Fractions rationnelles

Notation : Dans tout le chapitre, $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1 Le corps $\mathbf{K}(X)$

L'ensemble des polynômes possède une terrible lacune : on ne peut pas diviser.
Nous avons vu en effet que les seuls polynômes inversibles sont les constantes non nulles. On se retrouve dans une situation très analogue à celle de $\mathbf{Z}$: on dispose d'un anneau commutatif (intègre) avec une somme et un produit, mais pas de division possible.
Pour la somme, nous avons bien un *opposé*, ce qui permet de définir la soustraction qui fait le chemin inverse de l'addition, mais nous ne possédons rien de tel pour le produit.
L'idée de ce chapitre est de palier à cette lacune, et nous allons donc suivre la même méthode que celle qui a permis de passer de $\mathbf{Z}$ à $\mathbf{Q}$: chercher le plus petit sur-ensemble possible qui permette la division tout en conservant la structure d'anneau commutatif. On obtient alors la structure de **corps.**

Corps[1]= anneau commutatif muni d'une division.

Ainsi, dans un corps, tout élément (sauf 0) admet un *symétrique* pour le produit que l'on nomme *inverse*, c'est-à-dire un élément b tel que $ab = ba = 1$.

La démarche pour construire les fractions rationnelles à partir des polynômes est donc la même que celle qui permet d'obtenir les fractions réelles $\mathbf{Q}$ à partir des entiers relatifs : on *définit* des fractions $\frac{p}{q}$ sur lesquelles on reconstruit les opérations de l'anneau commutatif (attention, l'écriture d'une fraction n'est pas unique).

La suite est plus formelle et peut être sautée en première lecture.
D'un point de vue formel, la notation sous forme de fraction $\dfrac{p}{q}$ traduit en réalité un couple (p, q) avec $q \neq 0$ que l'on assimile également à tous les autres couples qui donnent la même fraction : $\dfrac{\lambda p}{\lambda q} = \dfrac{p}{q}$ $(\lambda \neq 0)$.
Cela veut dire que tous les objets $(\lambda p, \lambda q)$ doivent être considérés comme une même fraction. Cela s'obtient en définissant une relation d'équivalence sur l'ensemble des couples :

$$(p, q) \sim (p', q') \iff pq' = p'q.$$

On vérifie aisément que c'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des couples et on travaille alors sur l'ensemble des classes d'équivalences.
Une fraction *est* donc une classe d'équivalence. Souvent, on la représente par un couple (p, q) de cette classe qui vérifie $p \wedge q = 1$ (sous réserve d'avoir le PGCD).
Sur cet ensemble, on redéfinit les opérations de l'anneau commutatif (on garde la même notation sur le corps des fractions que sur l'anneau, même si formellement les opérations ne sont pas les mêmes car définies sur des objets différents) :

1. En fonction des définitions, certains imposent qu'un corps soit commutatif et d'autres non... dans le programme, on se limite aux corps commutatifs, et on ne précise donc pas.

1. *somme :* $(p,\, q) + (p',\, q') = (pq' + p'q,\, qq')$ pour traduire $\dfrac{p}{q} + \dfrac{p'}{q'} = \dfrac{pq' + p'q}{qq'}$.
2. *produit :* $(p,\, q) \times (p',\, q') = (pp',\, qq')$ pour traduire $\dfrac{p}{q} \times \dfrac{p'}{q'} = \dfrac{pp'}{qq'}$.

On vérifie que les opérations ainsi définies vérifient les axiomes d'un anneau commutatif (cela nécessite que l'anneau sous-jacent soit intègre pour que $qq' \neq 0$ quand q et q' non nuls).
On peut montrer que cette construction donne le plus petit corps possible contenant l'anneau.
Cette construction que nous venons de réaliser s'applique également à $\mathbf{Z}$, $\mathbf{K}[X]$ (ou à tout autre anneau commutatif intègre) : dans le raisonnement précédent, p, q peuvent désigner des entiers relatifs ou des polynômes sans que cela change la construction.

Définition 1.1 *(Corps des fractions)*

On note $\mathbf{K}(X)$ le corps des fractions rationnelles d'indéterminée X sur $\mathbf{K}$.
Pour $(A,\, B),\, (C,\, D) \in (\mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X] \setminus \{0\})^2$,

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC.$$

On définit la somme et le produit par :

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD} \qquad \text{et} \qquad \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}.$$

Bien entendu, comme pour les fractions réelles, l'usage privilégie la notation $\dfrac{P}{Q}$ plutôt que l'écriture sous forme de couples, car elle est beaucoup plus facile à manier.

Définition 1.2 *(Forme irréductible)*

Tout fraction rationnelle F admet un unique représentant $\dfrac{P}{Q}$ tel que $P \wedge Q = 1$ et Q unitaire.
On l'appelle la **forme irréductible** de la fraction.

Explications

Pour les rationnels, on utilise autant que possible, l'unique couple $(p,\, q)$ tel que $p \wedge q = 1$ et $q > 0$ pour représenter la fraction. Pour les fractions rationnelles, on prendra $P \wedge Q = 1$ et Q unitaire comme représentant privilégié.

Preuve

Unicité : si on suppose deux représentants $\frac{P_1}{Q_1}$ et $\frac{P_2}{Q_2}$ vérifiant ces propriétés, alors $P_1Q_2 = P_2Q_1$, donc $Q_2 | P_2Q_1$ et comme $P_2 \wedge Q_2 = 1$, alors $Q_2 | Q_1$.
Par symétrie des rôles, $Q_1 | Q_2$, donc Q_1 et Q_2 sont associés.
Or, ils sont tous les deux unitaires, donc $Q_1 = Q_2$.
Et en simplifiant dans l'égalité plus haut, on a également $P_1 = P_2$.

Existence : pour $\frac{P}{Q}$ un représentant, on note $P = (P \wedge Q)P_1$ et $Q = (P \wedge Q)Q_1$.
Alors on obtient immédiatement $\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1}$ et $P_1 \wedge Q_1 = 1$.
Si on divise également P_1 et Q_1 par le coefficient dominant de Q_1, alors les polynômes restent premiers entre eux et définissent la même fraction : d'où l'existence du représentant cherché. ∎

Théorème 1.3

Tout polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ peut être identifié à la fraction rationnelle $\frac{P}{1}$.

Preuve

On montre que les opérations définies sur $\mathbf{K}(X)$ sont cohérentes avec celles définies sur $\mathbf{K}[X]$. Par exemple $\frac{P}{1} + \frac{Q}{1} = \frac{P \times 1 + Q \times 1}{1 \times 1} = \frac{P+Q}{1}$ lui-même identifié à $P + Q$. ∎

Définition 1.4 *(Dérivée)*

Pour $F = \frac{P}{Q} \in \mathbf{K}(X)$, on définit la **dérivée** par

$$F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}.$$

Cette définition est cohérente avec la dérivée sur $\mathbf{K}[X]$ et compatible avec les sommes et produits.
Cette dérivée coïncide avec la dérivation des fonctions rationnelles.

Définition 1.5 *(Degré)*

Pour $F = \frac{P}{Q} \in \mathbf{K}(X)$, on définit le **degré** de F par

$$\deg F = \deg P - \deg Q.$$

Le degré est un entier relatif.
Par convention $\deg 0 = -\infty$.

Preuve

Il faut simplement montrer que le degré ne dépend pas du représentant choisi.
Si $F = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$, alors $P_1Q_2 = P_2Q_1$, donc, $\deg P_1 + \deg Q_2 = \deg P_2 + \deg Q_1$, ce qui donne, $\deg P_1 - \deg Q_1 = \deg P_2 - \deg Q_2$ et justifie que le degré de la fraction rationnelle est bien défini de manière unique. ∎

Propriété 1.6

Le degré d'une fraction rationnelle coïncide avec celui d'un polynôme.
Pour tout $(F_1,\, F_2) \in (\mathbf{K}(X))^2$,

$$\deg(F_1 + F_2) \leqslant \max\left(\deg F_1,\, \deg F_2\right), \qquad \deg(F_1F_2) = \deg F_1 + \deg F_2.$$

Preuve

- Pour $P \in \mathbf{K}[X]$, si on note $F = \frac{P}{1}$ la fraction rationnelle lui correspondant, on voit que $\deg F = \deg P - \deg 1 = \deg P$.
  Donc la définition du degré sur $\mathbf{K}(X)$ coïncide avec celle sur $\mathbf{K}[X]$.
- On pose $F_1 = \frac{P_1}{Q_1}$ et $F_2 = \frac{P_2}{Q_2}$, alors

$$\begin{aligned}
\deg(F_1 + F_2) &= \deg\left(\frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}\right) \\
&= \deg(P_1Q_2 + P_2Q_1) - \deg Q_1Q_2 \\
&\leqslant \max(\deg P_1Q_2, \deg P_2Q_1) - \deg Q_1 - \deg Q_2 \\
&\leqslant \max(\deg P_1 + \deg Q_2, \deg P_2 + \deg Q_1) - \deg Q_1 - \deg Q_2 \\
&\leqslant \max(\deg P_1 - \deg Q_1, \deg P_2 - \deg Q_2) \\
&\leqslant \max(\deg F_1, \deg F_2).
\end{aligned}$$

  On observe que l'inégalité est stricte lorsque

$$\deg(P_1Q_2 + P_2Q_1) < \max(\deg P_1Q_2, \deg P_2Q_1).$$

  D'après l'étude des polynômes, ceci est vérifié lorsque P_1Q_2 et P_2Q_1 sont de même degré et de coefficients dominants opposés.
  Or, le même degré pour ces deux produits, correspond exactement au fait que les deux fractions rationnelles sont de même degré.
  Quant à la condition du coefficient dominant, quitte à choisir Q_1 et Q_2 unitaires, cela revient à ce que les numérateurs aient eux-mêmes leurs coefficients dominants opposés.
- Pour le produit, on fait de même :

$$\begin{aligned}
\deg(F_1F_2) &= \deg \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2} \\
&= \deg P_1P_2 - \deg Q_1Q_2 \\
&= \deg P_1 + \deg P_2 - \deg Q_1 - \deg Q_2 \\
&= \deg F_1 + \deg F_2.
\end{aligned}$$

■

Quelques remarques :

- Une fraction rationnelle peut être de degré positif sans être un polynôme.
  Par exemple $F = \frac{X^2+1}{X}$ est de degré 1, mais n'appartient par à $\mathbf{K}[X]$ (X ne divise pas $X^2 + 1$).
- En général, $\deg(F') \neq \deg F - 1$. Par exemple, pour $F = \frac{X+1}{X} = 1 + \frac{1}{X}$, on a $F' = -\frac{1}{X^2}$. Ce qui donne $\deg F = 0$ et $\deg(F') = -2$.

2 Décomposition en éléments simples

A Zéros et pôles

Définition 2.1 *(Zéros et pôles d'une fraction)*

Soit la fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q}$ avec $P \wedge Q = 1$.
Les **pôles** de F sont les racines de Q.
La **multiplicité du pôle** correspond à la multiplicité de la racine pour Q.

Les **zéros** de F sont les racines de P.
La **multiplicité du zéro** correspond à la multiplicité de la racine pour P.

Remarque : Il est important de travailler avec le représentant irréductible $\frac{P}{Q}$ avec $P \wedge Q = 1$. Sinon, on risque de rajouter des pôles.
En effet si on multiplie le numérateur et le dénominateur par $X - a$, a n'en devient pas un pôle pour autant.
Ainsi, on ne peut pas avoir un scalaire qui est à la fois un pôle et un zéro.
Au lieu de *multiplicité*, on parle parfois de l'ordre du pôle ou du zéro.

Exemple

Les pôles de $\frac{X}{X^2-1}$ sont 1 et -1 car $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ et $X \wedge (X^2 - 1) = 1$.

Explications

Lorsque l'on étudie l'application rationnelle correspondante. La connaissance des pôles donne le domaine de définition.

B Méthode de décomposition en éléments simples sur C

Méthode *(Décomposition)*

$$F = \frac{P}{Q}.$$

1. Effectuer la division euclidienne de P par Q pour obtenir la **partie entière** E :
$$P = EQ + R \qquad \Rightarrow \qquad F = E + \frac{R}{Q} \qquad \text{avec } \deg R < \deg Q.$$
2. Factoriser Q
$$Q = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{m_i}.$$
3. Décomposer la partie fractionnaire
$$\frac{R}{Q} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j}.$$
4. Trouver les coefficients $a_{i,j}$ (voir les méthodes plus loin).

Remarque : L'existence et **l'unicité** d'une telle décomposition est admise.

Exemple *(À savoir)*

À quelle condition nécessaire et suffisante sur F, la partie entière de la fraction est-elle nulle ?

Solution :

Si $\deg F < 0$, alors on peut écrire $F = \frac{P}{Q}$ avec $\deg P < \deg Q$.
Donc $P = 0 \times Q + P$ donne la division euclidienne : la partie entière est nulle.
Sinon, comme, $\deg P \geqslant \deg Q$, le reste est différent de P et la partie entière est non nulle.

Exemple *(À savoir)*

Soit $P \in \mathbf{C}[X] \setminus \{0\}$, donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

Solution :

On factorise $P = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{m_i}$. Alors $P' = \sum_{i=1}^{n} m_i (X - \alpha_i)^{m_i - 1} \dfrac{P}{(X - \alpha_i)^{m_i}}$.

Ce qui donne : $\dfrac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{m_i}{(X - \alpha_i)}$.

Remarque : Seule la méthode pour trouver le coefficient d'un pôle simple est explicitement au programme.

Méthode *(Brutal...)*

On peut trouver les valeurs des coefficients en remettant tout au même dénominateur et en procédant par identification (donne un système d'équations).
Mais c'est souvent très lourd...

Exemple

Décomposer en éléments simples la fraction :
$$F = \frac{X^2 + 1}{X^2 - 1}.$$

Solution :

Sans même avoir besoin de rédiger la division euclidienne, on voit que
$$F = \frac{X^2 - 1 + 2}{X^2 - 1} = 1 + \frac{2}{X^2 - 1}$$
où 1 est la partie entière car $\deg \frac{2}{X^2-1} < 0$.
On peut alors écrire $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ et on sait qu'il existe $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ tels que
$$\frac{2}{X^2 - 1} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1}.$$
En remettant au même dénominateur, on trouve
$$\frac{a(X + 1) + b(X - 1)}{X^2 - 1} = \frac{(a + b)X + (a - b)}{X^2 - 1}.$$
Or, c'est égal à $\frac{2}{X^2-1}$ donc on peut identifier : $a+b = 0$ et $a-b = 2$, ce qui donne $a = 1$ et $b = -1$. On a donc
$$F = 1 + \frac{1}{X - 1} - \frac{1}{X + 1}.$$
En fait, on aurait pu remarquer tout de suite (comme nous l'avons déjà fait plus tôt dans l'année) que $2 = (X + 1) - (X - 1)$ et simplifier directement.

Méthode *(Pour le coefficient de plus grande multiplicité)*

Pour un pôle de multiplicité m, le coefficient de $\frac{1}{(X-\alpha)^m}$ peut être trouvé au choix par :

1. *(évaluation)* $a_m = \Big((X-\alpha)^m F\Big)(\alpha)$,
2. *(dérivation)* $a_m = m!\dfrac{R(\alpha)}{Q^{(m)}(\alpha)}$.

La méthode de la dérivation est surtout utile pour un pôle simple ($m=1$).
On a alors :

$$a_1 = \frac{R(\alpha)}{Q'(\alpha)}.$$

On peut ensuite trouver les autres coefficients du même pôle de proche en proche en remarquant que pour $P - \dfrac{a_m}{(X-\alpha)^m}$, α est un pôle de multiplicité inférieure ou égale à $m-1$, ce qui permet donc de trouver a_{m-1}.

Preuve

1. *(évaluation)* On peut écrire $F = \frac{P}{(X-\alpha)^m Q}$ avec α qui n'est pas racine de Q.
   La décomposition en éléments simples donne $F = \frac{a_m}{(X-\alpha)^m} + F_2$ avec α de multiplicité inférieure ou égale à $m-1$ dans F_2.
   Ainsi α n'est plus un pôle de $(X-\alpha)^{m-1}F_2$, et on a donc α qui est un zéro de $(X-\alpha)^m\, F_2$.
   Donc $\Big((X-\alpha)^m F\Big)(\alpha) = a_m + 0$.
2. *(dérivation)* En appliquant la méthode de l'évaluation :

$$a_m = \left((X-\alpha)^m \frac{P}{Q}\right)(\alpha).$$

Or, d'après la formule de Taylor en α (racine de multiplicité m) :

$$Q = 0 + (X-\alpha)^m \frac{Q^{(m)}(\alpha)}{m!} + (X-\alpha)^{m+1} Q_2$$

où Q_2 s'obtient avec la fin du développement de Taylor et les dérivées d'ordre $k \geqslant m+1$
.
Ainsi

$$(X-\alpha)^m \frac{P}{Q} = \frac{P}{\frac{Q^{(m)}(\alpha)}{m!} + (X-\alpha)Q_2}.$$

Donc si on évalue en α on trouve

$$a_m = \Big((X-\alpha)^m F\Big)(\alpha) = \frac{P(\alpha)}{\frac{Q^{(m)}(\alpha)}{m!}} = m!\frac{P(\alpha)}{Q^{(m)}(\alpha)}.$$

■

Exemple

Donner la décomposition en éléments simples de

$$F = \frac{X^4+1}{X^3-2X^2+X}.$$

Solution :
La division euclidienne donne $X^4+1 = (X+2)\left(X^3-2X^2+X\right) + 3X^2-2X+1$.
Donc la partie entière est $E = X+2$ et on s'intéresse donc à la fraction rationnelle :

$$F_2 = \frac{3X^2-2X+1}{X^3-2X^2+X}.$$

$X^3-2X^2+X = X(X^2-2X+1) = X(X-1)^2$ et on peut donc écrire

$$F_2 = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2}.$$

- Pour trouver a, on évalue en 0 : $a = (XF_2)(0) = \frac{1}{(-1)^2} = 1$.
- De même, pour c : $c = \left((X-1)^2F_2\right)(1) = \frac{3-2+1}{1} = 2$.
- Pour obtenir b, nous verrons plus loin d'autres méthodes, mais ici, on peut calculer

$$(X-1)\left(F_2 - \frac{2}{(X-1)^2}\right) = \frac{3X^2-2X+1-2X}{X(X-1)} = \frac{3X^2-4X+1}{X(X-1)} = \frac{3X-1}{X}.$$

  En utilisant la technique de l'évaluation, on trouve donc $b = \left((X-1)\left(F_2 - \frac{2}{(X-1)^2}\right)\right)(1) = 2$.

Ainsi

$$F = X-2+\frac{1}{X} + \frac{2}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2}.$$

Exemple

Donner la décomposition en éléments simples (sur $\mathbf{C}$) de

$$F = \frac{1}{X^5-1}.$$

Solution :
Le degré est négatif, donc la partie entière est nulle.
Les pôles sont les racines 5^{e} de l'unité, et sont tous des pôles simples.
Ici, la méthode de l'évaluation n'est pas adaptée (sauf pour le pôle 1) et le calcul est pénible.
Par contre, la dérivation est très simple. Si on note ξ_i les racines de l'unité, alors

$$F = \sum_{i=0}^{4} \frac{a_i}{X-\xi_i}.$$

Pour $i \in [\![0,\,4]\!]$, on trouve alors $a_i = \dfrac{1}{5\xi_i^4} = \dfrac{\xi_i}{5}$.
La fraction s'écrit :

$$F = \sum_{i=0}^{4} \frac{\xi_i}{5(X-\xi_i)}.$$

Méthode *(Autres relations)*

1. *(somme des résidus)* si on note $s = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1}$, alors $s = \lim_{x\to+\infty} \frac{xR(x)}{Q(x)}$.
2. Évaluation en α qui n'est pas un pôle, utilisation de la parité de F,...

Explications

Ces méthodes ne donnent pas directement un coefficients, mais des relations linéaires simples entre coefficients qui permettent souvent de trouver les derniers coefficients restants.

Preuve

$$\begin{aligned} X\frac{R}{Q} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i,1}X}{X-\alpha_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{m_i} \frac{a_{i,j}X}{(X-\alpha_i)^j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i,1}(X-\alpha_i) + a_{i,1}\alpha_i}{X-\alpha_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{m_i} \frac{a_{i,j}X}{(X-\alpha_i)^j} \\ &= s + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i,1}\alpha_i}{X-\alpha_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{m_i} \frac{a_{i,j}X}{(X-\alpha_i)^j} \end{aligned}$$

On observe que tout ce qui n'est pas s est de degré strictement négatif, donc tend vers 0 en $+\infty$. Ainsi $\lim_{x\to+\infty} x\frac{R(x)}{Q(x)} = s$.

Remarque : on peut aussi interpréter s comme la partie entière de $X\frac{R}{Q}$. ■

Exemple

Donner la décomposition en éléments simples de

$$F = \frac{7X^5 + 4X^3 + 2}{X^4 + X^2}.$$

Solution :

La division euclidienne donne $F = 7X + \dfrac{-3X^3+2}{X^4+X^2}$. On note $G = \dfrac{-3X^3+2}{X^4+X^2}$.

$$G = \frac{-3X^3+2}{X^2(X^2+1)} = \frac{-3X^3+2}{X^2(X-i)(X+i)} = \frac{a_{1,1}}{X} + \frac{a_{1,2}}{X^2} + \frac{a_2}{X-i} + \frac{a_3}{X+i}.$$

- *(évaluation en un pôle)* $a_{1,2} = \left(X^2G\right)(0) = 2$.
- *(évaluation en un pôle)* : $a_2 = ((X-i)G)(i) = \frac{3i+2}{-2i} = \frac{2i-3}{2}$.
- *(évaluation en un pôle)* : $a_3 = ((X+i)G)(-i) = \frac{-3i+2}{2i} = -\frac{2i+3}{2}$.
  Nous verrons aussi une méthode de passage par le conjugué.
- *(somme des résidus)* ici $s = a_{1,1} + a_2 + a_3$.
  On trouve $s = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^4+2x}{x^4+x^2} = -3$, ce qui permet de retrouver $a_{1,1} = 0$.

$$F = 7X + \frac{2}{X^2} + \frac{2i-3}{2(X-i)} - \frac{2i+3}{2(X+i)}.$$

Méthode *(Utiliser les symétries)*

- Utiliser la parité ou imparité de la fraction pour avoir des relations entre pôles.
- Si la fraction est dans $\mathbf{R}(X)$, alors ses pôles complexes sont conjugués et de même multiplicité.
  Pour α pôle complexe de multiplicité m, on a alors les coefficients de $\frac{1}{(X-\alpha)^k}$ et $\frac{1}{(X-\overline{\alpha})^k}$ conjugués.

Preuve

Pour $\alpha \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$ un pôle de multiplicité m, alors, comme $Q \in \mathbf{R}[X]$, on a également $\overline{\alpha}$ qui est un pôle de même multiplicité.
On peut écrire

$$F = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{(X-\alpha)^k} + \frac{b_k}{(X-\overline{\alpha})^k} + F_2.$$

F et F_2 sont toute les deux des fractions à coefficients réels, donc $F = \overline{F}$ et $F_2 = \overline{F_2}$.
On trouve donc

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{(X-\alpha)^k} + \frac{b_k}{(X-\overline{\alpha})^k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\overline{a_k}}{(X-\overline{\alpha})^k} + \frac{\overline{b_k}}{(X-\alpha)^k}.$$

Par unicité de la décomposition en éléments simples, cela donne

$$\forall k \in [\![1, m]\!],\ a_k = \overline{b_k}.$$

■

Exemple

Donner la décomposition en éléments simples de

$$F = \frac{X^2+1}{X^3-2X+4}.$$

Solution :

Le degré de la fraction est strictement négatif, donc il n'y a pas de partie entière.
On factorise le dénominateur et on trouve :

$$X^3 - 2X + 4 = (X+2)\left(X^2 - 2X + 2\right) = (X+2)\left(X-(1+i)\right)\left(X-(1-i)\right).$$

On obtient donc une factorisation uniquement avec des pôles simples :

$$F = \frac{a}{X+2} + \frac{b}{X-(1+i)} + \frac{c}{X-(1-i)}.$$

On a désormais pléthore de méthodes à disposition.
Pour a, on peut utiliser l'évaluation en -2 ou la méthode avec la dérivée.
Par l'évaluation, on trouve $a = \frac{(-2)^2+1}{(-2)^2-2\times(-2)+2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.
Par la méthode de la dérivée, on trouve la même valeur $a = \frac{-2+1}{3\times(-2)^2-2} = \frac{1}{2}$.
Pour b, on peut procéder de la même façon.
On obtient par la dérivée : $b = \frac{(1+i)^2+1}{3(1+i)^2-2} = \frac{1+2i}{6i-2} = -\frac{1}{2}\frac{(1+2i)(3i+1)}{9+1} = -\frac{-5+5i}{20} = \frac{1-i}{4}$.

On peut enfin utiliser le fait que $c = \overline{b}$ car la fraction est réelle. On trouve donc finalement
$$F = \frac{1}{2(X+2)} + \frac{1-i}{4(X-1-i)} + \frac{1+i}{4(X-1+i)}.$$

Exemple

Décomposer en éléments simples, la fraction rationnelle :
$$F = \frac{X^2}{X^4+2X^2+1}.$$

Solution :
La partie entière est nulle (degré strictement négatif).
On factorise le dénominateur :
$$X^4+2X^2+1 = \left(X^2+1\right)^2 = (X+i)^2\,(X-i)^2\,.$$
La fraction s'écrit donc
$$F = \frac{a_1}{X+i} + \frac{a_2}{(X+i)^2} + \frac{b_1}{X-i} + \frac{b_2}{(X-i)^2}.$$
Or, la fraction étant dans $\mathbf{R}(X)$, on a immédiatement $b_1 = \overline{a_1}$ et $b_2 = \overline{a_2}$.
Donc
$$F = \frac{a_1}{X+i} + \frac{a_2}{(X+i)^2} + \frac{\overline{a_1}}{X-i} + \frac{\overline{a_2}}{(X-i)^2}.$$
Par la suite, on voit que la fraction est paire, $F(-X) = F(X)$. Cela donne
$$\frac{a_1}{X+i} + \frac{a_2}{(X+i)^2} + \frac{\overline{a_1}}{X-i} + \frac{\overline{a_2}}{(X-i)^2} = \frac{-a_1}{X-i} + \frac{a_2}{(X-i)^2} + \frac{-\overline{a_1}}{X+i} + \frac{\overline{a_2}}{(X+i)^2}$$
Et par unicité de la décomposition, on a donc $a_1 = -\overline{a_1}$ et $a_2 = \overline{a_2}$.
Donc $a_1 \in i\mathbf{R}$ et $a_2 \in \mathbf{R}$, on note donc $a_1 = ia_1'$, avec $a_1' \in \mathbf{R}$.
Si on évalue en 0, on trouve $F(0) = 0 = 2(a_1' - a_2)$, donc $a_1' = a_2$.
Finalement,
$$F = a_2\left(\frac{i}{X+i} + \frac{1}{(X+i)^2} - \frac{i}{X-i} + \frac{1}{(X-i)^2}\right).$$
Si on multiplie par X^2 et qu'on fait tendre vers $+\infty$, on obtient 0.
Or, dans la décomposition en éléments simples, on obtiendra $4a_2$, donc $a_2 = \frac{1}{4}$.
$$F = \frac{1}{4}\left(\frac{i}{X+i} + \frac{1}{(X+i)^2} - \frac{i}{X-i} + \frac{1}{(X-i)^2}\right).$$

C Décomposition sur R

La méthode générale est la même, mais les irréductibles sur $\mathbf{R}$ sont plus nombreux que ceux sur $\mathbf{C}$ (degré 2 à discriminant négatif).
Pour un dénominateur avec un irréductible de degré 2, le numérateur est alors de degré inférieur ou égal à 1 (et donc pas nécessairement une constante).
Lorsque les pôles sont *simples*, la méthode de base est simplement de faire la décomposition sur $\mathbf{C}$, puis de rassembler les pôles complexes conjugués.

Méthode *(Décomposition sur* **R***)*
$$F = \frac{P}{Q}.$$

1. Effectuer la division euclidienne de P par Q pour obtenir la *partie entière*,
$$P = EQ + R \qquad \Rightarrow \qquad P = E + \frac{R}{Q} \qquad \text{avec } \deg R < \deg Q.$$
2. Factoriser Q
$$Q = \lambda \prod_{i=1}^{q}(X-\alpha_i)^{m_i} \prod_{i=1}^{r}(X^2+\beta_i X+\gamma_i)^{\mu_i}.$$
3. Décomposer la partie fractionnaire
$$\frac{R}{Q} = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j} \quad + \quad \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{b_{i,j}X + c_{i,j}}{(X^2+\beta_i X+\gamma_i)^j}.$$
4. Trouver les coefficients $a_{i,j}$, pour cela on peut
   (a) utiliser des méthodes similaires à celles sur $\mathbf{C}$,
   (b) ne pas hésiter à évaluer le polynôme en des pôles complexes.

Exemple

Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$, la fraction rationnelle :
$$F = \frac{X^2}{X^4+2X^2+1}.$$

Solution :
C'est la même qu'à l'exemple précédent, elle s'écrit sur $\mathbf{R}$: $F = \dfrac{aX+b}{X^2+1} + \dfrac{cX+d}{(X^2+1)^2}$.
L'évaluation en 0 donne $b + d = 0$.
La parité de F donne $a = c = 0$.
Finalement, si on multiplie par $(X^2+1)^2$ et qu'on évalue en i, on trouve $i^2 = d$, donc $d = -1$.
Finalement : $F = \dfrac{1}{X^2+1} - \dfrac{1}{(X^2+1)^2}$.

D Méthode des divisions euclidiennes successives

On présente la méthode sur un exemple. Elle est efficace lorsqu'un pôle possède une grande multiplicité.

Exemple

Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}[X]$ la fraction

$$F = \frac{X^4+X+1}{X(X^2+1)^3}.$$

Solution :

La partie entière est nulle car $\deg(F) < 0$.
Le cours indique qu'il existe des réels $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbf{R}^6$ tels que

$$F = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{X^2+1} + \frac{cX+d}{(X^2+1)^2} + \frac{eX+f}{(X^2+1)^3}.$$

$a = (XF)(0) = 1$.
On pose alors

$$\begin{aligned} G = F - \frac{1}{X} &= \frac{X^4+X+1-(X^2+1)^3}{X(X^2+1)^3} \\ &= \frac{-X^6-2X^4-3X^2+X}{X(X^2+1)^3} \\ &= -\frac{X^5+2X^3+3X-1}{(X^2+1)^3}. \end{aligned}$$

On observe que X se simplifie, ce qui est naturel car on a enlevé le pôle 0 avec la soustraction.
Pour trouver les réels qui manquent dans la décomposition de F, on peut réaliser des divisions euclidiennes successive du numérateur par (X^2+1).
On obtient

$$X^5+2X^3+3X-1 = (X^2+1)\left(X^3+X\right) + 2X - 1.$$

Ce qui donne

$$G = -\frac{(X^2+1)(X^3+X)+2X-1}{(X^2+1)^3} = -\frac{2X-1}{(X^2+1)^3} - \frac{X^3+X}{(X^2+1)^2}.$$

On réalise à nouveau une division euclidienne de X^3+X par X^2+1 et on trouve

$$X^3+X = (X^2+1)X.$$

Ainsi

$$G = -\frac{2X-1}{(X^2+1)^3} - \frac{X}{X^2+1}.$$

On obtient finalement

$$F = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1} + \frac{-2X+1}{(X^2+1)^3}.$$

3 Application aux calculs de primitives et dérivées

Exemple

Calculer la dérivée n-ième de $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$.

Solution :

On décompose en éléments simples : $F = \frac{1}{X^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1}\right)$.
On en déduit les dérivées successives par récurrence immédiate :

$$F^{(n)} = \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n n!}{(X-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(X+1)^{n+1}}\right) = \frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{1}{(X-1)^{n+1}} - \frac{1}{(X+1)^{n+1}}\right).$$

Exemple

Calculer la dérivée n-ième de Arctan.

Solution :

$\forall x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, on cherche donc la dérivée $(n-1)$-ième de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. On décompose en éléments simples sur $\mathbf{C}$: $F = \frac{1}{X^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i}\right) = \mathfrak{Im}\left(\frac{1}{X-i}\right)$.
On en déduit les dérivées successives par récurrence immédiate :

$$\begin{aligned} F^{(n-1)} &= \mathfrak{Im}\left((-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(X-i)^n}\right) \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)!\,\mathfrak{Im}\left(\frac{(X+i)^n}{(X^2+1)^n}\right) \\ &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(X^2+1)^n}\,\mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} i^k X^{n-k}\right) \\ &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(X^2+1)^n}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1}(-1)^k X^{n-2k-1}. \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$\mathrm{Arctan}^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x^2+1)^n}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1}(-1)^k x^{n-2k-1}.$$

La décomposition en éléments simples permet de calculer des primitives de fonctions rationnelles.
Cela avait déjà été réalisé dans les cas simples dans le chapitre sur les primitives, on généralise ici à l'ensemble des fonctions rationnelles.

Méthode *(Recherche de primitives)*

La décomposition en élément simple fait apparaître :

1. la partie entière polynomiale qui se primitive comme telle.
2. les termes $\dfrac{1}{X-\alpha}$ avec un logarithme pour $\alpha \in \mathbf{R}$.
3. les termes $\dfrac{1}{(X-\alpha)^n}$, avec $n \geqslant 1$, comme une puissance.
4. les termes $\dfrac{aX+b}{X^2+\alpha X+\beta}$ en faisant apparaître une partie $\dfrac{P'}{P}$ et ce qui reste est mis sous forme canonique et intégré avec Arctan.

Pour les termes $\dfrac{1}{X-\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbf{C}$, on peut passer par la quantité conjuguée.

Exemple

Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^3-1}$.

Solution :

On décompose $\frac{1}{X^3-1}$ en éléments simples.
Comme on l'avait fait pour $\frac{1}{X^5-1}$ plus haut, on ne trouve que des pôles simples sur $\mathbf{C}$ et on obtient les coefficient avec la méthode de la dérivée.
On trouve alors ($j = \mathrm{e}^{2i\frac{\pi}{3}}$) :

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{j}{X-j} + \frac{\overline{j}}{X-\overline{j}}\right).$$

Pour intégrer, on peut rassembler les deux pôles complexes (simples) :

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{j(X-\overline{j})+\overline{j}(X-j)}{(X-j)(X-\overline{j})}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} - \frac{X+2}{X^2+X+1}\right).$$

On peut également trouver directement la décomposition sur $\mathbf{R}[X]$:

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+X+1}.$$

On multiplie par X et on évalue en 1, ce qui donne $a = \frac{1}{3}$.
On multiplie par X et on fait tendre vers $+\infty$ ce qui donne $a+b=0$, donc $b = -\frac{1}{3}$.
On évalue en 0, ce qui donne $-1 = -a+c$, donc $c = a-1 = -\frac{2}{3}$ et on obtient donc bien

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} - \frac{X+2}{X^2+X+1}\right).$$

Le premier pôle s'intègre par un logarithme, et pour le second, on fait apparaître $\frac{u'}{u}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{t+2}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{1}{2}\frac{2t+1}{t^2+t+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left|t^2+t+1\right|\right]_0^x + \frac{3}{2}\int_0^x \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{3}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^x \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+1/2)\right)^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + \sqrt{3}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + \sqrt{3}\left[\mathrm{Arctan}\,(u)\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + \sqrt{3}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right) - \sqrt{3}\mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).
\end{aligned}$$

On obtient donc finalement (pour $x \in]-1,1[$) :

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{x^3-1} = \frac{1}{3}\ln(1-x) - \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

On peut aussi remarquer que $\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$.