Analyse asymptotique

« Toute vertu est fondée sur la mesure. »
Sénèque

1 Introduction

Commençons donc par voir comment les chapitres précédents sur la continuité et la dérivabilité peuvent être interprétés comme des outils d'approximation :

- Dire qu'une fonction est continue en un point x_0, c'est signifier qu'il n'existe pas de « *décrochement* » de la courbe en ce point : lorsque x s'approche de x_0, $f(x)$ s'approche infiniment de $f(x_0)$.

  C'est ce que nous avions écrit sous la forme

  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

  Ainsi, $f(x_0)$ constitue une bonne approximation de $f(x)$ au voisinage de x_0. On parle d'une approximation à l'ordre 0, parce que cela revient à approximer la courbe par une droite horizontale : une constante. C'est-à-dire une fonction polynomiale de degré au plus 0.

- La dérivabilité offre une information supplémentaire : la vitesse à laquelle $f(x)$ s'approche de $f(x_0)$. C'est ce que nous avons traduit par la notion de « pente ». Le nombre dérivé permet de quantifier cette vitesse.

  Graphiquement, la courbe de f est approximée par sa tangente : une droite affine. C'est une approximation à l'ordre 1 car on approche la courbe par celle d'une fonction polynomiale de degré au plus 1.

Dans ce chapitre, nous allons prolonger ce travail en augmentant le degré de la fonction polynomiale.
En effet, les polynômes sont des outils très simples à manipuler (si, si ...) et ils permettent donc d'avoir facilement une idée de la forme de la courbe au voisinage du point x_0.

Par exemple, supposons que nous voulions évaluer le prix d'une livraison. On sait que le prix dépend du poids, mais en suivant une loi qui ne nous est pas connue.

1. Si la semaine dernière je me suis fait livrer 10 kg pour 25 € et que cette semaine je dois me faire livrer $9,8$ kg, alors je peux estimer le prix de la livraison à environ 25 € également car les quantités sont proches.
   En réalisant cette approximation, je fait l'hypothèse que le prix est une fonction continue du poids sur l'intervalle de poids considéré. Mais ce n'est pas toujours le cas : si on prend en compte les effets de seuil pour les livraisons alors ajouter 100 g de produit peut provoquer soudainement un surcoût important car il faut changer de mode de livraison.

2. Si ma livraison de $9,8$ kg m'a coûté 24 €, alors je peux estimer la variation du prix en fonction du poids au voisinage de 10 kg. C'est ce qui correspond à la dérivée. En terme financier, on parle de prix marginal :

   $$\tau_{10} = \frac{25 - 24}{10 - 9,8} = 5 \text{ €/kg}.$$

Cette nouvelle information me donne plus de précision : si désormais, je dois me faire livrer $10,1$ kg, alors je peux estimer le prix à $25 + 0,1 \times 5 = 25,5$ € : les 100 g supplémentaires ont été estimés à 5 €/kg.
La connaissance du prix marginal me permet d'obtenir une meilleure approximation du prix.

3. On peut continuer aux ordres supérieurs : est-ce que lorsque je m'éloigne de 10 kg, le prix marginal diminue ou augmente ? de combien ?
Et ainsi de suite...

2 Résultat fondamental

Vocabulaire : Dans ce chapitre, on appelle *vrai* intervalle, un intervalle qui contient au moins deux points (donc une infinité).
Cette exigence vient du fait que nous avons besoin de nous approcher du point pour pouvoir parler d'approximation.

⚠ Vous êtes invité à réviser les notions d'équivalence, de négligeabilité et de domination dans les chapitres précédents.
Ce sera notre outils pour ce chapitre.

Commençons par un premier théorème qui sera fondamental pour traiter les développements limités :

Théorème 2.1

Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^2$, avec $n \geqslant p$.

$$\underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right) = (x-x_0)^p \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n-p}\right).$$

En particulier,

$$\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) = x^p \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n-p}\right).$$

On peut « sortir » ou « faire entrer » les puissances de x dans le « o ».

De même pour la domination.

Preuve

On a vu que si $f(x) = o_{x\to x_0}(g(x))$, alors pour toute fonction h qui ne s'annule pas sur un voisinage de x_0 (privé de x_0) alors $h(x)f(x) = o_{x\to x_0}(h(x)g(x))$.
Ce théorème en est un cas particulier.
Si besoin, on peut le redémontrer sans efforts : si $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right)$ alors montrons que $\frac{f(x)}{(x-x_0)^p} = o\left((x-x_0)^{n-p}\right)$.

Ceci est une évidence, car $\dfrac{\frac{f(x)}{(x-x_0)^p}}{(x-x_0)^{n-p}} = \dfrac{f(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$. ■

3 Développements limités

Commençons par de petits rappels à l'ordre 1 pour ceux qui n'auraient pas eu le courage d'ouvrir le chapitre de dérivabilité, avant de traiter le cas général.

A Ordre 1

Théorème 3.1 *(Caractérisation de la dérivabilité)*

Soit f définie sur I, et $x_0 \in I$,

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ si, et seulement si}$$
$$\exists \lambda \in \mathbf{R} \text{ tel que } f(x) = f(x_0) + \lambda(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(x-x_0).$$

Dans ce cas, $\lambda = f'(x_0)$.

Ici, on travaille avec une égalité et pas seulement un équivalent : cela permet d'avoir cette relation[1] même si $\lambda = 0$.

Corollaire 3.2 *(Approximation affine)*

Si $f : I \to \mathbf{R}$ est dérivable en x_0 telle que $\boxed{f'(x_0) \neq 0}$ alors $\forall x \in I$,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(x-x_0).$$

Donc

$$f(x) - f(x_0) \underset{x\to x_0}{\sim} f'(x_0)(x-x_0).$$

Preuve

La différence est négligeable devant $f'(x_0)(x-x_0)$. ■

⚠ En général, l'équivalent est **faux** si $f'(x_0) = 0$.

⚠ $f(x) - f(x_0) \sim_{x_0} f'(x_0)(x-x_0) \quad \not\Longleftrightarrow \quad f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.
La deuxième relation n'a pas beaucoup de sens... par exemple :
$\cos(x) - 1 \sim_0 \frac{x^2}{2}$, mais si on écrit $\cos(x) \sim_0 1 + \frac{x^2}{2}$ le deuxième terme est négligeable devant 1 et n'apporte donc aucune information. Il peut être remplacé par n'importe quel autre terme négligeable devant 1.

Explications *(Intérêt des développements limités face au équivalents)*
Les développements limités avec « o » sont des égalités : ils sont valables pour tout x et pas seulement à la limite. On peut sommer des égalités, les composer avec d'autres fonctions...

1. Au fait, pourquoi est-il important avec l'équivalent d'imposer $\lambda \neq 0$?

On peut sommer les développements limités.
On peut composer les développements limités.

Ceci s'explique par une différence fondamentale : pour les équivalents, on ne parle que d'une limite du quotient, alors que pour les développements limités, le « o » donne un ordre de grandeur sur la précision du calcul.

Nous l'avons vu, le petit « o » désigne un quotient qui tend vers 0, (ou plus simplement, une fonction de limite nulle). D'une certaine manière, il sert à désigner l'écart par rapport à l'égalité.
Comme vous le faites déjà en physique, on peut sommer des termes erronés, à condition de connaître leur degré de précision. La précision que l'on pourra accorder au résultat, dépendra de celle des objets et des calculs nécessaires pour y arriver.

Les « o » servent à donner le niveau de précision de l'égalité.

Il en sort une conséquence remarquable :

⚠ Si $f_1(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x))$ et $f_2(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x))$, alors en général $f_1(x) \neq f_2(x)$ (même en x_0).

En effet, les petits « o » sont différents dans les deux égalités. Le petit « o » désigne *une* fonction qui tend vers 0, mais il existe une infinité de façons de tendre vers 0 et rien ne dit a priori que deux petits « o » désignent la même.
En particulier, on a l'égalité surprenante :

$$\underset{x \to x_0}{o}(f(x)) - \underset{x \to x_0}{o}(f(x)) = \underset{x \to x_0}{o}(f(x))$$

Ici, il faut voir que derrière les trois notations « o », se cachent des fonctions différentes (qui tendent vers 0). La différences de deux petites erreurs, reste une erreur du même ordre de grandeur a priori.

B Cas général

Exemple *(en guise d'image...)*
Imaginons que nous voulions une approximation de π. On peut définir différents degrés de précision en fonction du nombre de décimales que nous fournissons. Si on adopte une troncature, alors on pourrait dire que

- l'approximation de π à l'ordre 0 est 3,
- l'approximation de π à l'ordre 1 est $3,1$,
- l'approximation de π à l'ordre 2 est $3,14$,
- ...

Le passage à une approximation à l'ordre supérieur ne remet jamais en cause les valeurs données à l'ordre précédent, mais ajoutent une précision supplémentaire.
Ainsi, l'approximation à l'ordre 2, m'indique que $\pi \in [3,14\,; 3,15[$, et l'ordre supérieur me permettra de diviser l'incertitude par 10.
À l'ordre n, l'incertitude est de 10^{-n} maximum.
Nous allons raisonner de façon similaire avec les fonctions[2].
De la même façon, le développement à l'ordre n ne modifiera aucun des coefficients trouvés au ordres précédents, mais leur ajoutera une précision supplémentaire. Le terme d'erreur sera alors de l'ordre de $(x - x_0)^n$ (infiniment petit quand $x \to x_0$).

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ avec I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$.

Définition 3.3 *(Développement limité d'ordre n)*

f admet un **développement limité** d'ordre n en x_0, s'il existe une application polynomiale de degré au plus n telle que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = P(x) + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right).$$

En écriture « développée »

$$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_m(x - x_0)^m + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right)$$

avec $m \leqslant n$.

⚠ Malheureusement, toutes les fonctions n'admettent pas des développements limités, et surtout à tout ordre. Par exemple, une fonction non dérivable n'admet pas de développement limité d'ordre 1 (et donc pas d'ordre supérieur non plus).

Théorème 3.4 *(Développement limité et régularité)*

Si $x_0 \in I$, alors

- f admet un développement limité d'**ordre** 0 en x_0 si, et seulement si f est **continue** en x_0. Dans ce cas $f(x_0) = a_0$.
- f admet un développement limité d'**ordre** 1 en x_0 si, et seulement si f est **dérivable** en x_0. Dans ce cas $f(x_0) = a_0$ et $f'(x_0) = a_1$.

Remarque : Si f n'est pas définie en x_0, alors on peut généraliser le théorème précédent en disant qu'elle est prolongeable par continuité en x_0 avec la valeur a_0. Et, dans le deuxième cas, que la fonction ainsi prolongée est dérivable en x_0.

Preuve
Ces théorèmes ont déjà été vus lors du chapitre sur la dérivabilité. ■

2. Mais il s'agit à présent d'une approximation dynamique car x varie : cet exemple avec π n'est qu'une image et non une correspondance rigoureuse.

Explications

Le développement limité sert à donner une approximation polynomiale d'une application au voisinage d'un point. C'est une généralisation du concept de tangente qui donne une approximation à l'ordre 1.

⚠ Ces implications ne sont plus vraies à partir de l'ordre 2, ce n'est pas parce qu'une application admet un développement limité d'ordre 2 en x_0 qu'elle est deux fois dérivable en x_0.
Nous verrons un exemple un peu plus tard.
Quitte à faire un changement de variable, on peut se restreindre à l'étude des développements limités en 0 (sinon, on pose $g(x) = f(x + x_0)$).

Dans la suite de ce chapitre, on privilégiera les développements limités en 0.

Méthode *(Passer d'un développement limité en 0 à un développement en x_0)*

Concrètement, si vous cherchez un développement limité en x_0, mais que vous n'avez l'écriture que pour 0,
alors, vous remplacez $x \to 0$ par $x - x_0 \to 0$ dans l'écriture.

Exemple

$\sin x = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. On peut donc écrire

$$\sin(x - x_0) = x - x_0 + \underset{x-x_0\to 0}{o}(x - x_0) = x - x_0 + \underset{x\to x_0}{o}(x - x_0).$$

De même, si on veut un développement limité de $\ln x$ en 1, on écrit :

$$\ln x = \ln(1 + (x - 1)) = (x - 1) + \underset{x\to 1}{o}(x - 1).$$

En général, on pose $u = x - 1 \xrightarrow[x\to 1]{} 0$, ce qui permet d'écrire

$$\ln(x) = \ln(1 + u) = u + \underset{x\to 1}{o}(u).$$

Propriété 3.5 *(Troncature d'un développement limité)*

Si f admet un développement limité d'ordre n en x_0, alors pour tout $p \in [\![1; n]\!]$, f admet un développement limité d'ordre p en x_0.
Ce développement limité est obtenu par la troncature à l'ordre p du développement limité d'ordre n.

Revenez à l'idée de l'écriture de π avec les décimales : si j'ai 10 chiffres significatifs, alors, si je ne prends que les 5 premiers, cela me donne une précision à 5 chiffres significatifs. Les chiffres suivants dans le développement décimal seront considérés comme des termes d'erreur.
On pourrait résumer cette propriété par : « une grande précision implique une précision moindre ».

Preuve

Idée : on montre que les derniers termes du développement limités forment un « $o(x^p)$ ».
Soit $n \in \mathbf{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, on suppose que $\forall x \in I$, $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$.
Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x_k + \left(\sum_{k=p+1}^{n} a_k x^k + o(x^n)\right).$$

Or, pour $x \neq 0$,

$$\frac{\sum_{k=p+1}^n a_k x^k}{x^p} = \sum_{k=p+1}^{n} a_k \frac{x^k}{x^p}.$$

Et $\forall k \geqslant p + 1$, $\frac{x^k}{x^p} = \frac{1}{x^{p-k}}$, avec $p - k > 0$. Donc $\lim_{x\to 0} \frac{x^k}{x^p} = 0$ et par somme,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=p+1}^n a_k x^k}{x^p} = 0.$$

Ainsi

$$\sum_{k=p+1}^{n} a_k x^k = o(x^p).$$

De plus $x^n = o(x^p)$ (pour la même raison), donc $o(x^n) = o(x^p)$ par transitivité. Ainsi

$$\sum_{k=p+1}^{n} a_k x^k + o(x^n) = o(x^p).$$

et on a donc montré que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x_k + o(x^p).$$

f admet donc un développement limité à l'ordre p et ce développement limité est obtenu par la troncature du développement limité à l'ordre n. ∎

Définition 3.6 *(Forme normalisée)*

Soit f une application définie sur I, et $0 \in \overline{I}$, tels que f admette un développement limité d'ordre n en 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

1. Si $a_0 \neq 0$ alors on dit que le développement limité est **normal**.
2. Si $a_0 = 0$ alors si on note p le plus petit indice tel que $a_p \neq 0$, la forme **normalisée** du développement limité de f est ,

$$f(x) = x^p \left(a_p + a_{p+1} x + \cdots + a_n x^{n-p} + o\left(x^{n-p}\right)\right).$$

Cela revient simplement à factoriser par la plus grande puissance de x possible.

Propriété 3.7

f admet un développement normalisé de la forme (avec éventuellement $n=p$)

$$f(x)=x^p\left(a_p+a_{p+1}\,x+\cdots+a_n\,x^{n-p}+o\left(x^{n-p}\right)\right)$$

si, et seulement si

$$f(x)\underset{x\to 0}{\sim}a_px^p.$$

Dans ce cas, f est du même signe que a_px^p au voisinage de 0.

L'équivalent correspond au premier terme non nul du développement limité.

Preuve

Montrons la première équivalence :
Si f admet un développement limité normalisé comme écrit dans la propriété, alors (d'après la propriété 3.5), il admet un développement limité d'ordre p donné par

$$f(x)=a^px^p+o\left(x^p\right).$$

Ainsi, $f(x)-a^px^p=o\left(x^p\right)$: la différence est négligeable devant un des deux termes.
Donc $f(x)\sim a_px^p$.
Réciproquement, si $f(x)\sim a_px^p$, alors par définition, $f(x)=a^px^p+o\left(x^p\right)$.
Donc f admet un développement limité normalisé de la forme décrite (avec $n=p$).

En supposant que cet équivalent existe, on a donc $f(x)\sim a_px^p$. Or, nous avons vu au théorème 2.3 (dans le chapitre d'analyse asymptotique des fonctions) que $f(x)$ et a_px^p sont de même signe au voisinage de 0. ■

Propriété 3.8 *(Unicité du développement limité)*

Si f admet un développement limité en x_0 alors ce développement limité est unique.

Preuve

Par récurrence sur l'ordre du développement limité.
Initialisation :
Si f admet un développement limité d'ordre 0, tel qu'il existe $(a_0,b_0)\in\mathbf{R}^2$ avec

$$f(x)=a_0+\underset{x\to x_0}{o}(1)=b_0+\underset{x\to x_0}{o}(1).$$

Alors, par passage à la limite en x_0 : $a_0=b_0$.
Hérédité : on suppose le résultat vrai pour un développement limité à l'ordre n.
L'idée est d'abord de réduire le développement limité d'un ordre pour utiliser la récurrence, puis de prouver l'égalité sur le terme restant.
Supposons donc que f admette un développement limité à l'ordre $n+1$ en x_0, qui puisse s'écrire de deux façons :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n+1}a_k(x-x_0)^k+\underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right)=\sum_{k=0}^{n+1}b_k(x-x_0)^k+\underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right).$$

Or, on sait que (troncature)

$$a_{n+1}\left(x-x_0\right)^{n+1}+\underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right)=\underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n}\right)$$

et de même avec b_{n+1}. Donc

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+\underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n}\right)=\sum_{k=0}^{n}b_k(x-x_0)^k+\underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n}\right).$$

Et par hypothèse de récurrence, on en déduit que $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $a_k=b_k$.
Ainsi, on peut soustraire cette partie commune du développement limité à f et conserver l'égalité :

$$\begin{aligned}f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k&=a_{n+1}\left(x-x_0\right)^{n+1}+\underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right)\\&=b_{n+1}\left(x-x_0\right)^{n+1}+\underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right).\end{aligned}$$

Si on divise l'égalité par $(x-x_0)^{n+1}$, on obtient :

$$a_{n+1}=b_{n+1}+\underset{x\to x_0}{o}(1).$$

Ce qui implique que $a_{n+1}=b_{n+1}$ comme nous l'avons vu en initialisation.
Donc les deux développements limités sont égaux, ce qui achève la récurrence. ■

Propriété 3.9 *(Symétrie et développement limité)*

On suppose que f admet un développement limité d'ordre n en 0 de la forme

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+o\left(x^n\right).$$

- Si f est paire alors tous les coefficients d'indice impair a_{2k+1} sont nuls
- Si f est impaire alors tous les coefficients d'indice pair a_{2k} sont nuls

Preuve

Idée : on compare les développements de $f(x)$ et de $f(-x)$ et on utilise l'unicité du développement limité.
On évalue le développement limité de f en $-x$:

$$f(-x)=a_0+a_1(-x)+a_2(-x)^2+\cdots+a_n(-x)^n+o\left((-x)^n\right)\quad=\sum_{k=0}^{n}a_k(-x)^k+o\left((-x)^n\right)$$

$$f(-x)=a_0-a_1x+a_2x^2+\cdots+(-1)^na_nx^n+o\left(x^n\right)\quad=\sum_{k=0}^{n}(-1)^ka_kx^k+o\left(x^n\right)$$

(en effet, $o\left((-x)^n\right)=o\left(x^n\right)$).
Supposons que f soit paire, ainsi $f(x)=f(-x)$, donc les développements limités en x et en $-x$ sont égaux, et par unicité du développement limité on peut identifier les coefficients :

$$\forall k\in[\![0,n]\!],a_k=(-1)^ka_k.$$

Ainsi, pour k impair, $a_k = -a_k$, donc $a_k = 0$. Tous les coefficients d'indice impair sont nuls.
On fait de même, si f est impaire, auquel cas, on trouve $a_k = -(-1)^k a_k$ et ce sont les coefficients d'indices pairs qui sont nuls. ■

C Intégration de développements limités

Théorème 3.10 *(Somme géométrique)*

1. $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \neq 1$,
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o\left(x^n\right).$$
2. $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \neq -1$,
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o\left(x^n\right).$$

Preuve

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Ainsi, pour $x \neq 1$

$$\frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x} = o\left(x^n\right).$$

En effet, $\dfrac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \dfrac{x}{1-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$ ■

Théorème 3.11 *(Intégration du développement limité)*

Si f admet un développement limité d'ordre n en x_0 de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right),$$

et si f admet une primitive F sur un voisinage de x_0,
alors F admet un développement limité d'ordre $n+1$ en x_0 donné par

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} + o\left((x-x_0)^{n+1}\right).$$

Preuve

Par définition f admet une primitive F, ainsi

$$\begin{aligned}
F(x) - F(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{n} a_k (t-x_0)^k + o\left((t-x_0)^n\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\int_{x_0}^{x} (t-x_0)^k\,\mathrm{d}t\right) + \int_{x_0}^{x} o\left((t-x_0)^n\right)\,\mathrm{d}t \quad \text{(linéarité de l'intégrale)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} + \int_{x_0}^{x} o\left((t-x_0)^n\right)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On remarque que $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$ *est continue, donc admet une primitive, ainsi, par différence, le "*o*" aussi.*
Or, par définition de $o\left((t-x_0)^n\right)$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \in [x_0-\eta, x_0+\eta] \cap I, \quad \left|o\left((t-x_0)^n\right)\right| \leqslant \varepsilon (t-x_0)^n.$$

Donc par inégalité triangulaire et positivité de l'intégrale,

$$\forall t \in [x_0-\eta, x_0+\eta] \cap I, \quad \left|\int_{x_0}^{x} o\left((t-x_0)^n\right)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{x_0}^{x} \left|o\left((t-x_0)^n\right)\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Donc $\int_{x_0}^{x} o\left((t-x_0)^n\right)\,\mathrm{d}t = o\left((x-x_0)^{n+1}\right)$. D'où le résultat voulu. ■

⚠ En général on ne peut pas dériver un développement limité. En effet, une fonction peut admettre un développement limité d'ordre n sans être n fois dérivable.

Explications

Rappelez-vous que l'intégrale est une notion très stable, alors que la dérivée ne l'est pas du tout. Cela se comprend facilement en comparant les deux notions.
L'intégrale revient à faire le calcul d'une aire, c'est une somme qui est donc peu sensibles aux petites variations sur la courbe. En revanche, la dérivée regarde un point à la loupe, il suffit donc d'une toute petite perturbation sur la courbe pour qu'elle soit fortement amplifiée au niveau de la dérivée.
Cette idée de *robustesse* de l'intégrale, est sous-jacente dans une grande partie de l'analyse et explique que beaucoup de notions passent plus facilement à l'intégrale qu'elles ne passent à la dérivée.

Théorème 3.12 *(Développements limités usuels en 0 obtenus par intégration)*

1. $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x > -1$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + o(x^n).$$
2. $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x < 1$
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$
3. $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}$
$$\text{Arctan}\,(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

Preuve

Preuve à considérer comme un exemple d'application de la règle d'intégration

1. **idée :** on intègre le développement limité de $\frac{1}{1+x}$.
Comme on sait que l'intégration fait "gagner un ordre", il suffit d'avoir le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ à l'ordre $n-1$, pour avoir celui du logarithme à l'ordre n.
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k + o\left(x^{n-1}\right).$$
Donc par intégration,
$$\ln(1+x) = \ln 1 + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^n\right).$$
et par changement d'indice dans la somme,
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + o\left(x^n\right).$$
(car $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$).
2. On remplace x par $-x$ ou on intègre directement $-\frac{1}{1-x}$ (attention au « - » devant la fraction qui disparaît à l'intégration).
3. On intègre le développement de $\frac{1}{1+x^2}$ en 0.

■

D Formule de Taylor-Young

Théorème 3.13 *(Théorème de Taylor-Young)*

Si $f \in \mathscr{C}^n(I)$, et $x_0 \in I$, alors f possède un développement limité d'ordre n en x_0 donné par
$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \\ &\quad \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right). \end{aligned}$$

Preuve

On fait la preuve par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.
Pour $n = 0$ et $n = 1$, on l'a déjà vu dans les chapitres de continuité et de dérivabilité (on avait même montré le développement limité à l'ordre 1 pour f uniquement dérivable et non $\mathscr{C}^1$).
Hérédité : on suppose le résultat vrai au rang $n \in \mathbf{N}$ et on considère $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbf{R})$.
Alors $f' \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{R})$ et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence :
$$\forall x \in I,\ f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_{x\to a}\left((x-a)^n\right).$$
(On a utilisé que $(f')^{(k)} = f^{(k+1)}$.)
Donc en primitivant, on trouve
$$\forall x \in I,\ f(x) - f(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + o_{x\to a}\left((x-a)^{n+1}\right).$$
Ce qui prouve l'hérédité. ■

⚠ Même à l'ordre 1, la formule de Taylor-Young est différente du théorème des accroissements finis. Dans le théorème des accroissements finis, l'égalité est sans le « petit o », mais en contrepartie, elle n'est valable qu'en un point, et la dérivée n'est pas calculée en x_0, mais en un autre point a priori inconnu.

⚠ La réciproque est fausse : f peut admettre un développement limité d'ordre n en x_0 sans être n fois dérivable en x_0.

Exemple

Par exemple $f : x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$ Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, mais que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Solution :

$\forall x \neq 0$,
$$f(x) = x^3 \sin\frac{1}{x} = x^2 \times \left(x \sin\frac{1}{x}\right).$$

Or $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est borné sur $\mathbf{R}^*$, donc $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$ par produit.
Ainsi $f(x)=x^2 \times o(1)=o\left(x^2\right)$.
On vient donc de trouver un développement limité de f à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x)=0+0.x+0.x^2+o\left(x^2\right).$$

D'après la propriété 3.4, f est donc dérivable en 0 avec $f'(0)=a_1=0$. Étudions la dérivabilité seconde en 0 avec le taux d'accroissement :

$$\forall x\neq 0,\ \tau(x)=\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{x^3}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x}=3x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or $\lim_{x\to 0} 3x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$ (produit d'une fonction qui tend vers 0 avec une fonction bornée), mais $\frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite finie[3] en 0.
Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite finie en 0.
Donc f n'est pas deux fois dérivable en 0.
On a trouvé un exemple d'une fonction qui admet un développement limité à l'ordre 2, sans être deux fois dérivable au point : la réciproque du théorème de Taylor-Young est donc bien fausse.

Méthode *(Utilisation de la formule de Taylor-Young)*

La formule de Taylor-Young :

- sert à **prouver l'existence** du développement limité de f.
- sert à **calculer les dérivées successives** de f en a à partir du développement limité (obtenu par un autre moyen).
- **Ne sert PAS** à calculer un développement limité.

Dans les situations concrètes, et sauf exception, on n'utilise pas la formule de Taylor-Young pour trouver un développement limité dès que l'ordre dépasse 1 ou 2.
On s'appuie sur quelques développements limités usuels et les règles de calcul qui vont être détaillés à présent.

3. On peut le montrer en prenant une suite qui convergent vers 0 : $u_n=\frac{1}{2n\pi}$ et $v_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$. alors $\forall n\geqslant 1$, $\cos\left(\frac{1}{u_n}\right)=1$ et $\cos\left(\frac{1}{v_n}\right)=-1$. Ainsi, l'expression ne peut pas admettre de limite finie en 0.

Théorème 3.14 *(Développements limités usuels en 0)*

1. $\forall n\in\mathbf{N},\forall x\in\mathbf{R}$,
$$\mathrm{e}^{ax}=\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}x^k+o(x^n).$$
2. $\forall\alpha\in\mathbf{R},\forall n\in\mathbf{N},\forall x$,
$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)(\cdots)(\alpha-k+1)}{k!}x^k+o\left(x^n\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha-i)}{k!}x^k+o\left(x^n\right).$$
3. $\forall n\in\mathbf{N},\forall x\in\mathbf{R}$,
$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+o\left(x^{2n}\right).$$
$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o\left(x^{2n+1}\right).$$

Remarque : Dans le cas 2, le développement n'est pas valable pour $x=-1$ si $\alpha<0$.
Pour l'exponentielle, le développement est donné à l'ordre n, alors que pour les fonctions trigonométriques, il est donné aux ordres $2n$ et $2n+1$.

Preuve

Par récurrence sur $n\in\mathbf{N}$ en calculant les dérivées successives. C'est la seule fois que nous utilisons la formule de Taylor-Young.
(pour le sinus et le cosinus, il peut être plus simple de rédiger à l'aide d'une récurrence double à cause de la forme de la dérivée qui dépend de la parité de n.) ∎

On remarque que pour le cosinus, tous les termes d'indice impair sont nuls car la fonction est paire. Et pour sinus, ce sont les termes d'indice pair qui sont nuls par imparité de la fonction.

Exemple

Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f: x\mapsto\sqrt{1+x}$.
Solution :
On calcule un à un les coefficients du développement limité avec $\alpha=\frac{1}{2}$. $\forall x>-1$,

$$f(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o\left(x^3\right).$$

Exemple

Calculer le développement limité à l'ordre n en 0 de $f: x\mapsto\sqrt{1+x}$.

Solution :
$\forall x > -1$,

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\frac{1}{2}-i)}{k!} x^k + o\left(x^n\right).$$

Or

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{k-1}(\frac{1}{2}-i) = \prod_{i=0}^{k-1}\frac{1-2i}{2} &= \prod_{i=0}^{k-1}\frac{2i-1}{-2}\\
&= \frac{(-1)^k}{2^k}\prod_{i=0}^{k-1}(2i-1)\\
&= \frac{(-1)^k}{2^k}(-1)\prod_{i=1}^{k-1}(2i-1) \qquad \text{(on sort le premier facteur du produit)}\\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{(2i-1)(2i)}{2i}\\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}\frac{\prod_{i=1}^{k-1}(2i-1)(2i)}{\prod_{i=1}^{k-1}2i}\\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}\frac{(2k-2)!}{2^{k-1}\prod_{i=1}^{k-1}i} \qquad \text{(le numérateur contient tous les facteurs de 1 à } 2k-2)\\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k-1}}\frac{(2k-2)!}{(k-1)!}\\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k-1}}\frac{2k\cdot(2k-1)\,(2k-2)!}{2k(2k-1)(k-1)!}\\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k}}\frac{(2k)!}{(2k-1)k!}.
\end{aligned}$$

En remplaçant cette expression dans le développement limité :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{2^{2k}(2k-1)(k!)^2}x^k + o\left(x^n\right).$$

E Opérations sur les développements limités

Remarque : À part pour la composition, les opérations sont données pour des développements limités en 0. Pour effectuer les développements en $x_0 \in I$, il suffit de remplacer x par $x - x_0$ dans le développement.

Théorème 3.15 *(Combinaison linéaire)*

Soient $f : I \to \mathbf{R}$ et $g : I \to \mathbf{R}$ avec I un intervalle de $\mathbf{R}$ dont 0 est adhérent.
Si f admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par

$$f(x) = p(x) + o(x^n) \qquad \text{avec } \deg p \leqslant n,$$

et si g admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par

$$g(x) = q(x) + o(x^n) \qquad \text{avec } \deg q \leqslant n$$

alors $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda p(x) + \mu q(x) + o(x^n).$$

Exemple

Donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Solution :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \ln(1+x) - \ln(1-x)\\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right)\\
&= 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

Remarque : si on avait poussé le premier développement limité un peu trop loin, ce n'était pas grave mais on aurait perdu du temps.
Voici ce que cela aurait donné :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \ln(1+x) - \ln(1-x)\\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + o\left(x^6\right)\\
&\qquad - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right)\\
&= 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + o\left(x^5\right) - \frac{x^6}{6} + o\left(x^6\right)
\end{aligned}$$

Or, $-\frac{x^6}{6} + o\left(x^6\right)$ est une quantité négligeable devant x^5 : $-\frac{x^6}{6} + o\left(x^6\right) = o\left(x^5\right)$.
donc ces termes « rentrent » dans le $o(x^5)$ et on retrouve l'expression précédente.

À comprendre : En zéro, c'est le petit « o » avec la plus petite puissance qui « avale » toutes les puissances supérieures (c'est le contraire en l'infini).

Propriété 3.16 *(Fonctions hyperboliques en 0)*

1. $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}$
$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n}).$$
2. $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}$
$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}).$$

Remarque : Comme pour le sinus et le cosinus, on peut gagner un ordre dans les « petits o ».

Preuve

On utilise le développement de l'exponentielle (que l'on compose éventuellement par $x \mapsto -x$). ■

Théorème 3.17 *(Produit)*

Soient $f : I \to \mathbf{R}$ et $g : I \to \mathbf{R}$ avec I un intervalle de $\mathbf{R}$ dont 0 est adhérent.
Si f admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par
$$f(x) = p(x) + o(x^n) \qquad \text{avec } \deg p \leqslant n$$
et si g admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par
$$g(x) = q(x) + o(x^n) \qquad \text{avec } \deg q \leqslant n$$
alors fg admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par
$$f(x)g(x) = r(x) + o(x^n)$$
avec $r(x)$ la troncature à l'ordre n de $p(x) \times q(x)$.

Dans les situations concrètes : on multiplie simplement les deux expressions (avec leur petit « o ») et on met dans le petit « o » avec la plus petite puissance, tous les termes de puissance supérieure.

Exemple

Développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f(x) = \cos(x)\ln(1+x)$.
En déduire les dérivées successives de f en 0.
Solution :
$$f(x) = \cos(x)\ln(1+x)$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)\right).$$
On effectue un double développement de l'expression, mais on ne garde que les puissances inférieures ou égales à 4. Toutes les puissances supérieures seront « $o\left(x^4\right)$ ».

D'un point de vue pratique, on fait comme pour les produits de polynômes : on compte d'abord les termes constants, puis les termes en x, puis les termes en x^2...
$$f(x) = x + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\right)x^4 + o\left(x^4\right)$$
$$= x - x^2 - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).$$
Remarque pour aller plus loin : on voit que le terme d'ordre 4 du développement limité de cosinus ne sert pas. En effet, on aurait pu s'arrêter à l'ordre 3 pour le cosinus car le logarithme ne contient pas de terme constant.
Si on avait écrit le développement limité de $\cos(x)$ à l'ordre 3 :
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right).$$
Cela aurait suffit car en réalisant le produit, le $o\left(x^3\right)$ est multiplié par x (ou des puissances plus grandes). Il devient donc au minimum $x\,o(x^3) = o(x^4)$ et on a la précision voulue.

Théorème 3.18 *(Composée)*

Les développements limités peuvent être composés.

Le théorème n'est pas détaillé, il est à voir sur des exemples. La formulation théorique n'est pas d'une grande aide pour traiter les situations pratiques.

Exemple

Donner le développement limité à l'ordre 10 en 0 de $\cos\left(x^2\right)$.
Solution :
On pose $u = x^2 \to 0$ (il est **capital** de vérifier que la nouvelle variable tend bien vers 0).
Ainsi $\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4!} + o(u^5)$.
En remplaçant u par x^2, on obtient donc
$$\cos\left(x^2\right) = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{4!} + o(x^{10}).$$

Exemple

Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$.
Solution :
On écrit le développement limité de $\sqrt{1+x}$ et on le remplace dans l'expression.
On ne sait pas toujours à quel ordre aller pour ce premier développement. Dans ce cas, il vaut mieux en faire un peu moins qu'un peu trop, quitte à y revenir en rajoutant des termes ensuite.
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$.

Donc

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)} \\
&= \mathrm{e}^1\ \mathrm{e}^{\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)} \qquad \text{(il faut que la variable dans l'exponentielle tende vers 0).} \\
&= \mathrm{e}^1\ \mathrm{e}^{\overbrace{\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)}^{u\to 0}} \\
&= \mathrm{e}^1 \left(1 + \underbrace{\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o\left(x^2\right)\right)}_{u} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+o\left(x^2\right)\right)}_{u^2} \right) \\
&\qquad \text{(les puissances supérieures de } u \text{ donnent au minimum du } x^3, \\
&\qquad \text{elles ne sont donc pas utiles dans le développement)} \\
&= \mathrm{e}^1 \left(1 + \left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o\left(x^2\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}+o\left(x^2\right)\right)\right) \\
&\qquad \text{(on ne garde que les termes de puissance inférieure à 2 lors du développement)} \\
&= \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}}{2}x + o\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

Méthode *(Quotient)*

Lorsque l'on a un quotient, il faut transformer le terme au dénominateur pour le mettre sous la forme $1+u$ avec $u\to 0$, puis appliquer le développement limite correspondant.
Cela s'obtient en général en factorisant par le terme dominant.

Voir la troisième méthode pour le développement limité de $\tan x$ pour avoir une illustration de cela.

Exemple

Donner un développement à l'ordre 5 de $\tan x$ en 0, en utilisant successivement les relations suivantes :

1. $\tan'(x) = 1+\tan^2(x)$
2. $\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$
3. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Solution :

1. On sait que tan est de classe $\mathscr{C}^5$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) en 0, donc elle admet un développement limité à l'ordre 5 en 0.
   De plus, tan est impaire, donc son développement ne contient que des puissances impaires. Il s'écrit sous la forme :
   $$\tan(x) = a_1x + a_3x^3 + a^5x^5 + o\left(x^5\right).$$
   Donc
   $$\begin{aligned}
   1+\tan^2(x) &= 1 + \left(a_1x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^5)\right)^2 \\
   &= 1 + \left(a_1x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^5)\right)\left(a_1x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^5)\right) \\
   &= 1 + a_1^2x^2 + 2a_1a_3x^4 + o(x^5),
   \end{aligned}$$
   (tous les autres termes du développement sont d'ordre supérieur à 5).
   En intégrant, on trouve donc
   $$\tan(x) = \tan 0 + x + \frac{a_1^2}{3}x^3 + \frac{2a_1a_3}{5}x^5 + o(x^5).$$
   Remarque : On gagne un ordre lors de l'intégration, mais il ne nous sert pas ici. Dans le calcul de $1+\tan^2(x)$ on aurait donc pu s'arrêter à l'ordre 4. Par unicité du développement limité, on peut identifier les coefficients trouvés avec les a_i supposés au départ :
   $$\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_3 &= \frac{a_1^2}{3} \\ a_5 &= \frac{2a_1a_3}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_3 &= \frac{1}{3} \\ a_5 &= \frac{2}{15} \end{cases}$$
   $$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right).$$
2. Ici, on voit tan comme l'application réciproque de Arctan.
   Cette **méthode est à retenir pour trouver le développement limité d'une fonction réciproque.**
   Comme pour la première méthode, on sait que tan admet un développement limité à l'ordre 5 de la forme
   $$\tan(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o\left(x^5\right).$$
   On remplace donc x par $\operatorname{Arctan}(x) \to 0$ dans l'expression et on obtient :
   $$\begin{aligned}
   x &= \tan\left(\operatorname{Arctan} x\right) \\
   &= a_1 \operatorname{Arctan} x + a_3\left(\operatorname{Arctan} x\right) + a_5\left(\operatorname{Arctan} x\right)^5 + o\left(\left(\operatorname{Arctan} x\right)^5\right).
   \end{aligned}$$
   Or, le premier terme non nul du développement limité de $\operatorname{Arctan} x$ est x, ainsi $o(\operatorname{Arctan} x) = o(x)$, et $o\left(\left(\operatorname{Arctan}(x)\right)^5\right) = o\left(x^5\right)$.
   En remplaçant $\operatorname{Arctan}(x)$ par son développement, on obtient :
   $$\begin{aligned}
   x &= a_1\operatorname{Arctan} x + a_3\left(\operatorname{Arctan} x\right)^3 + a_5\left(\operatorname{Arctan} x\right)^5 + o\left(x^5\right) \\
   &= a_1\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right) + a_3\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right)^3 \\
   &\quad + a_5\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right)^5 + o\left(x^5\right) \\
   &= a_1x - \frac{a_1x^3}{3} + \frac{a_1x^5}{5} + a_3x^3 - 3a_3\frac{x^5}{3} + a_5x^5 + o\left(x^5\right)
   \end{aligned}$$
   (en ne gardant que les termes de degré inférieurs à 5 dans le développement).
   En remarquant que $x = x + o\left(x^5\right)$, on peut écrire :
   $$x + o(x^5) = a_1x + \left(a_3 - \frac{a_1}{3}\right)x^3 + \left(\frac{a_1}{5} - a_3 + a_5\right)x^5 + o\left(x^5\right).$$

Et par unicité du développement limité,

$$\begin{cases} a_1 & = 1 \\ a_3 - \frac{a_1}{3} & = 0 \\ \frac{a_1}{5} - a_3 + a_5 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 & = 1 \\ a_3 & = \frac{1}{3} \\ a_5 & = \frac{2}{15}. \end{cases}$$

On retrouve le même développement limité qu'à la question précédente, heureusement !

3. Cette troisième méthode est sans doute la première qui vient à l'esprit, mais c'est la plus lourde en calculs...

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^5\right)} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)}{1 - \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o\left(x^5\right)\right)}_{u \to 0}}$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)\right)\left(1 + \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o\left(x^5\right)\right)}_{u} + \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o\left(x^5\right)\right)^2}_{u^2} + \cdots \right.$$

$$\left. + \cdots + \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o\left(x^5\right)\right)^3}_{u^5}.\right)$$

En fait, on remarque que les termes en u^3, u^4 et u^5 ne donnent que des puissances supérieures à 6 et ne sont donc pas utiles dans le développement.
En ne développant u^2 et en ne gardant que les puissances inférieures à 5, on trouve

$$\begin{aligned}
\tan x &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{4} + o\left(x^5\right)\right) \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right) + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{4!} + \frac{x^5}{4} - \frac{x^5}{3! \times 2} \\
&= x + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3! \times 2}\right)x^5 + o\left(x^5\right) \\
&= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

On voit bien que la première méthode est à privilégier, mais il faut savoir également faire les deux autres, car ce sont parfois les seules possibles dans certains énoncés.

4 Interprétation des développements sur l'allure des courbes

Nous avons indiqué au début du chapitre que l'intérêt des développements limités est de donner une approximation de la fonction au voisinage d'un point.
Localement, la courbe ressemble aux premiers termes de son développement limité : interprétons cela géométriquement :

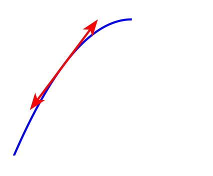
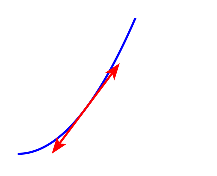
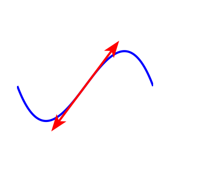
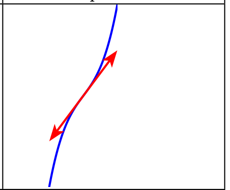
Méthode *(Position par rapport à la tangente)*

Soit f définie sur I et $x_0 \in I$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
On suppose que f admet un développement limité du type

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + o_{x_0}\left((x - x_0)^p\right)$$

(a_p est le premier terme non nul après a_1 dans le développement)
Alors la courbe d'équation $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ est tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0 et la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente dépend de p et de a_p.

$$f(x) - \underbrace{\left(a_0 + a_1(x - x_0)\right)}_{T(x)} \sim_{x_0} a_p(x - x_0)^p.$$

Si p est pair		Si p est impair	
$a_p < 0$	$a_p > 0$	$a_p < 0$	$a_p > 0$
			

Explications

Ces schémas ne sont pas à apprendre par cœur, il faut simplement comprendre et retenir le raisonnement qui suit pour les retrouver sans efforts :

La différence entre la fonction est sa tangente est équivalente $a_p(x - x_0)^p$.

- Si p est pair, alors $(x - x_0)^p$ est toujours positif et $f(x) - T(x)$ est donc localement du signe de a_p.
  Ainsi, pour $a_p < 0$, on a $f(x) - T(x) \leqslant 0$ au voisinage de x_0 : la courbe est en dessous de sa tangente.
  A contrario, si $a_p > 0$, $f(x) - T(x) \geqslant 0$ et la courbe est au dessus de la tangente.
- Si p est impair, alors $(x - x_0)^p$ est du même signe que $x - x_0$: négatif pour $x < x_0$ et positif sinon.
  Pour $a_p < 0$, alors pour $x < x_0$, $a_p(x - x_0)^p \geqslant 0$ (produit de termes positifs), donc $f(x) - T(x) \geqslant 0$ et la courbe est au dessus de la tangente. Par contre, pour $x > x_0$, l'écart change de signe et la courbe est sous la tangente.
  De même, si $a_p > 0$, la coure est d'abord sous la tangente, puis ensuite au dessus.

Exemple

Étudier localement $f : x \mapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ en 0.

Solution :
$\forall x \in \mathbf{R}^*$,

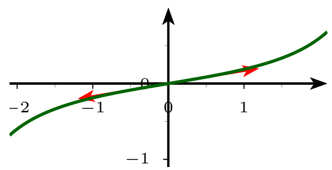
$$f(x) = \frac{1}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right)}_{u \to 0}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(1 + \underbrace{\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{5!} + o(x^4)}_{u} + \underbrace{\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right)^2}_{u^2} + o(u^2) - 1\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{5!} + \frac{x^4}{6^2} + o(x^4)\right) \qquad (\text{car } o(u^2) = o\left((x^2)^2\right) = o(x^4))$$

$$= \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{3 \cdot 5!} + o(x^3).$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0 (coefficient constant du développement limité). La fonction est alors dérivable en 0 de dérivée $\frac{1}{6}$.
pour $x < 0$, la courbe de f est sous la tangente au voisinage de 0 (car $\frac{7x^3}{3 \cdots 5!} < 0$), et elle est au dessus au voisinage de 0 pour $x > 0$.
On peut donc tracer l'allure locale de la courbe en 0 :



Remarque : On pouvait remarquer que f est impaire. La forme du développement limité obtenu et son allure locale sont bien cohérents avec cette constatation.

Méthode *(Etude en $+\infty$)*

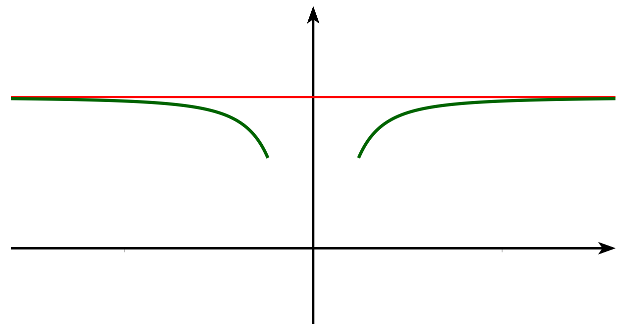
Pour étudier une courbe en $+\infty$, on effectue le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ et l'on étudie un développement limité en u en 0^+.
La forme de l'asymptote et la position de la droite par rapport à l'asymptote s'obtiennent comme pour la tangente.

Exemple

Étudier $f : x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$ au voisinage $\pm\infty$.
Solution :
On pose $u = \frac{1}{x} \to 0$, ainsi $\forall x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{1}{u}\sin u = \frac{1}{u}\left(u - \frac{u^3}{6} + o\left(u^3\right)\right) = 1 - \frac{u^2}{6} + o\left(u^2\right) = 1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Ainsi $f(x)$ tend vers 1 en $\pm\infty$ (asymptote horizontale), et la courbe de f est située en dessous de son asymptote (car $-\frac{1}{6x^2} < 0$) au voisinage de $\pm\infty$.
On peut donc tracer l'allure de la courbe :



Remarque : On ne s'intéresse qu'au comportement asymptotique en $\pm\infty$, cela ne nous dit rien sur le reste de la courbe qui demanderait une étude spécifique (déjà largement faite aux chapitres précédents).

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Définition 4.1 *(Rappel : Nature des branches en $+\infty$)*

- si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale $y = \ell$ au voisinage de $+\infty$.
- si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$,
  - si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
  - si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
  - si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}^*$,
    - si $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $y = ax$.
    - si $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b \in \mathbf{R}$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

Dans les autres cas on ne peut pas conclure.

On peut définir de même les branches en $-\infty$.

Méthode

Un développement asymptotique en $+\infty$, donne directement la branche asymptotique.

Exemple

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

Étudier les branches infinies de f et donner la position des asymptotes par rapport à la courbe.

Solution :

f est définie sur $\mathbf{R}^*$. f admet une asymptote verticale en 0, avec $\lim_{x\to0^+} f(x) = \infty$.

Par contre, elle est prolongeable par continuité à gauche ne 0^-, car $\lim_{x\to0^-} f(x) = 0$.

En $\pm\infty$:
On pose $u = \frac{1}{x} \to 0$, ainsi

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(1+\frac{1}{u}\right)\mathrm{e}^u = \frac{1}{u}(1+u)\left(1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)\right)\\
&= \frac{1}{u}\left(1+2u+\frac{3}{2}u^2+o(u^2)\right)\\
&= \frac{1}{u}+2+\frac{3}{2}u+o(u)\\
&= x+2+\frac{3}{2x}+o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, en $+\infty$, la droite $y = x+2$ est asymptote oblique à la courbe de f, et la courbe de f est située au dessus (car $\frac{3}{2x} > 0$).
En $-\infty$, cette même droite est également asymptote oblique, mais la courbe de f est située en dessous (car $\frac{3}{2x} < 0$).