Comparaisons locales de fonctions

Ce sont les mêmes notions et résultats que pour les suites. La seule différence est que la comparaison asymptotique ne se fait pas nécessairement en $+\infty$, mais peut se faire en n'importe quel point $a \in \mathbf{R}$.

1 Négligeabilité et croissances comparées

Revoir les croissances comparées du chapitre sur les fonctions usuelles.

Définition 1.1 *(Fonction négligeable devant une autre)*

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur I et $a \in \overline{I}$.
Si g ne s'annule pas sur un voisinage de a, et si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$,
alors on note *au voisinage* de a

$$f(x) = o_{x \to a} g(x).$$

On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a.

Explications

Cette notation, dite de Landau, se comprend ainsi :

« $f(x)$ est aussi petit que l'on veut devant $g(x)$ pour x suffisamment proche de a. »

Théorème 1.2 *(Croissances comparées en $+\infty$.)*

Soient $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^2$ et $a > 1$.
Au *voisinage de* $+\infty$, on a les relations suivantes :

$$\ln^{\beta}(x) = o_{x \to +\infty}(x^{\alpha}) \quad \text{et} \quad x^{\alpha} = o_{x \to +\infty}(a^x).$$

Que l'on peut résumer avec la notation de Vinogradov :

$$\ln^{\beta}(x) \ll x^{\alpha} \ll a^x.$$

Se souvenir : Les exponentielles l'emportent sur les puissances, qui l'emportent sur les logarithmes.

Preuve

- Logarithme :

$\star$ On va montrer la croissance comparée pour le logarithme en $+\infty$ avec $\alpha = 1$ et $\beta > 0$. Nous verrons que tous les autres cas en découlent directement. On suppose donc $\alpha = 1$ et $\beta > 0$.

Rappel sur la croissance de l'intégrale :
Si $f \leqslant g$ sur I alors $\int_I f \leqslant \int_I g$.
Nous retrouverons ce résultat de terminale lorsque nous parlerons d'intégration. C'est simplement la traduction algébrique de la constatation suivante :
Si f est en dessous de g, alors sont aire (algébrique) est plus petite que celle de g.

On sait que $\forall t \geqslant 1,\ \dfrac{1}{t} \leqslant 1$, donc par croissance de l'intégrale

$$\forall x \geqslant 1, \quad \ln x = \int_1^x \ln t \,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x 1 \,\mathrm{d}t = x - 1 \leqslant x$$

c'est-à-dire

$$\forall x \geqslant 1, \quad \ln x \leqslant x.$$

En particulier, si on choisit $\gamma \in]0;\beta[$, alors pour $x \geqslant 1$, on a $x^{\gamma} \geqslant 1$
Donc la relation précédente reste vraie si on remplaçe x par x^{γ} et on obtient :

$$\begin{aligned} & \gamma \ln x = \ln x^{\gamma} \leqslant x^{\gamma} && \text{pour } x \geqslant 1 \\ \Rightarrow \quad & 0 \leqslant \frac{\gamma \ln x}{x^{\beta}} \leqslant x^{\gamma} \frac{1}{x^{\beta}} && \\ \Rightarrow \quad & 0 \leqslant \frac{\ln x}{x^{\beta}} \leqslant \frac{1}{\gamma x^{\beta - \gamma}} && (\text{car } \gamma > 0) \end{aligned}$$

Or $\beta - \gamma > 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\gamma x^{\beta - \gamma}} = 0$.
Donc par le théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\beta}} = 0.$$

$\star$ On peut généraliser ce résultat pour $\alpha \in \mathbf{R}$ quelconque.
En effet,

– si $\alpha < 0$, alors pour $x \geqslant 1$, $\ln^\alpha(x) \leqslant \ln x$, et limite s'obtient par comparaison.

– si $\alpha > 1$, alors on peut étudier $\dfrac{\ln x}{x^{\beta/\alpha}}$ avec $\beta/\alpha > 0$.
Si la limite est nulle (ce qui est le cas), alors elle reste nulle, une fois mise à la puissance $\alpha > 1$.

$\star$ Pour la limite en 0 on fait le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ et on en déduit la limite voulue.

- Exponentielle :
C'est une conséquence directe du point précédent sur le logarithme.

$$\frac{x^\beta}{a^x} = \mathrm{e}^{\beta \ln x - x \ln a} = \mathrm{e}^{x\left(\beta \frac{\ln x}{x} - \ln a\right)}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \beta\frac{\ln x}{x} - \ln a = -\ln a$ (d'après le point précédent)
Donc par produit des limites, comme $a > 1$,

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\beta\frac{\ln x}{x} - \ln a\right) = -\infty.$$

Donc par composition des limites, on a le résultat voulu.
De même en $-\infty$.

■

Méthode *(Fonctions puissances)*

Lorsque x est dans l'exposant, il faut en général repasser par la définition de la puissance avec l'exponentielle.

Exemple

Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction définie pour tout $x > 1$, par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{\ln x}}}{x^2}$.

Solution :

Pour $x > 1$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{\ln x}}}{x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{\ln x}}}{\mathrm{e}^{2\ln x}} = \mathrm{e}^{\sqrt{\ln x} - 2\ln x}$

$= \mathrm{e}^{\ln x\left(\frac{1}{\sqrt{\ln x}} - 2\right)}$ (car $\sqrt{\ln x} \neq 0$ si $x > 1$)

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln x}} - 2 = -2$, donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x\left(\frac{1}{\sqrt{\ln x}} - 2\right) = -\infty$.
En composant par l'exponentielle, $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$.

Propriété 1.3 *(Opérations sur les petits o)*

1. *Combinaisons linéaires :*
Si $f(x) = o_{x\to a}(g(x))$ et $h(x) = o_{x\to a}(g(x))$, alors $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$, $\lambda f(x) + \mu h(x) = o_{x\to a}(g(x))$.

2. *Produit :*
Si $f_1(x) = o_{x\to a}(g_1(x))$ et $f_2(x) = o_{x\to a}(g_2(x))$, alors $f_1(x)f_2(x) = o_{x\to a}(g_1(x)g_2(x))$.

3. *Produit par une même fonction :*
Si $f(x) = o_{x\to a}(g(x))$, et $\varphi \in \mathbf{R}^I$ (ne s'annule pas à partir d'un certain rang), alors $f(x)\varphi(x) = o(g(x)\varphi(x))$.

4. *Passage à la puissance :*
Si $f(x) = o_{x\to a}(g(x))$ et $\alpha > 0$, alors $(f(x))^\alpha = o_{x\to a}\left((g(x))^\alpha\right)$.

5. *Fonctions « extraites » :*
Si $f(x) = o_{x\to a}(g(x))$ et $u\ : J \to I$ telle que $\lim\limits_{x\to b} u(x) = a$ alors $f(u(x)) = o_{x\to b}(g(u(x)))$.

2 Fonctions équivalentes en un point ou à l'infini

Définition 2.1 *(Fonctions équivalentes)*

Soient f, g définies sur I et $a \in \overline{I}$ tels que g ne s'annule pas au voisinage de a.
Les fonctions f et g sont **équivalentes** en a, si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
On note $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$.

Exemple

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbf{R}^*$, alors $f(x) \underset{a}{\sim} \ell$.
⚠ C'est faut pour $\ell = 0$, on n'écrit **jamais** qu'une fonction est équivalente à 0.

Théorème 2.2

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence :

- (*symétrie*) : $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \iff g(x) \underset{a}{\sim} f(x)$.
- (*réflexivité*) : $f(x) \underset{a}{\sim} f(x)$.
- (*transitivité*) : si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{a}{\sim} h(x)$ alors $f(x) \underset{a}{\sim} h(x)$.

En supposant que les fonctions f, g et h sont définies sur I, $a \in \overline{I}$ et les fonctions ne s'annulent pas sur un voisinage de a.

Preuve

- Par passage à l'inverse de la limite.
- Le quotient est constant égal à 1, donc tend vers 1.
- $\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)}$ et on conclut par produit des limites.

■

Théorème 2.3 *(Propriétés conservées par la relation d'équivalence)*

1. Deux fonctions équivalentes en a sont strictement de même signe sur un voisinage de a.
2. Deux fonctions équivalentes en a ont le même comportement asymptotique : si l'une admet une limite, alors l'autre possède la même limite.

Explications

L'intérêt des équivalents est de se ramener à des fonctions plus simples ayant le même comportement asymptotique.

Preuve

Cette preuve est pour a un nombre réel fini. La preuve pour $a = \pm\infty$ ressemble beaucoup.

1. Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. En choisissant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$, $\frac{f(x)}{g(x)} \geqslant \frac{1}{2}$.
Donc sur un voisinage de a, f et g sont de même signe (et f ne s'annule pas).
2. On pose $\varphi : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$.
φ est définie sur un voisinage de a et tend vers 1 en a.
Sur ce voisinage, $f(x) = \varphi(x)g(x)$.
Si g admet une limite finie ℓ en a, alors, par produit de limite, f admet la même limite en a. Par symétrie de la relation d'équivalence, on peut conclure.

■

⚠ Ce n'est pas parce que deux fonctions ont la même limite en un point qu'elles sont équivalentes au voisinage de ce point (par contre, c'est vrai si la limite est finie non nulle).

Théorème 2.4 *(Caractérisation des fonctions équivalentes)*

Soient deux fonctions f et g définies sur I et $a \in \overline{I}$.
On suppose que f et g ne s'annulent pas sur un voisinage de a.
$f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $f(x) - g(x) = o_{x\to a} g(x)$
si et seulement si $f(x) - g(x) = o_{x\to a} f(x)$.

Explications

Cette caractérisation donne une interprétation quantitative à la proximité des deux fonctions.

Preuve

$$\begin{aligned} f(x) \underset{a}{\sim} g(x) &\iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \\ &\iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0 \\ &\iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0 \\ &\iff f(x) - g(x) = o_{x\to a} g(x). \end{aligned}$$

La seconde équivalence s'obtient par symétrie. ■

Corollaire 2.5

Une fonction polynomiale est équivalente à son monôme de plus **haut** degré en $\pm\infty$,
Une fonction polynomiale est équivalente à son monôme de plus **petit** degré en 0.

Propriété 2.6 *(Opérations sur les fonctions équivalentes)*

1. On peut multiplier les équivalents :
$$\text{si} \quad f_1(x) \underset{a}{\sim} g_1(x) \text{ et } f_2(x) \underset{a}{\sim} g_2(x) \quad \text{alors,} \quad f_1(x)f_2(x) \underset{a}{\sim} g_1(x)g_2(x).$$
$$\text{si} \quad f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \text{ et } \lambda \in \mathbf{R}^* \quad \text{alors,} \quad \lambda f(x) \underset{a}{\sim} \lambda g(x).$$
$$\text{si} \quad f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \text{ et } \alpha \in \mathbf{R} \quad \text{alors,} \quad (f(x))^\alpha \underset{a}{\sim} (g(x))^\alpha.$$
2. Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, et $u(x) \underset{b}{\sim} a$ alors, $(f \circ u)(x) \underset{b}{\sim} (g \circ u)(x)$.
3. On ne peut **pas additionner** des équivalents.
4. On ne peut **pas composer les équivalents avec une fonction à gauche**.

Remarque : Pour les puissances, α est quelconque (sous reserve d'existence de l'expression). En particulier les équivalents passent à l'inverse avec $\alpha = -1$.
La composition par une fonction u à droite revient à faire un changement de variable en posant $X = u(x)$. Par exemple, si $x \to 0$, alors $u(x) = \sqrt{x+1} \to 1$, et on peut poser $X = u(x) = \sqrt{x+1}$ et trouver l'équivalent pour $X \to 1$.

Théorème 2.7 *(Approximation affine)*

Soit $f \in \mathscr{D}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que $f'(x_0) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(x_0) \underset{x\to x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$$

Preuve

C'est une reformulation de la définition de la dérivabilité lorsque la dérivée est non nulle : $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \neq 0 \iff \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f'(x_0)} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 1$

$\iff f(x)-f(x_0) \underset{x\to x_0}{\sim} f'(x_0)(x-x_0).$ ■

⚠ En général, l'équivalent est **faux** si $f'(x_0)=0$.

Théorème 2.8 *(Équivalents usuels en 0)*

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2} \qquad \tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \qquad \operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

avec $\alpha \neq 0$.

Preuve

Sauf pour le cosinus, ces formules résultent de l'application directe du théorème2.7.
La formule pour le cosinus s'obtient simplement avec celle du sinus et en utilisant le théorème de Pythagore. ■

3 Relation de domination

Définition 3.1 *(Fonction dominée par une autre)*

Soient f et g deux fonctions définies sur I et $a \in \overline{I}$.
Si f ne s'annule pas sur un voisinage de a et si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a, alors on note *au voisinage* de a :

$$f(x) = O_{x\to a}(g(x)).$$

On dit que f est **dominée** par f au voisinage de a.
Cette notation se lit souvent f « est un grand O » de g en a.

Remarque : Comme pour les suites, on peut donner une définition quantifiée de la domination :

$$f(x) = O_{x\to a}(g(x)) \iff \exists K>0, \exists \eta>0, \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)| \leqslant K|g(x)|.$$

Propriété 3.2 *(Propriétés de la domination)*

Les propriétés vues pour la négligeabilité sont aussi valables pour la domination. (transitivité, opérations sur les o.)
La relation de domination est réflexive et transitive mais n'est pas symétrique, ni antisymétrique.

Propriété 3.3

Si $f(x) = o_{x\to a}(g(x))$ alors $f(x) = O_{x\to a}(g(x))$. La réciproque est fausse.
Si $f(x) \sim_{x\to a} g(x)$ alors $f(x) = O_{x\to a}(g(x))$. La réciproque est fausse.

Preuve

Revenir à la définition, une fonction qui tend vers 0 est bornée mais la réciproque est fausse.
De même pour l'équivalence. ■

Explications

La notion de négligeabilité est plus forte que celle de domination.
On étend les comparaisons asymptotiques au cas complexe en comparant les modules.