Équations différentielles linéaires

Version « approfondie » : *une version légèrement simplifiée est aussi disponible sur le site.*
Les équations différentielles sont très présentes dans tous les domaines scientifiques dès qu'il s'agit de *dynamique*. Ainsi, ces équations interviennent dans les mouvements en mécanique newtonienne, dans la cinétique chimique, les évolutions bactériologiques...
Il n'est pas toujours possible de trouver une solution exacte aux équations différentielles et les études qualitatives ainsi que les méthodes numériques jouent un rôle important.
Dans ce chapitre, nous nous contenterons d'étudier les équations les plus simples : les équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Notations :
Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne indifféremment $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
I et J désignent des intervalles de $\mathbf{R}$ (non réduits à un point).

1 Introduction aux opérateurs linéaires

A Opérateur linéaire

La linéarité, notion que formalise l'algèbre linéaire, est sous-jacente dans de nombreux chapitres abordés cette année et en constitue donc un fil directeur[1].
L'étude des équations différentielles donne l'excuse d'en faire une brève introduction pour prendre un peu de hauteur face à notre sujet.

Définition 1.1 *(Opérateur linéaire)*

Soit T une application sur un espace vectoriel[2] E, dans un ensemble F.
On dit que T est $\mathbf{K}$-linéaire, si, et seulement si

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2, \qquad T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y).$$

Remarque : On utilise parfois le terme d'**opérateur** en synonyme d'application. On privilégie ce terme lorsque l'on travaille sur des ensembles de fonctions ou d'autres ensembles « très gros ».

Exemple

- La somme est linéaire : $\sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k$.
- La dérivation est linéaire : $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.
- L'intégration est linéaire : $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
- La limite des suites convergentes :
$\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n + \mu\, v_n) = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \mu \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
- ...

B Application aux suites récurrentes linéaires

Cette section est une redite du cours sur les suites récurrentes linéaires, mais les preuves sont exprimées à l'aide des opérateurs linéaires.

1. La linéarité était déjà essentielle au collège sous l'appellation « *proporionnalité* » avec les tableaux de proportionnalité, les fonctions linéaires et affines, le théorème de Thalès...
2. Nous ne définissons pas ici ce qu'est un espace vectoriel, mais on se limite à comprendre que ce sont des ensembles qui sont justement construit sur mesure pour qu'on puisse y appliquer la linéarité, c'est-à-dire pour lesquels $\lambda x + \mu y$ est encore dans l'ensemble E quand x et y y sont. Par exemple, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^n$, $\mathscr{C}^0([a,\, b],\, \mathbf{R})$, $\mathscr{C}^k([a,\, b],\, \mathbf{R})$ sont des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels.

Propriété 1.2 *(Rappel : suites arithmético-géométriques)*

Soit $(a, b) \in \mathbf{K}^2$, on définit l'équation (E_b) par

$$(E_b) \ : \qquad u_{n+1} = a u_n + b,$$

et l'équation homogène (sans second membre) associée :

$$(E_0) \ : \qquad u_{n+1} = a u_n.$$

Si on note $\mathscr{S}_b$ l'ensemble des solutions de (E_b) et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0), alors $\mathscr{S}_b$ est non vide si, et seulement s'il existe (au moins) une solution u^0 à l'équation et dans ce cas,

$$\mathscr{S}_b = u^0 \text{ “}+\text{” } \mathscr{S}_0.$$

C'est-à-dire : $\mathscr{S}_b = \left\{u^0 + v,\ v \in \mathscr{S}_0\right\}$.

« Solutions = solution particulière + solution de l'équation homogène. »

ou, écrit autrement :

$$u \in \mathscr{S}_b \iff (u - u^0) \in \mathscr{S}_0.$$

Concrètement, pour les suites arithmético-géométriques on cherche un point fixe (solution particulière constante) et on rajoute les solutions de l'équation homogène : des suites géométriques.
On obtient alors, si ℓ est un point fixe.

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n - \ell = \lambda \times a^n.$$

Ce qu'on peut réécrire en utilisant la condition initiale u_0 :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (u_0 - \ell) \times a^n + \ell.$$

Exemple

Résoudre $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 3$.

Solution :

On cherche une solution particulière sous la forme d'une constante : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \ell$.
Ainsi ℓ est solution de $\ell = 2\ell - 3$, donc $\ell = 3$ convient.
On cherche les solutions de l'équation homogène associée : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 2u_n$.
Les solutions s'écrivent alors $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \lambda 2^n$ avec λ quelconque dans $\mathbf{K}$.
Les solutions s'écrivent donc (sans s'occuper de la condition initiale)

$$\exists \lambda \in \mathbf{K},\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \lambda 2^n + 3.$$

Si on considère la condition initiale u_0, alors on trouve $u_0 = \lambda 2^0 + \ell$, donc $\lambda = u_0 - \ell = u_0 - 3$. Ainsi, les solutions s'écrivent :

$$\exists \lambda \in \mathbf{K},\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (u_0 - 3) \times 2^n + 3.$$

Preuve

On note $T : \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$

$$T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^{\mathbf{N}} & \to & \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \\ u & \mapsto & (u_{n+1} - a u_n)_{n \in \mathbf{N}} \end{array} \right. .$$

T est un opérateur linéaire sur l'ensemble des suites de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.
En effet, $\forall (u, v) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$,

$$\begin{aligned} T(\lambda u + \mu v) &= (\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} - a(\lambda u_n + \mu v_n)) \\ &= \lambda (u_{n+1} - a u_n) + \mu (v_{n+1} - a v_n) \\ &= \lambda T(u) + \mu T(v). \end{aligned}$$

La fin de la preuve est alors triviale.
Si on associe b à la suite constante égale à b et si non note u^0 une solution particulière, alors on trouve

$$\begin{aligned} u \in \mathscr{S}_b &\iff \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} - a u_n = b \\ &\iff (u_{n+1} - a u_n)_{n \in \mathbf{N}} = b \\ &\iff T(u) = b \\ &\iff T(u) = T\left(u^0\right) \qquad \text{(car } u^0 \text{ est solution particulière)} \\ &\iff T(u) - T\left(u^0\right) = 0 \\ &\iff T\left(u - u^0\right) = 0 \qquad \text{(par linéarité)} \\ &\iff u - u^0 \in \mathscr{S}_0. \end{aligned}$$

Cette preuve est certes plus compliquée que ce que nous avions fait lors du chapitre sur les suite arithmético-géométrique, mais elle a l'avantage de pouvoir se généraliser sans efforts. ∎

Propriété 1.3 *(Suites récurrentes linéaires d'ordre 1)*

Dans la propriété précédente, on peut remplacer les constantes $(a, b) \in \mathbf{K}^2$ par des suites $(a, b) \in \left(\mathbf{K}^{\mathbf{N}}\right)^2$.

Preuve

C'est la même ! ∎

Exemple

Résoudre $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = (n+1)u_n - n$.

Solution :

Il « suffit » de trouver les solutions de l'équation homogène et une solution particulière.
Solutions de l'équation homogène :
$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = (n+1)u_n$, donc par récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = n! u_0 = \lambda n!.$$

Solution particulière : On observe que la suite constante égale à 1 est solution (on peut le voir en factorisant par $(n+1)$).
Solutions générales :

$$\mathscr{S} = \{n \mapsto \lambda n! + 1,\ \lambda \in \mathbf{K}\}.$$

Si on donne une condition initiale u_0, alors on trouve

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (u_0 - 1)n! + 1.$$

Propriété 1.4 *(Principe de superposition)*

Pour $(a,\, b) \in \left(\mathbf{K}^{\mathbf{N}}\right)^2$, on définit l'équation

$$(E_b)\ :\qquad u_{n+1} = a_n u_n + b_n.$$

Soit $(b,\, b') \in \left(\mathbf{K}^{\mathbf{N}}\right)^2$.
Si u est solution de (E_b) et si u' est solution de $(E_{b'})$, alors

$$\forall (\lambda,\, \mu) \in \mathbf{K}^2,\quad \lambda u + \mu u' \text{ est solution de } (E_{\lambda b + \mu b'})\,.$$

Preuve
$T(u) = b$ et $T(u') = b'$, donc par linéarité de T,

$$\forall\,(\lambda,\, \mu) \in \mathbf{K}^2,\ T\left(\lambda u + \mu u'\right) = \lambda T(u) + \mu T(u') = \lambda b + \mu b'.$$

■

Propriété 1.5 *(Rappel : suites récurrentes linéaires d'ordre 2)*

Soit $(b,\, c,\, d) \in \mathbf{K}^3$, on définit l'équation (E_c) par

$$(E_c)\ :\qquad u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = d.$$

et l'équation homogène (sans second membre) associée :

$$(E_0)\ :\qquad u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0.$$

Si on note $\mathscr{S}_c$ l'ensemble des solutions de (E_c) et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0), alors $\mathscr{S}_c$ est non vide si, et seulement s'il existe (au moins) une solution u^0 à l'équation et dans ce cas,

$$\mathscr{S}_c = u^0 \text{``} + \text{''} \mathscr{S}_0.$$

C'est-à-dire : $\mathscr{S}_c = \left\{u^0 + v,\, v \in \mathscr{S}_0\right\}$.
On peut généraliser au cas où b, c, d désignent des suites, mais la méthode de l'équation caractérisitique ne permet plus de trouver les solutions de l'équation homogène.

Preuve
On note $T : \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$

$$T\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^{\mathbf{N}} & \to & \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \\ u & \mapsto & (u_{n+2} - b u_{n+1} - c u_n)_{n \in \mathbf{N}}\,. \end{array}\right.$$

T est un opérateur linéaire sur l'ensemble des suites de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.
La fin de la preuve est strictement identique à celle de l'ordre 1. ■

Propriété 1.6 *(Généralisation)*

Soit $p \in \mathbf{N}^*$, on définit des suites $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}, b \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ et on considère l'équation (E_c)

$$(E_c)\ :\qquad u_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k} + b.$$

et l'équation homogène (sans second membre) associée :

$$(E_0)\ :\qquad u_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k}.$$

Si on note $\mathscr{S}_c$ l'ensemble des solutions de (E_c) et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0), alors

$\mathscr{S}_c$ est non vide si, et seulement s'il existe (au moins) une solution u^0 à l'équation et dans ce cas,

$$\mathscr{S}_c = u^0 \text{``} + \text{''} \mathscr{S}_0.$$

Preuve
On utilise l'opérateur linéaire $T : \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$

$$T\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^{\mathbf{N}} & \to & \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \\ u & \mapsto & \left(u_{n+p} - \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k}\right)_{n \in \mathbf{N}}\,. \end{array}\right.$$

■

Exercice
Rédiger le principe de superposition à l'ordre 2 ou à l'ordre p.

2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Nous revenons à présent aux équations différentielles linéaires.
Il faudra garder en mémoire que c'est la même chose que les suites récurrentes linéaires, mais au lieu d'être des suites $\mathbf{N} \to \mathbf{K}$, ce sont des fonctions de $\mathbf{R} \to \mathbf{K}$.
On remplace également les accroissements $u_{n+1} - u_n$ par les dérivées f'.
On retrouvera donc les mêmes structures de solutions et de nombreux points communs.

A Définition et structure des solutions

Définition 2.1

Soit $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbf{R}$, on considère l'équation :

$$(E_c) \ : \qquad \forall t \in \mathscr{D}, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

où a, b et c sont trois applications **continues** sur $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbf{K}$.
(E_c) est une **équation différentielle linéaire du premier ordre** à coefficients continus sur $\mathscr{D}$.

$y \ : \ \mathscr{D} \to \mathbf{K}$ est une **solution** de (E_c), si y est dérivable et vérifie la relation (E_c) pour tout $t \in \mathscr{D}$.

L'équation différentielle **homogène** associée à (E_c) est définie par :

$$(E_0) \ : \qquad \forall t \in \mathscr{D}, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0.$$

Dans la suite on notera $\mathscr{S}_c$, les solutions de (E_c) et $\mathscr{S}_0$ les solutions de (E_0).

Dans le cadre de ce cours, on ne s'intéresse qu'aux équations différentielles

- linéaires,
  Pas de y^2, de e^y... La notion de linéarité qui a été vue précédemment sera approfondie dans le chapitre sur les espaces vectoriels.
- à coefficients continus.

Ici nous élargissons un peu le cadre du programme, puisque celui-ci se limite aux équations :

- définies sur des intervalles de $\mathbf{R}$,
  On peut travailler sur d'autres domaines mais certains résultats relatifs aux choix des constantes sont alors un peu différents et rajoutent une difficulté.
- mises sous forme résolue.
  Il n'y a pas de coefficient devant le y'. La mise sous forme résolue est justement le premier problème qui nous occupe ici.

Exemple *(suivi)*

Nous suivrons cet exemple tout au long de cette partie.

$$(E_c) \ : \quad t^3y'(t) - 2y(t) = 1 + t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}.$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre définie sur $\mathbf{R}^*$ et prolongeable par continuité sur $\mathbf{R}$ (second membre). On pose donc $\mathscr{D} = \mathbf{R}$.
L'équation homogène associée est :

$$(E_0) \ : \quad t^3y'(t) - 2y(t) = 0.$$

Remarques sur les notations :
Dans ce cours, on utilisera souvent t comme variable, mais il est tout à fait possible d'utiliser à la place la variable x, ou u...
Par exemple, si on utilise la variable x, alors l'équation de l'exemple devient (E_c) : $x^3y'(x) - 2y(x) = 1 + x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$, et la résolution est totalement identique (en remplaçant à chaque fois t par x).
De même, on omet parfois l'écriture de la variable avec y. L'équation s'écrit alors

$$(E_c) \ : \ t^3y' - 2y = 1 + t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}.$$

Le fait que y dépende de t est sous-entendu.

Théorème 2.2 *(Structure des solutions)*

$\mathscr{S}_0$ est non vide. Si g_c est une solution particulière de E_c, alors

$$\mathscr{S}_c = \mathscr{S}_0 \text{ “}+\text{” } g_c = \{f + g_c,\ f \in \mathscr{S}_0\}.$$

Preuve

On pose

$$T \ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathscr{D}, \mathbf{K}) & \to & \mathscr{C}^0(\mathscr{D}, \mathbf{K}) \\ y & \mapsto & ay' + by. \end{array} \right.$$

(E_c) s'écrit $T(y) = c$ et (E_0) s'écrit $T(y) = 0$. T est linéaire, donc

$$\begin{aligned} y \in \mathscr{S}_c &\iff T(y) = c \\ &\iff T(y) = T(g_c) \\ &\iff T(y) - T(g_c) = 0 \\ &\iff T(y - g_c) = 0 \quad \text{(par linéarité de } T\text{)} \\ &\iff y - g_0 \in \mathscr{S}_0. \end{aligned}$$

■

Remarque : Nous verrons plus tard que $\mathscr{S}_0$ est un espace vectoriel (comme noyau d'une application linéaire).

La conclusion de ce théorème est qu'il suffit de connaître les solutions de l'équation homogène (sans second membre) et **une seule** solution particulière, pour avoir **toutes** les solutions de l'équation.

Méthode

Pour résoudre une équation différentielle, on procède donc en général de la façon suivante :

1. Recherche des solutions de l'équation homogène : $\mathscr{S}_0$.
2. Recherche d'une solution particulière : g_c.

Exemple *(suivi)*

On cherchera donc

1. les solutions de (E_0) : $\left(t^3y'(t)-2y(t)=0\right)$,
2. une solution particulière g_c de (E_c) : $\left(t^3y'(t)-2y(t)=1+t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}\right)$.

Propriété 2.3 *(Principe de superposition)*

Si $f_1\in\mathscr{S}_{c_1}$ et $f_2\in\mathscr{S}_{c_2}$, alors $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2$, $\lambda f_1+\mu f_2\in\mathscr{S}_{\lambda c_1+\mu c_2}$.

Preuve

$$\begin{aligned} f_1\in\mathscr{S}_{c_1} \text{ et } f_2\in\mathscr{S}_{c_2} &\iff T(f_1)=c_1 \text{ et } T(f_2)=c_2\\ &\Rightarrow \lambda T(f_1)+\mu T(f_2)=\lambda c_1+\mu c_2\\ &\Rightarrow T(\lambda f_1+\mu f_2)=\lambda c_1+\mu c_2\\ &\Rightarrow \lambda f_1+\mu f_2\in\mathscr{S}_{\lambda c_1+\mu c_2}.\end{aligned}$$

■

Exemple *(suivi)*

Dans l'exemple précédent, on peut chercher la solution particulière en deux temps.
D'abord g_1 solution particulière de (E_1) : $t^3y'(t)-2y(t)=1$
Puis g_2 une solution particulière de (E_2) : $t^3y'(t)-2y(t)=t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}$
Alors $g_c=g_1+g_2$ est solution particulière de

$$(E_c)\ :\quad t^3y'(t)-2y(t)=1+t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}.$$

B Équation mise sous forme résolue

Définition 2.4 *(points singuliers)*

Les **points singuliers** de l'équation

$$(E_c)\ :\qquad \forall t\in\mathscr{D},\quad a(t)y'(t)+b(t)y(t)=c(t).$$

sont les solutions $t\in\mathscr{D}$ de l'équation $a(t)=0$.
Dans la suite, on notera $\mathscr{D}^*$ l'ensemble $\mathscr{D}$ auquel on a enlevé les points singuliers.

Exemple *(suivi)*

Pour l'équation (E_c), 0 est un point singulier. $\mathscr{D}^*=\mathbf{R}^*$.

Propriété 2.5 *(Forme résolue)*

Sur $\mathscr{D}^*$, l'équation (E_c) peut s'écrire

$$(E_c^*)\ :\qquad \forall t\in\mathscr{D}^*,\quad y'(t)+\frac{b(t)}{a(t)}y(t)=\frac{c(t)}{a(t)}.$$

On notera cette équation :

$$(E_c^*)\ :\qquad \forall t\in\mathscr{D}^*,\quad y'(t)+\beta(t)y(t)=\gamma(t)$$

avec $\beta(t)=\frac{b(t)}{a(t)}$ et $\gamma(t)=\frac{c(t)}{a(t)}$.

Exemple *(suivi)*

Mise sous forme résolue, l'équation (E_c) s'écrit (sur $\mathscr{D}^*$) :

$$(E_c^*)\ :\quad y'(t)-\frac{2}{t^3}y(t)=\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}.$$

Propriété 2.6 *(Régularité des solutions)*

Sur $\mathscr{D}^*$, si β et γ sont de classe $\mathscr{C}^k$, alors les solutions de (E_c^*) sont (*au moins*) de classe $\mathscr{C}^{k+1}$.
Ainsi, pour $(\beta,\gamma)\in\mathscr{C}^\infty(\mathscr{D}^*)$, les solutions sont de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathscr{D}^*)$.

Preuve

Par récurrence sur k. ■

Exemple *(suivi)*

Les coefficients $t\mapsto\frac{2}{t^3}$ et $t\mapsto\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}$ sont $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^*)$, donc les solutions seront de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^*)$.

C Solutions de l'équation homogène sur un intervalle

Théorème 2.7

$$(E_0^*)\ :\qquad \forall t\in\mathscr{D}^*,\quad y'(t)+\beta(t)y(t)=0.$$

Soit I un **intervalle** inclus dans $\mathscr{D}^*$, les solutions de (E_0^*) sur I s'écrivent[3] :

$$\mathscr{S}=\operatorname{Vect}_{\mathbf{K}}\left(t\mapsto\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\beta(u)\,\mathrm{d}u}\right)=\left\{t\mapsto\lambda\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\beta(u)\,\mathrm{d}u}\right\}_{\lambda\in\mathbf{K}}.$$

avec t_0 un point quelconque de I.
Autre formulation : Si $t\mapsto B(t)$ est une primitive de b sur I, alors les solutions de (E_0) sur I s'écrivent :

$$y\ :t\mapsto\lambda\,\mathrm{e}^{-B(t)},\ \text{avec } \lambda\in\mathbf{K}.$$

Remarque : Changer de point t_0 revient à prendre une constante λ différente.

Preuve

Par double inclusion :

- Pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on pose $f : x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-B(x)}$, ainsi $\forall x \in I,\ f'(x) = -B'(x)\lambda\,\mathrm{e}^{-B(x)} = -\beta(x)f(x)$,
donc $f \in S_0$. Donc $\left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-B(x)}, \quad \lambda \in \mathbf{K}\right\} \subset S_0$.
- (*méthode de la variation de la constante*)
Soit $f \in S_0$, montrons que f est sous la forme $x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-B(x)}$.
L'exponentielle ne s'annule pas, donc pour tout $x \in I$, on peut poser $\lambda(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{e}^{-B(x)}}$.
c'est-à-dire que pour tout $x \in I$, $f(x) = \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-B(x)}$.
$x \mapsto \lambda(x)$ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables (le dénominateur ne s'annule pas). Donc $\forall x \in I,\ f'(x) = \lambda'(x)\,\mathrm{e}^{-B(x)} - \beta(x)\lambda(x)\,\mathrm{e}^{-B(x)} = \lambda'(x)\,\mathrm{e}^{-B(x)} - \beta(x)f(x)$.
Or $f \in S_0$, donc $\forall x \in I,\ f'(x) + \beta(x)f(x) = 0$, c'est-à-dire que $\lambda'(x)\,\mathrm{e}^{-B(x)} = 0$.
Comme l'exponentielle ne s'annule pas sur I, alors $\forall x \in I,\ \lambda'(x) = 0$,
et I est un **intervalle**, donc λ est constante.
Donc $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-B(x)}$, donc $S_0 \subset \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-B(x)}, \quad \lambda \in \mathbf{K}\right\}$.

Ainsi par double inclusion $S_0 = \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-B(x)}, \quad \lambda \in \mathbf{K}\right\}$. ■

Propriété 2.8 *(Cas particulier des équations à coefficients constants)*

Si β est une constante, alors les solutions de l'équation homogène sur chaque **intervalle** I inclus dans $\mathscr{D}^*$ s'écrivent sous la forme

$$t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\beta t} \qquad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbf{K}.$$

Exemple

Résoudre

1. $y' + 2y = 0$ sur $\mathbf{R}$.
2. $y'(t) + \dfrac{2}{t}y(t) = 0$ sur $\mathbf{R}_-^*$.

Solution :

1. $\mathscr{S} = \left\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-2t}, \lambda \in \mathbf{K}\right\}$.
2. Une primitive de $t \to \dfrac{2}{t}$ sur $\mathbf{R}_-^*$ est $t \mapsto 2\ln(|t|) = 2\ln(-t)$.
Ainsi, on obtient les solutions sous la forme $f(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-2\ln(-t)} = \dfrac{\lambda}{(-t)^2} = \dfrac{\lambda}{t^2}$.
Donc $\mathscr{S} = \left\{t \mapsto \dfrac{\lambda}{t^2}, \lambda \in \mathbf{K}\right\}$.

3. Les solutions forment un $\mathbf{K}-$espace vectoriel de dimension 1.

Exemple *(suivi)*

Dans l'exemple suivi, après mise sous forme résolue, on obtient :

$$(E_0) \quad : \quad y'(t) - \frac{2}{t^3}y(t) = 0.$$

Donner les solutions de l'équation homogène sur $\mathbf{R}_-^*$.
Faire de même sur $\mathbf{R}_+^*$.

Solution :

Une primitive de $t \mapsto \frac{2}{t^3}$ sur $\mathbf{R}_-^*$ est $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$.
On trouve donc les solutions de l'équation homogène sur $\mathbf{R}_-^*$:

$$\mathscr{S}_- = \left\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}, \lambda \in \mathbf{K}\right\}.$$

Sur $\mathbf{R}_+^*$, on trouve les mêmes formes de solutions :

$$\mathscr{S}_+ = \left\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}, \lambda \in \mathbf{K}\right\}.$$

Méthode *(Résolution à la physicienne)*

On écrit (sans s'occuper des problèmes de signe ou d'annulation[4], ni de la signification des différentielles) :

$$\begin{aligned}
y'(t) + \beta(t)y(t) = 0 &\iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\beta(t)y \\
&\iff \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\beta(t)\,\mathrm{d}t \\
&\iff \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{y} = -\int_{x_0}^{x} \beta(t)\,\mathrm{d}t \\
&\qquad\qquad \text{(on somme les quantités infinitésimales)} \\
&\iff \ln\left(\frac{y(x)}{y_0}\right) = -\int_{x_0}^{x} \beta(t)\,\mathrm{d}t \\
&\iff y(x) = y_0\,\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}\beta(t)\,\mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

On **évitera de rédiger ainsi** la résolution de l'équation pour ne pas avoir à justifier du signe et de la non-annulation de la solution. C'est donc à considérer comme un moyen mnémotechnique qui marche bien.

D ⋆ Cas où le domaine n'est pas un intervalle

Le programme se limite aux équations différentielles sur un intervalle et mises sous forme résolue.
Cette partie déborde donc un peu et s'intéresse à la situation où le domaine n'est pas un intervalle, mais une unions disjointe d'intervalle.

4. On peut montrer, a priori, que si la fonction n'est pas identiquement nulle, alors elle ne s'annulera pas et sera donc aussi de signe constant (continue), mais cela n'est pas trivial.

Exemple

Soit l'équation

$$y' + \frac{2}{t}y = 0 \quad \text{sur } \mathbf{R}^*.$$

On remarque que $\mathbf{R}^*$ n'est pas un intervalle, donc les théorèmes de la partie précédente ne peuvent s'appliquer directement. Cependant, $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}_-^* \cup \mathbf{R}_+^*$ peut s'écrire comme réunion d'intervalles disjoints.
Le problème se ramène donc à la résolution sur chacun de ces deux intervalles :

- Sur $\mathbf{R}_+^*$, on obtient des solutions sous la forme

$$\mathscr{S}_- = \left\{t \mapsto \frac{\lambda}{t^2},\, \lambda \in \mathbf{K}\right\}$$

(exemple résolu à la partie précédente).

- Sur $\mathbf{R}_+^*$, on obtient la même forme :

$$\mathscr{S}_+ = \left\{t \mapsto \frac{\lambda}{t^2},\, \lambda \in \mathbf{K}\right\}.$$

Ainsi, pour obtenir une fonction sur $\mathbf{R}^*$, il faut, et il suffit d'avoir une solution définie sur $\mathbf{R}_-^*$ et une définie sur $\mathbf{R}_+^*$.
⚠ Il n'y a aucune raison pour que la constante sur $\mathbf{R}_-^*$ soit la même sur sur $\mathbf{R}_+^*$.
On obtient donc des solutions :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \to & \mathbf{K} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\lambda_-}{t^2} & \text{si } t < 0 \\ \frac{\lambda_+}{t^2} & \text{si } t > 0 \end{cases} \end{array}\right. ,\, (\lambda_-, \lambda_+) \in \mathbf{K}^2 \right\}.$$

Dans le cas général, si $\mathscr{D}$ est réunion de n intervalles disjoints, alors les solutions feront intervenir n constantes indépendantes.

E Recherche de solutions particulières

Puisque nous avons les solutions de l'équation homogène sur $\mathscr{D}^*$, il suffit de trouver *une* solution particulière pour avoir l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $\mathscr{D}^*$ et utiliser le théorème de structure.
Voici plusieurs méthodes :

Méthode *(L'intuition)*

Si on montre que g est une solution en la remplaçant dans l'équation, cela suffit.
On n'a pas besoin de justifier la méthode utilisée pour trouver g.

Remarque : La méthode « je regarde sur la copie du voisin » n'est pas considérée comme valable dans le cadre du programme et lors des concours. Néanmoins, elle est souvent acceptable, voire conseillée, en milieu professionnel, dès lors que le voisin est consentant.

Exemple

Résoudre sur $\mathbf{R}$, l'équation différentielle : $y' + t^2 y = 5t^2$.
Solution :

1. *Résolution de l'équation homogène.*
   $t \mapsto \frac{t^3}{3}$ est une primitive de $t \mapsto t^2$.
   On en déduit les solutions de l'équation homogène : $t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}}$ pour $\lambda \in \mathbf{K}$.
2. *Solution particulière.*
   Ici, on voit immédiatement que $t \mapsto 5$ est une solution particulière constante à l'équation avec second membre.
3. *Solutions générales.*

$$\mathscr{S} = \left\{t \mapsto \lambda \exp\left(-\frac{t^3}{3}\right) + 5,\, \lambda \in \mathbf{K}\right\}.$$

Exemple *(À repérer...)*

Résoudre sur $\mathbf{R}$, l'équation différentielle : $3y' + 2y = 5$.
Solution :
Ces équations à coefficient et second membre constant doivent être résolues très rapidement

1. *Résolution de l'équation homogène.*
   Les coefficients sont constants, donc on obtient immédiatement : $t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}t}$ pour $\lambda \in \mathbf{K}$.
2. *Solution particulière.*
   Avec à la fois des coefficients et un second membre constant, on peut trouver une solution particulière constante : $y' = 0$, ce qui donne $t \mapsto \frac{5}{2}$.
3. *Solutions générales.*

$$\mathscr{S} = \left\{t \mapsto \lambda \exp\left(-\frac{2}{3}t\right) + \frac{5}{2},\, \lambda \in \mathbf{K}\right\}.$$

Méthode *(Variation de la constante)*

$$(E_c^*)\ :\qquad \forall t\in\mathscr{D}^*,\quad y'(t)+\beta(t)y(t)=\gamma(t).$$

Sur un **intervalle** I inclus dans $\mathscr{D}^*$.

- On résout l'équation homogène sur I :
$$y_0 : t\mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-B(t)}.$$
- On fait **varier** λ, en remplaçant par une fonction dérivable $\lambda(t)$.
$$y_\gamma : t\mapsto \lambda(t)\,\mathrm{e}^{-B(t)}.$$
- On dérive y_γ et on remplace dans l'équation (E_c^*). On obtient :
$$\forall t\in I,\quad \lambda'(t)=\gamma(t)\,\mathrm{e}^{B(t)}=\frac{\gamma(t)}{y_0(t)}.$$
- On cherche une primitive *quelconque* de λ' : $t\mapsto\lambda_P(t)$.
- On *reconstruit* y_γ en multipliant par $\mathrm{e}^{-B(t)}$ pour avoir une solution particulière :
$$\forall t\in I,\quad y_\gamma(t)=\lambda_P(t)\,\mathrm{e}^{-B(t)}.$$

⚠ Ne pas oublier de multiplier λ par l'exponentielle pour avoir la solution particulière.

Exemple

Sur $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on note $(E)\ :\ y'=-\tan(t)y+\dfrac{1}{\cos(t)}$.
Résoudre (E).
Solution :

1. *Résolution de l'équation homogène.*
$t\mapsto -\ln(|\cos(t)|)$ est une primitive de $t\mapsto\tan(t)$. On en déduit les solutions de l'équation homogène ($\lambda\in\mathbf{K}$) :
$t\mapsto\lambda\,\mathrm{e}^{\ln(|\cos(t)|)}=|\cos(t)|=\cos(t)$ car sur I, $\cos(t)\geqslant 0$.
2. *Solution particulière.*
Si on n'a pas d'intuition, on peut appliquer la méthode de la variation de la constante.
On pose donc $g\ :t\mapsto\lambda(t)\cos(t)$ avec λ une fonction dérivable sur I.
$$\begin{aligned}\forall t\in I,\ g'(t)+\tan(t)g(t)&=-\lambda(t)\sin(t)+\lambda'(t)\cos(t)+\tan(t)\,\lambda(t)\cos(t)\\&=\lambda'(t)\cos(t).\end{aligned}$$
(On retrouve la forme donnée dans la méthode. Le fait que tous les $\lambda(t)$ « disparaissent » nous rassure quant à la validité de notre solution *homogène*.)
g est donc solution particulière si, et seulement si $\lambda'(t)\cos(t)=\dfrac{1}{\cos(t)}$,
c'est-à-dire $\lambda'(t)=\dfrac{1}{\cos^2(t)}$.
On choisit donc une primitive pour λ : $\lambda(t)=\tan(t)$.
Ainsi, $g(t)=\tan(t)\cos(t)=\sin(t)$.
3. *Solutions générales.*
$$\mathscr{S}=\{t\mapsto\lambda\cos(t)+\sin(t),\ \lambda\in\mathbf{K}\}.$$

Méthode *(Polynôme-exponentielle)*

On suppose l'équation à **coefficient constant** : $\beta\in\mathbf{K}$
On suppose que le second membre s'écrit sous la forme $P(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$ avec $\gamma\in\mathbf{K}$ et P un polynôme de degré n.
$$(E)\quad y'+\beta y=P(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}.$$
On peut chercher une solution particulière sous la forme :

- si $\gamma\neq-\beta$, $g:t\mapsto Q(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$ avec Q un polynôme de degré n,
- si $\gamma=-\beta$, $g:x\mapsto t\,Q(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$ avec Q un polynôme de degré n.

Exemple

Résoudre $(E)\ :\ y'-3y=\mathrm{e}^{2x}$.
Solution :
Remarque : Ici, l'énoncé travaille avec la variable x et non t. Il faut donc respecter ce choix.

1. *Résolution de l'équation homogène.*
$$\mathscr{S}_0=\left\{x\mapsto\lambda\,\mathrm{e}^{3x},\ \lambda\in\mathbf{K}\right\}.$$
2. *Solution particulière.*
Ici, le coefficient est constant $-3\in\mathbf{R}$, et le second membre s'écrit sous la forme « polynôme-exponentielle » avec un polynôme constant égal à 1.
On peut donc chercher une solution sous la forme : $x\mapsto Q(x)\,\mathrm{e}^{2x}$ avec Q un polynôme de degré 0 que l'on peut donc simplement noter $a\in\mathbf{K}$.
On pose donc $g\ :x\mapsto a\,\mathrm{e}^{2x}$, alors $g'(x)=2a\,\mathrm{e}^{2x}$ et on remplace dans l'équation différentielle : g est solution si, et seulement si $\forall x\in\mathbf{R}$, $2a\,\mathrm{e}^{2x}-3a\,\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{2x}$.
On obtient alors, $a=-1$. Ainsi, $g\ :t\mapsto -\mathrm{e}^{2x}$ est solution.
3. *Solutions générales.*
$$\mathscr{S}=\left\{x\mapsto\lambda\,\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{2x},\ \lambda\in\mathbf{K}\right\}.$$

Exemple

Résoudre $(E)\ :\ y'-3y=x\,\mathrm{e}^{2x}$.
Solution :

1. *Résolution de l'équation homogène.*
$$\mathscr{S}_0=\left\{x\mapsto\lambda\,\mathrm{e}^{3x},\ \lambda\in\mathbf{K}\right\}.$$

2. *Solution particulière.*
   On cherche une solution sous la forme : $x \mapsto Q(x)\,\mathrm{e}^{2x}$ avec Q un polynôme de degré 1 que l'on peut donc simplement noter $ax+b$.
   On pose donc $g\ : x \mapsto (ax+b)\,\mathrm{e}^{2x}$,
   alors $g'(x) = 2(ax+b)\,\mathrm{e}^{2x} + a\,\mathrm{e}^{2x} = (2ax+a+2b)\ \mathrm{e}^{2x}$.
   On remplace dans l'équation différentielle :
$$\begin{aligned} g'(x) - 3g(x) = x\,\mathrm{e}^{2x} &\iff (2ax+a+2b)\ \mathrm{e}^{2x} - 3\,(ax+b)\ \mathrm{e}^{2x} = x\,\mathrm{e}^{2x} \\ &\iff -ax+a-b = x \end{aligned}$$
   On travaille par identification sur les polynômes
   et on trouve donc $a=-1$ et $b=a=-1$.
   Ainsi, $g\ : t \mapsto -(1+x)\,\mathrm{e}^{2x}$ est solution.
3. *Solutions générales.*
$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{3x} - (1+x)\,\mathrm{e}^{2x},\ \lambda \in \mathbf{K}\right\}.$$

Exemple

Résoudre $(E)\ :\ y' - 3y = \ \mathrm{e}^{3x}$.
Solution :

1. *Résolution de l'équation homogène.*
$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{3x},\ \lambda \in \mathbf{K}\right\}.$$
2. *Solution particulière.*
   Comme précédemment, on a un second membre « polynôme-exponentielle » pour une équation à coefficient constant.
   Si on cherchait une solution sous la forme $g\ : x \mapsto a\,\mathrm{e}^{3x}$, alors, g est une solution de l'équation homogène et ne peut donner notre second membre.
   Cette situation apparaît quand $\gamma = -b$ (ici on a $3 = -(-3)$). Il faut alors multiplier $Q(x)$ par x comme précisé dans le théorème.
   On cherche donc une solution particulière sous la forme $g\ : x \mapsto ax\,\mathrm{e}^{3x}$. Alors $g'(x) = a\,\mathrm{e}^{3x} + 3ax\,\mathrm{e}^{3x}$ et on remplace dans l'équation différentielle : $g'(x) - 3g(x) = a\,\mathrm{e}^{3x} + 3ax\,\mathrm{e}^{3x} - 3ax\,\mathrm{e}^{3x} = a\,\mathrm{e}^{3x}$.
   g est donc solution si, et seulement si $a=1$.
   Ainsi, $g\ : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{3x}$ est solution particulière.
3. *Solutions générales.*
$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{3x} + x\,\mathrm{e}^{3x} = (x+\lambda)\ \mathrm{e}^{3x},\ \lambda \in \mathbf{K}\right\}.$$

Méthode *(Théorème de superposition)*

Utiliser le théorème de superposition.

Exemple

Résoudre $(E)\ :\ y' - 3y = 2\,\mathrm{e}^{3x} + (4-x)\,\mathrm{e}^{2x}$.
Solution :
On déjà résolu pour chaque partie du second membre

1. pour e^{3x} avec $g_1 : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{3x}$,
2. pour e^{2x} avec $g_2 : x \mapsto -\,\mathrm{e}^{2x}$,
3. et pour $x\,\mathrm{e}^{2x}$ avec $g_3 : x \mapsto (-1+x)\,\mathrm{e}^{2x}$.

Il suffit donc d'utiliser le théorème de superposition pour avoir une solution particulière : $2g_1 + 4g_2 - g_3$.
$g\ : x \mapsto 2x\,\mathrm{e}^{3x} - 4\,\mathrm{e}^{2x} - (-1+x)\,\mathrm{e}^{2x} = 2x\,\mathrm{e}^{3x} - (3+x)\,\mathrm{e}^{2x}$ est solution particulière.
$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto (2x+\lambda)\ \mathrm{e}^{3x} - (3+x)\,\mathrm{e}^{2x},\ \lambda \in \mathbf{R}\right\}.$$

Exemple *(Passage par les complexes)*

Résoudre $(E)\ :\ y' - 3y = \ \mathrm{e}^{x}\sin(x)$.
Solution :

1. *Résolution de l'équation homogène.*
$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{3x},\ \lambda \in \mathbf{K}\right\}.$$
2. *Solution particulière.*
   Ici, on va travailler provisoirement avec les nombres complexes et utiliser le théorème de superposition.
$$(E)\ :\ y' - 3y = \mathrm{e}^{x}\,\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{x(1+i)} - \mathrm{e}^{x(1-i)}\right).$$
   (a) On commence par la première exponentielle.
$$(E_1)\ :\ y' - 3y = \ \mathrm{e}^{x(1+i)}.$$
   On cherche une solution sous la forme $f(x) = a\,\mathrm{e}^{x(1+i)}$, avec $a \in \mathbf{C}$.
   En mettant dans l'équation différentielle, on trouve alors
$$\begin{aligned} f'(x) - 3f(x) = \ \mathrm{e}^{x(1+i)} &\iff (1+i)a\,\mathrm{e}^{x(1+i)} - 3a\,\mathrm{e}^{x(1+i)} = \ \mathrm{e}^{x(1+i)} \\ &\iff (-2+i)a = 1 \\ &\iff a = \frac{1}{-2+i} = \frac{-2-i}{5}. \end{aligned}$$
   On a donc $f_1 = -\frac{2+i}{5}\,\mathrm{e}^{x(1+i)}$ qui est solution particulière.
   (b) On peut faire de même avec l'autre second membre, mais on note qu'il est conjugué du précédent.
$$\overline{\mathrm{e}^{x(1+i)}} = \ \mathrm{e}^{x(1+i)}.$$
   Or, si $y' - 3y = \alpha$, alors $\overline{y}' - 3\overline{y} = \overline{\alpha}$.
   Ainsi, on sait donc que $f_2 = \overline{f_1}$ convient.
   (c) On applique enfin le théorème de superposition pour avoir une solution particulière « *globale* » :
$$g_c = \frac{1}{2i}\,(f_1 - f_2) = \frac{f_1 - \overline{f_1}}{2i} = \mathrm{Im}\ (f_1).$$
$$\begin{aligned} \text{Or } \mathrm{Im}\ (f_1(x)) &= \mathrm{Im}\ \left(-\frac{2+i}{5}\,\mathrm{e}^{x(1+i)}\right) \\ &= -\frac{1}{5}\mathrm{Im}\ \left((2+i)\,(\cos(x) + i\sin(x))\ \mathrm{e}^{x}\right) \\ &= -\frac{1}{5}\,(2\sin(x) + \cos(x))\ \mathrm{e}^{x}. \end{aligned}$$

3. *Solutions générales.*

$$\mathscr{S} = \left\{ x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{5}\left(2\sin(x) + \cos(x)\right)\mathrm{e}^{x},\ \lambda \in \mathbf{K} \right\}.$$

Théorème 2.9 *(Fonction trigonométrique)*

Soient $b \in \mathbf{R}$, et $(B, \omega) \in \mathbf{R}^2$

$$(E) \qquad y' + by = B\cos(\omega t).$$

On peut chercher une solution particulière **à valeurs réelles** sous la forme

$$t \mapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t).$$

Preuve

On applique le théorème de superposition comme à l'exemple précédent. ∎

Remarque : De même, pour un second membre en $B\sin(\omega t)$ on peut cherche une solution particulière sous la même forme.
Si B est un polynôme au lieu d'une constante, alors on cherche une solution en remplaçant λ et μ par deux polynômes de même degré que B.

Exemple

Résoudre dans $\mathbf{R}$, l'équation $(E) \quad y' + 2y = \cos(2t)$.

Solution :

1. *Résolution de l'équation homogène.*

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-2t},\ \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

2. *Solution particulière.*
On cherche une solution sous la forme $g\ : t \mapsto \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)$.
Alors $g'(t) = -2\lambda\sin(2t) + 2\mu\cos(2t)$.

$$\begin{aligned} g'(t) + 2g(t) = \cos(2t) &\iff -2\lambda\sin(2t) + 2\mu\cos(2t) + 2\lambda\cos(2t) + 2\mu\sin(2t) = \cos(2t) \\ &\iff (2\mu + 2\lambda)\cos(2t) + (-2\lambda + 2\mu)\sin(2t) = \cos(2t). \end{aligned}$$

En choisissant $2\mu + 2\lambda = 1$ et $-2\lambda + 2\mu = 0$ on obtient donc bien une solution.
Le système linéaire se résout avec $\lambda = \mu = \frac{1}{4}$.
Ainsi, $g\ : t \mapsto \frac{1}{4}(\cos(2t) + \sin(2t))$ est solution particulière.

3. *Solutions générales.*

$$\mathscr{S} = \left\{ t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{4}\left(\cos(2t) + \sin(2t)\right),\ \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

Exemple *(suivi)*

Chercher une solution particulière de l'équation :

$$(E_c^*)\ :\quad y'(t) - \frac{2}{t^3}y(t) = \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}.$$

Solution :

Comme on l'a vu plus haut, on peut faire appel au théorème de superposition et séparer le second membre en 2.

1. Une solution particulière de $y'(t) - \frac{2}{t^3}y(t) = \frac{1}{t^3}$ est immédiate avec $y(t) = -\frac{1}{2}$.

2. Pour l'équation $y'(t) - \frac{2}{t^3}y(t) = \frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}$. la méthode polynôme exponentielle n'est pas valable et on peut donc appliquer la variation de la constante.
On rappelle que l'équation homogène admet comme solution $t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}$ (sur $\mathbf{R}_+^*$ ou sur $\mathbf{R}_-^*$).
On trouve donc $\lambda'(t) = \frac{1}{t}$, donc $\lambda(t) = \ln|t|$ convient et on trouve une solution particulière sous la forme :
$$t \mapsto \ln|t|\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}.$$

3. Conclusion : par principe de superposition, on trouve sur $\mathbf{R}^*$
$$t \mapsto -\frac{1}{2} + \ln|t|\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}.$$

F Raccordement des solutions

Encore un peu de hors programme pour s'intéresser aux équations qui sont bien définies sur des intervalles, mais non mises sous forme résolue.
Si la fonction a s'annule sur $\mathscr{D}$, alors on est souvent obligé de résoudre sur $\mathscr{D}^*$ et il faut ensuite arriver à prolonger les solutions à $\mathscr{D}$ tout entier. Pour cela, on étudie les valeurs des constantes qui donnent des solutions prolongeables par continuité aux points singuliers, et dont le prolongement est lui-même dérivable.

Méthode *(Équation non mise sous forme résolue)*

Soient $a, b, c \in \mathscr{C}^0(I, \mathbf{K})$, on note (E) l'équation différentielle

$$a(t)y' + b(t)y = c(t).$$

Pour résoudre cette équation

1. On cherche les zéros de l'application a (ie les $t \in I$ tels que $a(t) = 0$).

2. Sur tout intervalle $J \subset I$ ne contenant pas de zéro de a, on résout l'équation

$$(E') \qquad y' + \frac{b(t)}{a(t)}y = \frac{c(t)}{a(t)}.$$

3. On cherche à prolonger par continuité les solutions trouvées à $\mathscr{D}$ tout entier, et on vérifie que les solutions prolongées sont bien solutions de (E) (vérifier la dérivabilité).

Exemple *(suivi)*

Finir la résolution de :

$$(E_c) \quad : \quad t^3 y'(t) - 2y(t) = 1 + t^2 \,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}.$$

Solution :

1. Mise sous forme résolue :
$$(E_c^*) \quad : \quad y'(t) - \frac{2}{t^3} y(t) = \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}.$$
2. Résolution des équations homogènes sur chaque intervalle.
On avait trouvé
$$\mathscr{S}_0 = \left\{ t \mapsto \begin{cases} \lambda_- \,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t < 0 \\ \lambda_+ \,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t > 0 \end{cases}, \, (\lambda_-, \lambda_+) \in \mathbf{K}^2 \right\}.$$
3. On avait trouvé une solution particulière sur $\mathbf{R}^*$
$$t \mapsto -\frac{1}{2} + \ln|t|\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}.$$
Donc les solutions sur $\mathbf{R}^*$ s'écrivent :
$$\mathscr{S}^* = \left\{ t \mapsto \begin{cases} \lambda_- \,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}} - \frac{1}{2} + \ln|t|\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t < 0 \\ \lambda_+ \,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}} - \frac{1}{2} + \ln|t|\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t > 0 \end{cases}, \, (\lambda_-, \lambda_+) \in \mathbf{K}^2 \right\}.$$
4. On cherche les fonctions prolongeables par continuité sur $\mathbf{R}$.
$\lim\limits_{t\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}} = 0$ par composition et $\lim\limits_{t\to 0} \ln|t|\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}} = 0$ par croissances comparées (poser $u = \frac{1}{t}$).
Donc pour tous λ_- et $\lambda_+ \in \mathbf{K}$, la fonction est prolongeable par continuité en 0 par $-\frac{1}{2}$.
On étudie la dérivabilité en 0 en posant le taux d'accroissement
$$\forall t \neq 0, \, \tau(t) = \frac{f(t) + \frac{1}{2}}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$
par croissances comparées.
La fonction est donc bien dérivable en 0.
5. Conclusion : Donc les solutions s'écrivent :
$$\mathscr{S} = \left\{ t \mapsto \begin{cases} \lambda_- \,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}} - \frac{1}{2} + \ln|t|\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t < 0 \\ \lambda_+ \,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}} - \frac{1}{2} + \ln|t|\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t > 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \end{cases}, \, (\lambda_-, \lambda_+) \in \mathbf{K}^2 \right\}.$$

Exemple

Résoudre sur $\mathbf{R}$, l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad ty' - y = t^2.$$

Solution :

1. On met sous forme résolue sur $\mathbf{R}^*$
$$y' - \frac{1}{t} y = t.$$
2. Résolution de l'équation homogène sur $\mathbf{R}_-^*$: Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ est $t \mapsto \ln|t|$, on trouve donc
$$\mathscr{S}_- = \{t \mapsto \lambda t, \, \lambda \in \mathbf{K}\}.$$
3. Sur $\mathbf{R}_+^*$, on obtient la même forme des solutions que sur $\mathbf{R}_-^*$.
4. Solution particulière :
Sur $\mathbf{R}_-^*$ et sur $\mathbf{R}_+^*$, on peut appliquer la méthode de la variation de la constante qui donne : $\lambda'(t) = 1$.
On trouve donc une solution particulière sous la forme : $y_0 : t \mapsto t^2$ valable sur $\mathbf{R}_-^*$ et sur $\mathbf{R}_+^*$.
5. Solutions de l'équation homogène sur $\mathbf{R}^*$:
$$\mathscr{S}_0^* = \left\{ f : t \mapsto \begin{cases} \lambda_- t + t^2 & \text{si } t < 0 \\ \lambda_+ t + t^2 & \text{si } t > 0 \end{cases}, \, (\lambda_-, \lambda_+) \in \mathbf{K}^2 \right\}.$$
6. Prolongement des solutions :
$$\lim_{t \to 0^-} f(t) = 0.$$
De même,
$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = 0.$$
Donc f est prolongeable par continuité en 0 par $f(0) = 0$. Il reste à étudier la dérivabilité en 0, pour cela on pose le taux d'accroissement :
$$\forall t \in \mathbf{R}^*, \, \tau(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lambda_\pm + t$$
Donc τ admet une limite en 0, si, et seulement si $\lambda_+ = \lambda_-$.
7. Conclusion :
$$\mathscr{S} = \left\{ t \mapsto \lambda t + t^2, \, \lambda \in \mathbf{K} \right\}.$$

G Expression des solutions

Nous récapitulons à présent comment obtenir l'ensemble des solutions à partir de la résolution de l'équation homogène et d'une solution particulière obtenues par les théorèmes précédents.

Théorème 2.10 *(Récapitulatif)*

$$(E_c)\ :\qquad \forall t\in\mathscr{D}^*,\quad a(t)y'(t)+b(t)y(t)=c(t).$$

1. On met sous forme résolue dans $\mathscr{D}^*$.
2. On trouve les solutions homogènes sur chaque intervalle de $\mathscr{D}^*$ et on raccorde ces solution.
3. On trouve une solution particulière sur chaque intervalle de $\mathscr{D}^*$, et on raccorde ces solutions sur $\mathscr{D}$.

Dans le cas particulier où l'équation est déjà sous forme résolue sur un intervalle.

$$(E_c)\ :\qquad \forall t\in I,\quad y'(t)+\beta(t)y(t)=\gamma(t).$$

Si g est une solution particulière,
et si B est une primitive de b sur I,
alors l'ensemble des solutions s'écrit

$$\mathscr{S}_c=\left\{t\mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-B(t)}+g(t),\ \lambda\in\mathbf{K}\right\}.$$

Il reste en général à définir la constante λ à l'aide de la condition initiale.
C'est ce que l'on formalise avec la *condition de Cauchy* :

Définition 2.11 *(Condition de Cauchy)*

Une **condition de Cauchy** est la donnée d'un couple $(t_0,\,y_0)\in I\times\mathbf{K}$.

Remarque : Dans le cas d'un domaine non borné, la condition de Cauchy peut être une limite.

Définition 2.12 *(Problème de Cauchy)*

Un **problème de Cauchy** du premier ordre est la donnée d'une équation différentielle linéaire du premier ordre sur un **intervalle** I

$$(E_c)\qquad y'(t)+\beta(t)y(t)=\gamma(t).$$

et d'une condition de Cauchy $(t_0,\,y_0)\in I\times\mathbf{K}$
tel que la solution doit vérifier $y(t_0)=y_0$.

On parle souvent de *condition initiale* : $y(t_0)=y_0$.

Théorème 2.13 *(Unicité de la solution)*

Un problème de Cauchy admet une unique solution.

Preuve

Il suffit de résoudre l'équation pour trouver λ tel que $\lambda\,\mathrm{e}^{-B(t_0)}+g(t_0)=y_0$. Cela donne l'existence et l'unicité avec $\lambda=(y_0-g\,(t_0))\,\mathrm{e}^{B(t_0)}$. ∎

Explications *(Interprétation poétique)*
Vous pouvez imaginer un miroir d'eau infini (imaginez, mais en gardant les yeux ouverts, sinon, vous ne pourrez pas lire la suite de l'explication).
Une brise légère souffle à la surface du miroir et la meut en une onde délicate.
Et sous les yeux de votre imagination, apparaît enfin la poésie de cette vision enchanteresse : en chaque position du miroir, le fil du courant n'est autre que la dérivée (la variation de la position).
Ainsi, vous pouvez surprendre Cauchy en train de déposer une goutte d'encre en un point du miroir et la suivre le long du courant. Il n'y a qu'une seule solution possible, qu'un seul chemin pour la goutte : celle qui s'offre à vos yeux. Si le vent n'a pas changé et que vous déposez une autre goutte au même endroit, elle suivra exactement le même chemin.
Et si je place des taches de couleurs variées en différents points du miroir, aucune des lignes imprimées à la surface du miroir n'en croisera une autre, sauf à se trouver exactement sur le même chemin, auquel cas elles se confondent.
Ces lignes formées par les gouttes d'encre s'appellent les **courbes intégrales**.

Explications *(Interprétation géométrique)*
Pour $I=\mathbf{R}$, les courbes des solutions de l'équation différentielle (E_b) sont appelées **courbes intégrales** de (E_b).
Elles forment une **partition** du plan :

- Par tout point, il passe une courbe intégrale,
- Deux courbes intégrales ne se croisent jamais.
- Aucune courbe n'est vide.

Dans le cas des équations différentielles à coefficients constants, ces courbes seront simplement les courbes exponentielles auxquelles on rajoute g_b.

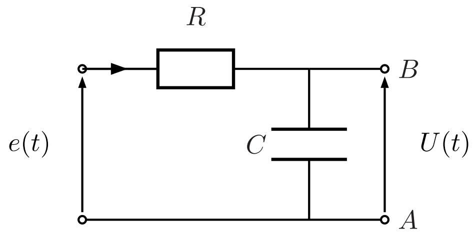
Corollaire 2.14

Lorsque le domaine $\mathscr{D}^*$ est composé de plusieurs intervalles, la donnée d'une condition de Cauchy pour chaque intervalle assure l'unicité de la solution (mais pas forcément leur raccordement).

H Un exemple type en physique : les circuits RC et RL

Le circuit est ouvert en A et B et l'intensité qui parcourt la résistance est la même que celle qui parcourt la capacité.
Ainsi

$$i = C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{U_R}{R}.$$



Or $e = U_R + U$, donc $U_R = e - U_C$.
On obtient donc l'équation différentielle :

$$C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{e-U}{R}$$

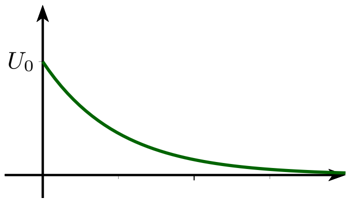
que l'on peut écrire sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}U = \frac{e}{\tau}.$$

On a posé $\tau = RC$ qui représente le temps caractéristique du système.

Régime libre ≈ solution de l'équation homogène :
Lorsque $e = 0$, on parle de *régime libre*.
La solution est :

$$U_L(t) = U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}.$$



Ce régime correspond donc à la décharge progressive du condensateur.

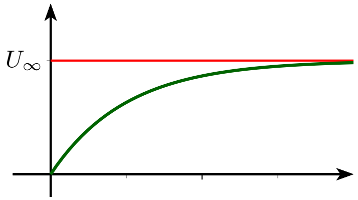
On parle aussi de *régime libre* lorsque le second membre est constant. Cela revient à translater la solution de cette constante. En effet, si $e = U_\infty$ est constant, alors on obtient

$$\frac{\mathrm{d}(U - U_\infty)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}(U - U_\infty) = 0.$$

On trouve donc une solution sous la forme

$$U_L(t) = (U_0 - U_\infty)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + U_\infty.$$

Par exemple, pour $U_0 = 0$, cela correspond à la réponse du système à un échelon de tension à partir d'un condensateur déchargé.



Régime sinusoïdal forcé ≈ solution particulière :

On peut s'intéresser à la réponse à une tension d'entrée sous la forme d'une sinusoïde

$$e(t) = E\sin(\omega t).$$

Le cours nous dit que l'on peut chercher la solution particulière sous la forme : $U_F(t) = \lambda\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, mais nous allons ici préférer le passage par les complexes tel que cela est fait en physique (on utilise aussi la notation complexe j pour ne pas confondre avec l'intensité). On résout donc

$$\tau\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + U = E\,\mathrm{e}^{j\omega t}.$$

On cherche une solution sous la forme $U(t) = B\,\mathrm{e}^{j\omega t}$. La dérivation revient alors à multiplier par $j\omega$ et on trouve

$$j\tau\omega B + B = E.$$

Donc

$$B = \frac{E}{1 + j\omega\tau} = \frac{E}{1 + (\omega\tau)^2}(1 - j\omega\tau).$$

Si la sollicitation est en sinus, alors il suffit de prendre la partie imaginaire de la solution :

$$U_F(t) = \mathrm{Im}\left(B\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right) = \frac{E}{1 + (\omega\tau)^2}(-\omega\tau\cos(\omega t) + \sin(\omega t)).$$

On peut aussi l'écrire l'écrire sous la forme d'un sinus avec la phase :

$$U_F(t) = G \times E\sin(\omega t - \varphi)$$

avec $G = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$ et $\varphi = \mathrm{Arctan}\,(\omega\tau)$.
G représente le gain : l'amplitude de départ est multipliée par G.
φ représente la phase : le signal est transmis avec un retard de phase égal à $\frac{\varphi}{\omega}$.
On peut observer que B aurait pu s'écrire directement

$$B = G\,\mathrm{e}^{i\varphi}$$

ce qui donne directement le gain et la phase. C'est ce que l'on appelle la fonction[5] de transfert. L'étude de cette fonction de transfert permet de voir les fréquences (ou les pulsations $\omega = 2\pi f$) qui sont privilégiées par le circuit. Dans le cas présent, lorsque $\omega \to 0$, le gain tend vers 1 et la phase vers 0 : le signal est « transparent ». Par contre, si $\omega \to +\infty$, alors le gain tend vers 0 (et la phase vers $\frac{\pi}{2}$). Les hautes fréquences sont atténuées. On dira que c'est un **filtre passe bas**[6]**.**
Dans le cadre du régime sinusoïdal forcé, les physiciens travaillent habituellement avec les complexes (pour éviter de confondre entre l'intensité et la tension, on adopte alors la notation j pour les complexes).

5. C'est une fonction de ω, la pulsation de l'excitation.
6. Si on prend la tension sur la résistance, on a le comportement complémentaire

Le condensateur donne l'équation : $i = jC\omega U$ (la dérivation donne un produit). On peut alors faire comme si le condensateur était une « *résistance complexe* » appelée **impédance** de valeur $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$.
Le circuit correspond alors à deux impédances en série.
Pour étudier la tension au bornes de l'une d'elles, on effectue la moyenne : $U_C = \frac{Z_C}{Z_C+R}E$.
On retrouve alors nos résultats précédents avec un minimum de calculs.
On fait de même avec le **circuit RL**, mais cette fois ci, c'est $U = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, ce qui donne $U = jL\omega i$, soit une impédance $Z_L = jL\omega$.

Régime libre vs régime forcé.
On constate que le régime libre tend vers son équilibre à la vitesse exponentielle. Ainsi, au bout d'un temps très court, son écart à son asymptote sera négligeable par rapport à l'amplitude de la solution particulière.
C'est la raison pour laquelle, on ne s'intéresse souvent qu'au régime sinusoïdal forcé en électronique.

3 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

A Méthode

On a exactement le même théorème de structure que pour les équations du premier ordre.
On suivra donc le même cheminement.
⚠ Pour le second ordre, on se limite aux équations à coefficients **constants** (sauf le second membre).

Méthode

Pour $(a, b) \in \mathbf{K}^2, c \in \mathscr{C}^0(I, \mathbf{K})$,

$$(E_c) \qquad y'' + ay' + by = c(t).$$

1. On résout l'équation homogène, et on note l'ensemble des solutions $\mathscr{S}_0$.
2. On trouve *une* solution particulière de l'équation avec second membre : g. L'ensemble des solutions est alors :
$$\mathscr{S}_c = \mathscr{S}_0 \text{“}+\text{”} g = \{t \mapsto f(t) + g(t),\ f \in \mathscr{S}_0\}.$$
3. On trouve les constantes à l'aide de la *double* condition de Cauchy.

B Équation homogène

Théorème 3.1

Soit $(a, b) \in \mathbf{K}^2$,

$$(E_0) \qquad y'' + ay' + by = 0.$$

On appelle **équation caractéristique** de (E_0), l'équation $(\chi)\quad x^2 + ax + b = 0$.
On note Δ son discriminant.
L'ensemble des solutions s'écrit

$$\mathscr{S}_0 = \left\{\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\ \{\varphi_1, \varphi_2\}$$

avec

- Si $\Delta \neq 0, r_1$ et r_2 les deux racines de (χ)
$\varphi_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{r_1 t}$
$\varphi_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{r_2 t}$.
- Si $\Delta = 0, r$ est racines double de (χ)
$\varphi_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$
$\varphi_2 : t \mapsto \mathbf{t}\,\mathrm{e}^{rt}$.
- Si $\Delta < 0, r_1$ et r_2 les deux racines *complexes conjuguées* de (χ)
On peut alors choisir les fonction à valeurs réelles suivantes :
$\varphi_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)$
$\varphi_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)$

où $\quad \alpha = \frac{r_1+r_2}{2} = \mathfrak{Re}\,(r_1)$ et $\beta = \frac{r_1-r_2}{2i} = \mathfrak{Im}\,(r_1)$.

Preuve

1. Chercher des solutions sous la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{\gamma t}$
2. Méthode de la variation de la constante en distinguant les cas selon Δ.
3. Pour $\Delta < 0$, on résout dans $\mathbf{C}$ puis on cherche les solutions réelles parmi elles.

■

La proposition qui suit, permet de présenter les solutions un peu différemment dans le cas réel. C'est utile en particulier en physique avec les phénomènes oscillatoires. φ représente le décalage de phase, et β la pulsation.

Propriété 3.2 *(Rappel)*

$\forall (A, B) \in \mathbf{R}^2, \exists (C, \varphi) \in \mathbf{R}^2$, tels que

$$\forall t \in \mathbf{R}, A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t) = C\cos(\beta t - \varphi).$$

Preuve

On écrit l'expression : $\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\left(\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(\beta t) + \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\beta t)\right)$.

On peut alors poser $\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos(\varphi)$ et $\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin(\varphi)$ (car la somme des carrés vaut 1).
On trouve bien l'expression voulue. En physique φ correspond à la *phase*. ■

C Équation avec second membre

Théorème 3.3

$(a,b) \in \mathbf{K}^2, c \in \mathscr{C}^0(I,\mathbf{K})$,

$$(E_g) \qquad y'' + ay' + by = c(t).$$

On note $\mathscr{S}_c$ les solutions de (E_c).

1. Il existe toujours une solution particulière φ_0 à l'équation différentielle (E_c),
2. Si φ_0 est une telle solution et φ_1, φ_2 des solutions de l'équation homogène telles que définies dans le précédent théorème, Alors

$$\mathscr{S}_c = \left\{\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 + \varphi_0 \ ; \ (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2\right\}.$$

Preuve
La première partie de la preuve est admise.
La deuxième partie de la preuve est semblables aux preuves déjà faites. ■

D Recherche d'une solution particulière

Exemple *(L'intuition)*
Résoudre l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = b$ où $\omega, b \in \mathbf{R}^2$.
Ici, la solution particulière apparaît directement sans travail particulier.

Méthode *(Polynôme-exponentielle)*

Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et $(A,\gamma) \in \mathbf{R}^2$.

$$(E) \qquad y'' + ay' + by = A\,\mathrm{e}^{\gamma t}.$$

On peut chercher une solution de (E) sous la forme

- Si γ n'est pas racine de (χ), $g \ : \ t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\gamma t}$.
- Si γ est racine simple de (χ), $g \ : \ t \mapsto \lambda t\,\mathrm{e}^{\gamma t}$.
- Si γ est racine double de (χ), $g \ : \ t \mapsto \lambda t^2\,\mathrm{e}^{\gamma t}$.

Remarque : Si on remplace A par une fonction polynômiale P, alors on a le même type de raisonnement qu'avec l'ordre 1.
Il existe une fonction polynomiale Q de même degré que P telle que g soit solution particulière avec

- si γ est n'est pas racine, $g : t \mapsto Q(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$,
- si γ est racine simple, $g : t \mapsto tQ(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$,
- si γ est racine double, $g : t \mapsto t^2Q(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$.

Méthode

Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, et $(B,\omega) \in \mathbf{R}^2$

$$(E) \qquad y'' + ay' + by = B\cos(\omega t).$$

On peut chercher une solution particulière sous la forme

$$t \mapsto \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t) \qquad \text{ou} \qquad t \mapsto \lambda\,\mathbf{t}\cos(\omega t) + \mu\,\mathbf{t}\sin(\omega t)\,.$$

Remarque : De même, pour un second membre en $B\sin(\omega t)$ on peut cherche une solution particulière sous la même forme.
La deuxième forme avec la multiplication par t intervient lorsque $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$ sont solutions de l'équation homogène.

Exemple
Résoudre l'équation $(E) \quad y'' + y' + y = \cos(2t)$.

Exemple
Résoudre l'équation $(E) \quad y'' + y = \cos(t)$.

Théorème 3.4 *(Théorème de superposition)*

si g_1 est solution particulière de $y'' + ay' + by = c_1$,
si g_2 est solution particulière de $y'' + ay' + by = c_2$,
alors $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$, $\lambda g_1 + \mu g_2$ est solution de $y'' + ay' + by = \lambda c_1 + \mu c_2$.

Définition 3.5 *(Problème de Cauchy)*

$(a,b) \in \mathbf{R}^2, c \in \mathscr{C}^0(I,\mathbf{R})$,

$$(E) \qquad y'' + ay' + by = c(t).$$

Pour $(t_0, y_0, v_0) \in I \times \mathbf{R}^2$, on appelle **problème de Cauchy**, la recherche d'une application $f \in \mathscr{S}_c$ vérifiant les **conditions initiales** $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = v_0$.

Théorème 3.6 *(Unicité de la solution)*

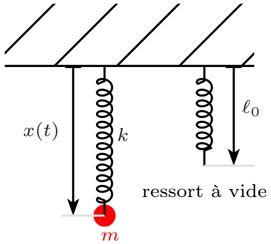
Un problème de Cauchy admet une unique solution.

⚠ Comme l'équation est du second ordre, il faut une **Double** condition aux limite : à la fois sur f et sur f'.
Pour un objet en mouvement, cela correspond à fixer à la fois sa position et sa vitesse à l'instant t_0. S'il manque une de ces deux informations, il n'y a pas unicité de la

solution.

E Exemple complet : l'oscillateur harmonique

Modélisation :
Soit une masse ponctuelle m qui oscille librement au bout d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. On suppose que le ressort est vertical, et que la masse pendue au ressort se déplace uniquement suivant un axe vertical.
On note $x(t)$ l'élongation du ressort à l'instant t.
$x(t)$ est donc la distance entre le point d'ancrage du ressort et la masse m.
Les forces qui s'exercent sur la masse m sont donc :



- la gravité g,
- la force de rappel du ressort $-k(x-\ell_0)$.

Dans un premier temps, les amortissements sont négligés.
Le mouvement étant vertical, on se contente d'étudier la variable d'élongation x. L'accélération s'exprime alors comme la dérivée seconde de la position : $x''(t)$.
La seconde loi de Newton donne donc l'équation

$$mx'' = mg - k(x-\ell_0).$$

Si on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, alors l'équation du mouvement peut s'écrire :

$$x'' + \omega_0^2 x = g + \omega_0^2 \ell_0.$$

C'est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre avec second membre.

Changement de variable : On remarque que $x_0 : t \mapsto = \frac{g}{\omega_0^2} + \ell_0$ est une solution particulière constante. Mécaniquement, cette solution x_0 est la position d'équilibre du mobile : la gravité équilibre exactement la force de rappel du ressort : l'élongation est constante car le mobile ne bouge pas.
Si on pose $z : t \mapsto x(t) - x_0$, alors, on se ramène à une équation différentielle homogène. En mécanique, ce changement de variable est naturel, il correspond à choisir comme origine du repère le point l'équilibre x_0.
La nouvelle équation du mouvement est donc

$$z'' + \omega_0^2 z = 0.$$

Résolution : L'équation caractéristique est $x^2 + \omega_0^2 = 0$ dont les solutions sont $x_1 = i\omega_0$ et $x_2 = -i\omega_0$.

$$\exists A \in \mathbf{R},\ \phi \in]-\pi,\pi[, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad z(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi).$$

ω_0 représente ainsi la pulsation d'oscillation (période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$).
L'amplitude A et la phase ϕ dépendent des conditions initiales.

Analyse énergétique : Si on multiplie l'équation initiale par $z'(t)$, on trouve

$$mz'(t)z''(t) + kz'(t)z(t) = 0.$$

On reconnaît la dérivée de $\frac{1}{2}m\left(z'\right)^2 + \frac{1}{2}kz^2$ qui est donc constante (dérivée nulle).
$z' = v$ désigne la vitesse instantanée du mobile à l'instant t, on peut alors poser

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{et} \qquad E_p = \frac{1}{2}kz^2.$$

La somme de E_c (énergie cinétique) et de E_p (énergie potentielle) est donc constante. Cette somme s'appelle l'énergie mécanique et elle peut être facilement évaluée lorsque z est extrémal ($v=0$). A étant l'amplitude on trouve donc

$$E_c + E_p = E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2.$$

Ajout d'un amortissement : on peut rajouter un amortissement proportionnel à la vitesse. L'équation différentielle s'écrit alors

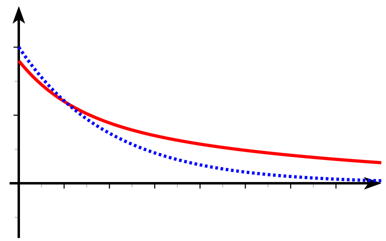
$$z'' + 2\sigma\omega_0 z' + \omega_0^2 z = 0.$$

$2\sigma\omega_0 \geqslant 0$ représente l'amortissement (homogène à une pulsation). σ s'appelle le coefficient d'amortissement.
L'équation caractéristique est $x^2 + 2\sigma\omega_0 x + \omega_0^2 = 0$.
Son discriminant est $\Delta = 4(\sigma^2\omega_0^2 - \omega_0^2) = (2\omega_0)^2\left(\sigma^2 - 1\right)$.

- Si $\sigma > 1$,
  alors $\Delta > 0$ et le régime n'est pas oscillant (l'amortissement est trop fort).
  Les solutions de l'équation caractéristique sont $x_\pm = -\omega_0\left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2-1}\right)$.

  $$z(t) = \left(A\,\mathrm{e}^{\omega_0\sqrt{\sigma^2-1}\,t} + B\,\mathrm{e}^{-\omega_0\sqrt{\sigma^2-1}\,t}\right)\mathrm{e}^{-\sigma\omega_0 t}.$$

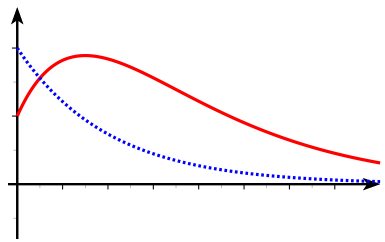
  La solution tend vers 0 de façon exponentielle.



Régime apériodique

- Si $\sigma = 1$,
  alors $\Delta = 0$ et le régime est n'est plus périodique.
  C'est un cas critique.
  La double solution de l'équation caractéristique est $x = -\omega_0$.

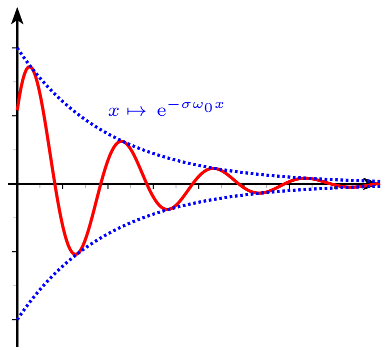
  $$z(t) = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.$$



Régime critique

- Si $\sigma < 1$,
  alors $\Delta < 0$ et le régime est périodique amorti.
  Ainsi les solutions de l'équation caractéristique sont $x_\pm = -\omega_0\left(\sigma \pm i\sqrt{1-\sigma^2}\right)$.
  On pose $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\sigma^2}$ la pseudo-pulsation.

  $$z(t) = A\,\mathrm{e}^{-\sigma\omega_0 t}\cos\left(\Omega\, t - \phi\right).$$



Régime amorti

L'amortissement se traduit par « l'enveloppe » exponentielle décroissante et par une altération de la période d'oscillation.

On retrouve l'équation non amortie pour $\sigma = 0$.

Si on note $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ la pseudo-période, alors $z(t+T) = z(t)\,\mathrm{e}^{-\sigma\omega_0 T}$.

Cela invite à introduire le décrément logarithmique $\delta = -\ln\frac{x(t+T)}{x(t)} = \sigma\omega_0 T$.

Le décrément logarithmique peut être obtenu expérimentalement en observant la variation d'amplitude sur une période (n'importe laquelle).

Voir le cours de physique pour des interprétations dignes de ce nom.

Régime sinusoïdal forcé : On peut imaginer que l'extrémité haute du ressort est fixé à un petit moteur qui exerce sur elle une force ou un mouvement oscillatoire sinusoïdal de période ω.
On peut alors écrire l'équation sous la forme $z'' + 2\sigma\omega_0 z' + \omega_0^2 z = K\sin(\omega t + \phi)$.
On distingue alors deux régimes

- Le régime libre (ou transitoire) : il correspond à la solution de l'équation homogène,
- Le régime sinusoïdal forcé : il correspond à la solution particulière.

Comme la solution de l'équation homogène tend exponentiellement vers 0 ($\sigma > 0$), alors pour un temps suffisamment grand (après quelques périodes), la solution sera « très proche » de la solution particulière [7]. C'est la raison pour laquelle, en physique, on se contente souvent de ne calculer que la solution particulière correspondant au régime sinusoïdal forcé.
La recherche de cette solution particulière se fait aisément avec les nombres complexes.

F Les équations fonctionnelles

Un exercice très classique consiste à résoudre une équation fonctionnelle en se ramenant à une équation différentielle.
Pour cela, la méthode habituelle est de dériver l'équation fonctionnelle une ou plusieurs fois. La preuve se fait alors par **analyse-synthèse**.

Remarques sur les hypothèses :

- Il faut souvent commencer l'exercice en justifiant que la fonction peut être dérivée le nombre de fois voulu. Ces hypothèses de dérivabilité s'obtiennent généralement à partir de la relation fonctionnelle elle-même.
- Même, lorsque la fonction n'est pas supposée dérivable (ou pas suffisamment), cette méthode peut-être un bon point de départ pour trouver un certain nombre de solutions et affiner son intuition en vue du cas général.

Exemple

Trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Solution :
Analyse : on suppose que f est solution.
Comme f est dérivable, et $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ l'est aussi, alors par composée, $x \mapsto f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ l'est aussi.
f' est donc dérivable, c'est-à-dire que f est deux fois dérivable.

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad f''(x) = -f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - x)\right) = -f(x).$$

Donc f est solution de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 0$$

Ainsi, il existe $(\lambda,\, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tel que f s'écrive sous la forme $x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x$.

Synthèse :
Si $\exists \lambda, \mu \in \mathbf{R}^2$, tel que $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x$, alors
f est dérivable et $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) - f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\lambda\sin x + \mu\cos x - \lambda\sin x - \mu\cos x =$

7. Nous pourrons donner plus tard dans l'année, une définition plus rigoureuse de « très proche » avec l'analyse asymptotique.

$-2\lambda \sin x$.
f est solution si et seulement si $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) - f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$.
En particulier pour $x = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne $\lambda = 0$.
Ainsi $\exists \mu \in \mathbf{R}$, tel que $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \mu \sin x$, et on vérifie alors que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) - f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0.$$

Donc f est solution.
Conclusion :
L'ensemble des solutions est

$$\{x \mapsto \mu \sin x,\ \mu \in \mathbf{R}\}.$$

G Le changement de variable

Dans certains exercices, l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre n'est pas à coefficients constants. On peut alors chercher un changement de variable pour s'y ramener.
À travers l'exemple ci-dessous, nous donnons une méthode pour trouver le bon changement de variable.

Exemple

On veut résoudre sur $\mathbf{R}_+^*$:

$$4xy'' + 2y' - y = 0.$$

On cherche un changement de variable du type $x = \varphi(t)$.
Formellement, pour que tout se passe bien on demande que φ soit deux fois dérivable, bijective et de réciproque aussi deux fois dérivable.
on peut transformer l'équation avec $\forall t,\ z(t) = y(\varphi(t))$.
Par composition, z est aussi deux fois dérivable.
Mais il est plus facile de trouver le changement de variable dans l'autre sens et en notant $\psi = \varphi^{-1}$, on trouve

$$\forall x > 0,\ y(x) = z(\psi(x)).$$

On peut alors dériver : $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned}
y(x) &= z(\psi(x)) && = z(t) \\
y'(x) &= \psi'(x) z'(\psi(x)) && = \psi'(x) z'(t) \\
y''(x) &= (\psi'(x))^2 z''(\psi(x)) + \psi''(x) z'(\psi(x)) && = (\psi'(x))^2 z''(t) + \psi''(x) z'(t).
\end{aligned}$$

Pour alléger les notations, on a écrit $t = \psi(x)$.
En remplaçant dans l'équation du départ, on trouve alors

$$\forall x > 0,\ 4x(\psi'(x))^2 z''(t) + (4x\psi''(x) + 2\psi'(x)) z'(t) - z(t) = 0.$$

On veut que le coefficient $4x(\psi'(x))^2$ devant $z''(t)$ soit constant, on peut donc prendre ψ telle que $\forall x > 0,\ \psi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
On choisit par exemple

$$\psi : x \mapsto \sqrt{x}$$

qui est bien deux fois dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
Cela revenait donc à poser $t = \sqrt{x}$ ou $x = t^2$.
$\forall x > 0$,

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \sqrt{x} \\
\psi'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
\psi''(x) &= -\frac{1}{4x\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation, on trouve

$$\forall x > 0,\ z''(t) + \left(-\frac{4x}{4x\sqrt{x}} + \frac{2}{2\sqrt{x}}\right) z'(t) - z(t) = 0.$$

C'est-à-dire

$$\forall t > 0,\ z''(t) - z(t) = 0.$$

Donc z solution si, et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$\forall t > 0,\ z(t) = \lambda\, \mathrm{e}^t + \mu\, \mathrm{e}^{-t}.$$

Or $t = \sqrt{x}$, donc les solutions de l'équation initiale forment l'ensemble

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \mu\, \mathrm{e}^{-\sqrt{x}},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

Bien sûr, ici l'exercice est fait pour que tout se passe bien...
Quelques remarques rédactionnelles :
Si on reprend l'exercice précédent, supposons que nous ayons eu comme indication (ou trouvé au brouillon) que le changement de variable $x = t^2$ convient. La difficulté est alors de rédiger rigoureusement et on a différentes possibilités :

- *Méthode 1 : par équivalence*
  Pour $y :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$, $\forall t > 0$, on pose $z(t) = y(t^2)$.
  On travaille alors par étapes :

  1. On montre que $y \in \mathscr{D}^2(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R}) \iff z \in \mathscr{D}^2(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R})$.
     Si $y \in \mathscr{D}^2(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R})$,
     comme on sait que $t \mapsto t^2 \in \mathscr{D}^2(]0, +\infty[,]0, +\infty[)$,
     on a par composition $z \in \mathscr{D}^2(]0, +\infty[, \mathbf{R})$.
     Réciproquement, si $z \in \mathscr{D}^2(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R})$, comme on sait que $x \mapsto \sqrt{x} \in \mathscr{D}^2(]0, +\infty[,]0, +\infty[)$, alors par composition, $y \in \mathscr{D}^2(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R})$.

2. On fait les calculs de dérivées.
   Les calculs de dérivées de z sont souvent plus simples, mais la rédaction est plus facile à partir de celles de y.
   On suppose donc que y et z sont deux fois dérivables.
   Ainsi $\forall x > 0$,
   $$\begin{aligned} y(x) &= z\left(\sqrt{x}\right) \\ y'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} z'\left(\sqrt{x}\right) \\ y''(x) &= \frac{1}{4x} z''(\sqrt{x}) - \frac{1}{4x\sqrt{x}} z'\left(\sqrt{x}\right). \end{aligned}$$
3. On montre que y solution de l'équation de départ si, et seulement si z est solution d'une équation différentielle à déterminer.
   $$\begin{aligned} y \text{ solution de } E &\iff \forall x > 0,\ 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0 \\ &\iff \forall x > 0,\ z''(\sqrt{x}) - z(\sqrt{x}) = 0. \end{aligned}$$
   Or, $x \mapsto \sqrt{x}$ est bijective de $\mathbf{R}_+^*$ dans lui-même, donc
   $$y \text{ solution de } E \iff \forall t > 0,\ z''(t) - z(t) = 0.$$
4. On résout l'équation en z.
   z vérifie $z'' - z' = 0 \iff \exists(\lambda,\, \mu) \in \mathbf{R}^2,\ \forall t > 0,\ z(t) = \lambda\,\mathrm{e}^t + \mu\,\mathrm{e}^{-t}$.
5. Par équivalence, on en déduit les solutions de l'équation de départ.
   On obtient donc l'ensemble des solutions
   $$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \mu\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}},\ (\lambda,\, \mu) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

- *Méthode 2 : par analyse-synthèse.*
  On suppose y solution et pour tout $t > 0$, on note $z(t) = y\left(t^2\right)$.
  Alors z est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ par composition et
  $$\forall x > 0,\ y(x) = z\left(\sqrt{x}\right).$$
  Ainsi $\forall x > 0$,
  $$\begin{aligned} y(x) &= z\left(\sqrt{x}\right) \\ y'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} z'\left(\sqrt{x}\right) \\ y''(x) &= \frac{1}{4x} z''(\sqrt{x}) - \frac{1}{4x\sqrt{x}} z'\left(\sqrt{x}\right). \end{aligned}$$
  Or y solution de l'équation de départ, donc en remplaçant :
  $$\forall x > 0,\ z''(\sqrt{x}) - \frac{1}{\sqrt{x}} z'(\sqrt{x}) + \frac{1}{\sqrt{x}} z'(\sqrt{x}) - z(\sqrt{x}) = 0.$$
  Donc
  $$\forall x > 0,\ z''(\sqrt{x}) - z(\sqrt{x}) = 0.$$
  Or $x \mapsto \sqrt{x}$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans lui-même, donc
  $$\forall t > 0,\ z''(t) - z(t) = 0.$$
  Ici, le caractère surjectif est important pour bien montrer que c'est valable pour tout $t > 0$ et pas seulement quelques uns qui seraient image de x par $\sqrt{\cdot}$.
  Donc $\exists(\lambda,\, \mu) \in \mathbf{R}^2,\ \forall t > 0,\ z(t) = \lambda\,\mathrm{e}^t + \mu\,\mathrm{e}^{-t}$.
  Or $\forall x > 0,\ y(x) = z\left(\sqrt{x}\right)$, donc
  $$\forall x > 0,\ y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \mu\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}.$$
  On n'a ici trouvé qu'une condition nécessaire et il reste à faire la synthèse.
  On considère donc $(\lambda,\, \mu) \in \mathbf{R}^2$ et $y\ : x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \mu\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$.
  y est bien deux fois dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ par composition.
  On note alors $z\ : t\ \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^t + \mu\,\mathrm{e}^{-t}$ qui est aussi deux fois dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ de sorte que $\forall x > 0,\ y(x) = z\left(\sqrt{x}\right)$.
  Les calculs des dérivées réalisés à l'analyse s'appliquent et on peut donc dire $\forall x > 0,\ 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = z''(\sqrt{x}) - z(\sqrt{x}) = 0$. Donc y est bien solution.
  Conclusion : l'ensemble des solutions est
  $$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \mu\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}},\ (\lambda,\, \mu) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

- *Variations sur la méthode 2.*
  On reprend l'analyse synthèse, mais on fait les calculs de dérivées à partir de z.
  y étant dérivable sur $]0, +\infty[$, z l'est par composition.
  On trouve alors $\forall t > 0$,
  $$\begin{aligned} z(t) &= y\left(t^2\right) \\ z'(t) &= 2ty'\left(t^2\right) \\ z''(t) &= 4t^2 y''\left(t^2\right) + 2y'(t^2). \end{aligned}$$
  $\forall x > 0$, on obtient alors :
  $$\begin{aligned} z(\sqrt{x}) &= y\,(x) \\ z'(\sqrt{x}) &= 2\sqrt{x}y'\,(x) \\ z''(\sqrt{x}) &= 4xy''\,(x) + 2y'(x). \end{aligned}$$
  Ainsi $\forall x > 0$,
  $$0 = 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = z''(\sqrt{x}) - z(\sqrt{x}).$$
  Or $\sqrt{\cdot}$ est surjective de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ donc $\forall t > 0,\ z''(t) - z'(t) = 0$.
  On termine ensuite comme au point précédent.

H Preuve des solutions de l'équation homogène pour l'ordre 2

1. Chercher des solutions sous la forme $x \mapsto e^{\gamma x}$
   On pose donc $\varphi : x \mapsto e^{\gamma x}$, alors $\forall x \in \mathbf{R}$,
$$\begin{aligned}\varphi(x) &= e^{\gamma x},\\ \varphi'(x) &= \gamma\, e^{\gamma x},\\ \varphi''(x) &= \gamma^2\, e^{\gamma x}.\end{aligned}$$
   Donc
$$\begin{aligned} a\varphi'' + b\varphi' + c\varphi = 0 &\iff \forall x \in \mathbf{R},\ a\gamma^2 e^{\gamma x} + b\gamma\, e^{\gamma x} + c\, e^{\gamma x} = 0\\ &\iff \forall x \in \mathbf{R},\ (a\gamma^2 + b\gamma + c)\, e^{\gamma x} = 0\\ &\iff a\gamma^2 + b\gamma + c = 0 \qquad \text{(car l'exponentielle ne s'annule jamais)}\\ &\iff \gamma \text{ est solution de l'équation caractéristique.}\end{aligned}$$

2. Méthode de la variation de la constante en distinguant les cas selon Δ.
   Soit $f \in S_0$.
   On pose r une solution de l'équation caractéristique (quelle que soit la valeur de $\Delta \geqslant 0$).
   Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe $\lambda(x) \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = \lambda(x)\, e^{rx}$ (car l'exponentielle ne s'annule jamais).
   λ ainsi définie est une fonction deux fois dérivable (comme quotient de fonctions deux fois dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas) et pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda(x)\, e^{rx},\\ f'(x) &= \lambda'(x)\, e^{rx} + r\lambda(x)\, e^{rx},\\ f''(x) &= \lambda''(x)\, e^{rx} + 2r\lambda'(x)\, e^{rx} + r^2\lambda(x)\, e^{rx}.\end{aligned}$$
   Donc
$$\begin{aligned} f \in S_0 &\iff af'' + bf' + cf = 0\\ &\iff \forall x \in \mathbf{R},\ \big(a\lambda''(x) + 2ar\lambda'(x) + ar^2\lambda(x) + b\lambda'(x) + br\lambda(x) + c\lambda(x)\big)\ e^{rx} = 0\\ &\iff a\lambda'' + (2ar+b)\lambda' + (ar^2 + br + c)\lambda = 0 \quad \text{(car l'exponentielle ne s'annule jamais)}\\ &\iff a\lambda'' + (2ar+b)\lambda' + (\underbrace{ar^2 + br + c}_{=0})\lambda = 0\\ &\iff a\lambda'' + (2ar+b)\lambda' = 0\\ &\iff \lambda' \text{ est solution de l'équation différentielle } ay' + (2ar+b)y = 0\\ &\iff \exists \mu \in \mathbf{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbf{R},\ \lambda'(x) = \mu\, e^{-\frac{2ar+b}{a}x} \qquad (\text{car } a \neq 0).\end{aligned}$$
   - Si $\Delta = 0$, alors $r = -\frac{b}{2a}$, donc $2ar + b = 0$. Ainsi, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\lambda'(x) = \mu$, donc λ est de la forme $x \mapsto \mu_1 x + \mu_2$ avec $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbf{R}^2$.
     f s'écrit alors $f(x) = \lambda(x)\, e^{rx} = \mu_1 x\, e^{rx} + \mu_2\, e^{rx}$, ce qui est bien la forme du théorème.
   - Si $\Delta > 0$, alors $2ar + b \neq 0$ et λ s'écrit sous la forme $\mu_1\, e^{-\frac{2ar+b}{a}x} + \mu_2$ (on a renommé $\mu_1 = \frac{a\mu}{2ar+b}$).
     Ainsi, $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \lambda(x)\, e^{rx} = \mu_1\, e^{-(r+\frac{b}{a})x} + \mu_2\, e^{rx}$.
     Or si r est une des solutions de l'équation différentielle, alors $-(r + \frac{b}{a})$ est l'autre.
     Les solutions sont donc bien sous la forme énoncée dans le théorème.

3. Le point précédent pour $\Delta > 0$ reste valable si on se place dans $\mathbf{C}$ au lieu de $\mathbf{R}$. Il faut ensuite sélectionner les solutions réelles parmi toutes celles trouvées.
   Les solutions (complexes) sont donc de la forme $x \mapsto \lambda\, e^{r_1 x} + \mu\, e^{r_2 x}$ pour $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}$ où r_1 et r_2 désignent les solutions complexes de l'équation caractéristique.
   Comme l'équation caractéristique est à coefficients réels, les deux racines sont conjuguées.
   On note donc $r = r_1$ et $\overline{r} = r_2$.
   Si f est solution réelle de l'équation, elle est a fortiori solution complexe. Donc toute solution de mon équation s'écrit nécessairement sous la forme
$$f\ :\ x \mapsto \lambda\, e^{rx} + \mu\, e^{\overline{r}x} \quad \text{avec}(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$
   Voyons à présent à quelle condition sur λ et μ la solution f convient (c'est-à-dire est réelle).
$$\begin{aligned} f \in S &\iff \forall x \in \mathbf{R} \quad \overline{f(x)} = f(x)\\ &\iff \forall x \in \mathbf{R} \quad \overline{\lambda\, e^{rx} + \mu\, e^{\overline{r}x}} = \lambda\, e^{rx} + \mu\, e^{\overline{r}x}\\ &\iff \forall x \in \mathbf{R} \quad \overline{\lambda}\, e^{\overline{r}x} + \overline{\mu}\, e^{rx} = \lambda\, e^{rx} + \mu\, e^{\overline{r}x}\\ &\iff \forall x \in \mathbf{R} \quad \left(\overline{\lambda} - \mu\right)\ e^{\overline{r}x} = (\lambda - \overline{\mu})\ e^{rx}\\ &\iff \forall x \in \mathbf{R} \quad \left(\overline{\lambda} - \mu\right)\ e^{(\overline{r}-r)x} = \lambda - \overline{\mu}.\end{aligned}$$
   Le membre de droite est constant, donc celui de gauche doit l'être aussi.
   Or $\overline{r} - r \neq 0$ (sinon $\mathfrak{Im}\,(r) = 0$ ce qui est absurde car $\Delta < 0$).
   On peut donc écrire
$$f \in S \iff \overline{\lambda} = \mu.$$
   (je n'ai justifié que l'implication, mais la réciproque est évidente car alors $\lambda = \overline{\mu}$)
   La fonction f s'écrit donc
$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda\, e^{rx} + \overline{\lambda}\, e^{\overline{r}x}\\ &= \lambda\, e^{rx} + \overline{\lambda\, e^{rx}}\\ &= 2\,\mathfrak{Re}\,(\lambda\, e^{rx})\,.\end{aligned}$$
   Si $r = \alpha + i\beta$ et $\lambda = u + iv$, alors
$$(u+iv)\, e^{(\alpha+i\beta)x} = (u+iv)\, e^{\alpha x}\,(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))\,.$$
   Donc en prenant la partie réelle :
$$f(x) = 2u\, e^{\alpha x}\cos(\beta x) - 2v\, e^{\alpha x}\sin(\beta x) \quad \text{avec} \quad (u, v) \in \mathbf{R}^2.$$
   Lorsque (u, v) décrivent $\mathbf{R}^2$; $(2u, -2v)$ décrivent également $\mathbf{R}^2$.
   En posant de nouvelles constantes $\widetilde{\lambda} = 2u$ et $\widetilde{\mu} = -2v$, je peux écrire
$$S = \left\{x \mapsto \widetilde{\lambda}\, e^{\alpha x}\cos(\beta x) + \widetilde{\mu}\, e^{\alpha x}\sin(\beta x),\ (\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu}) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$