mapsto f(\varphi(t),\psi(t))\end{cases}\qquad\in\mathcal{C}^1(]a,b[,\mathbf{R}).$$
F est alors de classe $\mathcal{C}^1\,(]a,b[)$ et
$$\forall t\in]a,b[,\qquad F'(t)=\varphi'(t)\frac{\partial f\,(\varphi(t),\psi(t))}{\partial x}+\psi'(t)\frac{\partial f\,(\varphi(t),\psi(t))}{\partial y}.$$

D Approximation locale

Théorème 2.7 *(Développement limité à l'ordre 1)*

Soit $f\in\mathcal{C}^1(I\times J,\mathbf{R})$, et $(x_0,y_0)\in I\times J$.
Le **développement limité** à l'ordre 1 de f au voisinage de (x_0,y_0) est donné par
$$\begin{aligned}f(x,y)\quad&=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\times(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\times(y-y_0)\\&\quad+\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{o}(x-x_0,y-y_0).\end{aligned}$$

Sans entrer dans les détails, $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{o}(x-x_0,y-y_0)$ désigne une fonction qui est négligeable devant $\max\left(|x-x_0|,|y-y_0|\right)$ lorsque $x\to x_0$ et $y\to y_0$.

Explications

On peut l'interpréter en disant qu'à proximité de (x_0,y_0) la surface est proche de son plan tangent engendré par deux vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$.
Le plan tangent est donc le plan qui passe par $f(x_0,y_0)$ et orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix}-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\\-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\\1\end{pmatrix}$

E Optimisation

Théorème 2.8 *(Maximum d'une fonction de plusieurs variables)*

Soit $f\,:\,(x,y)\mapsto f(x,y)$ une fonction de deux variables définie sur le pavé *ouvert* $I\times J$.

Si f admet un extremum **local** en (x_0,y_0), alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}f(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$.

⚠ La réciproque est fausse en général.

Définition 2.9 *(Lignes de niveau)*

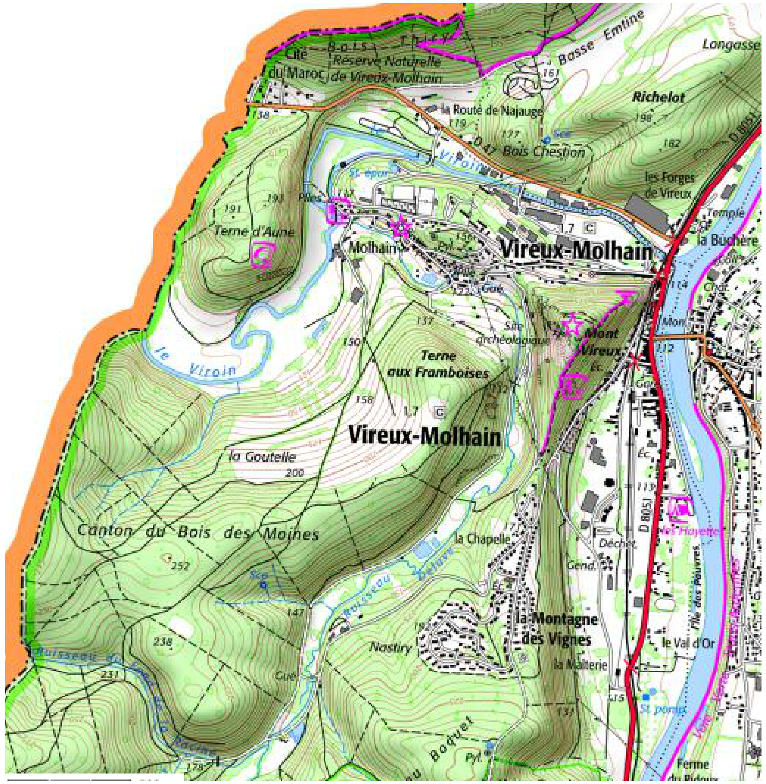
Soit $f\,:\,(x,y)\mapsto f(x,y)$ une fonction de deux variables définie sur le pavé $I\times J$.
Une ligne de niveau, pour $k\in\mathbf{R}$ **fixé**, est

$$\mathcal{C}_k=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ \text{tel que } f(x,y)=k\right\}.$$

Ce sont l'ensemble des antécédents de k par f. En général, ces lignes de niveau sont des courbes du plan, mais elles peuvent aussi comporter des points isolés (sommets...) ou des surfaces (plateaux) par exemple.

Explications

On appelle ces objets des courbes de niveau en référence à la cartographie. Si on interprète la surface de la fonction comme un relief en topologie, alors les lignes de niveau correspondent aux points de même altitude (représentés par des lignes orange sur les cartes IGN).



Lorsque l'on se situe sur un point particulier, on peut se demander dans quelle direction est la pente la plus forte. Cela est utile en particulier si on veut rejoindre le plus rapidement possible le pied de la vallée ou un sommet (minimum ou maximum) ou un point d'une autre altitude (recherche du zéro d'une fonction par la méthode de Newton).
Pour cela on utilise le gradient.

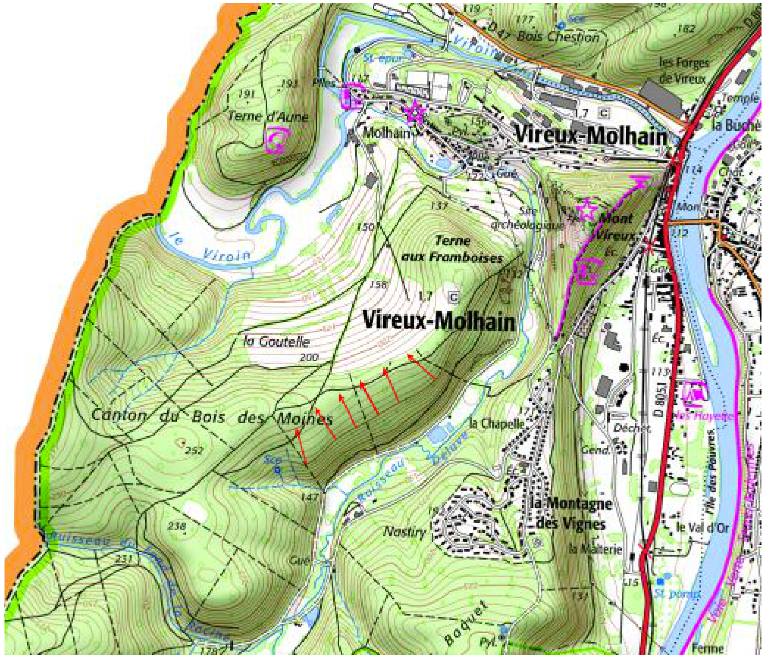
Définition 2.10 *(Gradient)*

Soit $f\,:\,(x,y)\mapsto f(x,y)$ une fonction de deux variables définie sur le pavé $I\times J$ et de classe $\mathcal{C}^1$ en (x_0,y_0).
Le **gradient** de f en x_0,y_0 est donné par

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,f\,(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}.$$

Explications

Le gradient est un vecteur du plan, il indique la direction de plus forte pente. Si on trace la ligne de niveau dans le plan, le gradient lui est orthogonal. La longueur du vecteur gradient sera d'autant plus forte que le vecteur sera long (grande norme) : cela indique la plus ou moins grande pente.



Quelques gradients tracés en rouge.

Preuve

$$f(x,y)-f(x_0,y_0) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\times(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\times(y-y_0) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f\ (x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)$$

Où le point indique le produit scalaire.
Ainsi, si $(x-x_0, y-y_0)$ est orthogonal à $\overrightarrow{\text{grad}}\, f\ (x_0,y_0)$, alors f ne varie pas (le produit scalaire est nul) et on suit une ligne de niveau.
A contrario, si $(x-x_0, y-y_0)$ est parallèle $\overrightarrow{\text{grad}}\, f\ (x_0,y_0)$, alors f varie le plus fortement.
$\overrightarrow{\text{grad}}\, f\ (x_0,y_0)$ désigne la plus forte pente. ■

3 Calcul différentiel d'ordre supérieur

A Dérivées partielles

Comme les dérivées partielles sont elles-mêmes des fonctions de deux variables sur $I\times J$, on peut à nouveau les dériver suivant x et y.

Définition 3.1 *(Dérivées secondes)*

Soit $f : (x,y)\mapsto f(x,y)$ une fonction de deux variables définie sur le pavé $I\times J$ et de classe $\mathcal{C}^1$ en (x_0,y_0),
On définit, lorsqu'elles existent, les **dérivées partielles d'ordre** 2 en (x_0,y_0) par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0)$$

On définit de même les dérivées d'ordre supérieur.

Définition 3.2 *(Fonctions de classes $\mathcal{C}^k$ sur un pavé ouvert)*

Une fonction f définie sur le pavé ouvert $I\times J$, est de classe $\mathcal{C}^k(I\times J)$ lorsque ces dérivées partielles (jusqu'à l'ordre k) existent et sont continues.
Une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty(I\times J)$ si elle est de classe $\mathcal{C}^k(I\times J)$ pour tout $k\in\mathbf{N}$.

B Théorème de Schwarz

Théorème 3.3 *(Théorème de Schwarz)*

Si $f\in\mathcal{C}^2(I\times J,\mathbf{R})$, alors ses dérivées partielles croisées sont égales

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

Ceci veut dire que ce n'est pas forcément le cas si $f\notin\mathcal{C}^2(I\times J)$, même lorsque les dérivées partielles existent.

Exemple

$f(x,y) = y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right)$ si $y\neq 0$, 0 sinon.

Propriété 3.4 *(Généralisation à l'ordre k)*

Si $f\in\mathcal{C}^k(I\times J)$, l'ordre des dérivations est sans importance (jusqu'à la dérivée k-ième).