

APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES

« Agir en primitif et prévoir en stratégie »
René Char

Notations : Dans tout le chapitre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1 MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE.

Dans cette partie, on se place dans la cas où à la fois E et F sont de dimension finie.

A Matrice dans une base

Le résultat fondateur de cette approche est le théorème ?? du chapitre précédent selon lequel une application linéaire est entièrement déterminée par son action sur une base.

On considère donc deux espaces de dimension finie E et F .

$\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base de E , $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ est une base de F et u une application linéaire de E dans F .

1. Décomposition sur la base de départ :

D'après le théorème ??, pour tout vecteur $x \in E$, on peut écrire

$$x = \sum_{j=1}^p x_j e_j, \quad \text{et} \quad u(x) = \sum_{j=1}^p x_j u(e_j).$$

2. Décomposition sur la base de d'arrivée :

Or $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ est une base de F , donc pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on peut décomposer $u(e_j)$ de façon unique dans la base $\mathcal{F}$:

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i.$$

3. Écriture matricielle :

Dans la base $\mathcal{F}$, la matrice des coordonnées de $u(e_j)$ s'écrit

$$\text{mat}_{\mathcal{F}}(u(e_j)) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}.$$

$y = u(x) = x_1 u(e_1) + x_2 u(e_2) + \dots + x_j u(e_j) + \dots + x_n u(e_n)$ s'écrit matriciellement :

$$\begin{aligned} Y &= x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} + \dots + x_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ a_{2,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & & & a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & & & a_{n,p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = AX. \end{aligned}$$

A est la matrice de u entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Notation

On note $A = \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)$ la matrice de l'application u entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.
 Pour deux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ fixées, la matrice décrit parfaitement l'application.
 Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont les bases canoniques de E et F , alors on dit que
 A est la matrice **canoniquement** associée à u .

Théorème 1.1

Toute application linéaire entre des espaces vectoriels de dimension **finie** peut être caractérisée par une matrice.

Cette matrice dépend du choix des bases.

Explications

Le fait de choisir des bases particulières permet de ne pas se préoccuper de la nature de l'espace vectoriel considéré. Tout vecteur s'écrit dans la base sous la forme d'un n -uplet de $\mathbf{K}^n$. Ainsi, on peut oublier l'espace vectoriel ambiant pour travailler dans $\mathbf{K}^n$.

Par exemple, pour l'espace de polynômes $\mathbf{K}_{n-1}[X]$, choisir la base canonique revient à modéliser chaque polynôme par le tableau (vecteur) de ses coefficients.

Les résultats prouvés sur $\mathbf{K}^n$ pourront donc être appliqués à n'importe quel espace vectoriel de dimension finie n (en choisissant une base quelconque pour celui-ci).

Exemple

Soit $u : \begin{cases} \mathbf{K}^4 & \rightarrow \mathbf{K}^3 \\ (x, y, z, t) & \mapsto (x + y + z, x - 2z + t, y + z - t) \end{cases}$.

Déterminer la matrice canoniquement associée à u .

Solution :

Pour construire facilement cette matrice, on calcule $u(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 0)$ et on écrit verticalement ce vecteur pour la première colonne. On fait de même pour les deux autres colonnes qui sont données par $u(0, 1, 0)$ et $u(0, 0, 1)$.

$$\text{On obtient } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Une autre façon rapide de le voir est d'écrire l'expression de u en écrivant le vecteur image verticalement et en alignant les x, y, z et t :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \begin{pmatrix} x & +y & +z \\ x & & -2z & +t \\ & y & +z & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & +1y & +1z & +0t \\ 1x & +0y & -2z & +1t \\ 0x & +1y & +1z & -1t \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matriciel versus intrinsèque :

Dans introduction de ce chapitre, nous opposions la démarche matricielle à l'approche

dite *intrinsèque*.

L'approche matricielle consiste à décrire les objets à partir d'une base de l'espace. Cette description est tributaire du choix préalable d'une base.

Au contraire, l'approche intrinsèque n'utilise aucune base pour décrire les objets, mais s'appuie sur leurs propriétés géométriques. C'est moins calculatoire et davantage lié à la nature même de l'objet.

Ces deux approches sont complémentaires et il faut savoir jongler entre les deux.

Méthode (Écrire une application linéaire dans une base)

La matrice $\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)$ s'obtient en écrivant les vecteurs colonne $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ côte à côte dans la base $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathcal{E} : \text{départ} & & & & & \\ & u(e_1) & u(e_2) & & u(e_p) & & \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} & & & \begin{matrix} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \\ \vdots \\ \leftarrow f_n \end{matrix} & & \mathcal{F} : \text{arrivée} \end{array}$$

Propriété 1.2 (« Réciproque »)

Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ peut être interprétée comme la matrice d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ avec $\mathbf{K}^p$ et $\mathbf{K}^n$ munis de leur base canonique.

⚠ L'espace de départ correspond aux colonnes de la matrice. Ainsi, la dimension de l'espace de départ est le nombre de **colonnes** et celle de l'espace d'arrivée est le nombre de lignes. Pour $u : \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^p$, la matrice est dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$.

B Action matricielle d'une application linéaire**Théorème 1.3 (Calcul matriciel de $u(x)$)**

Soient E et F deux espaces vectoriels avec $\dim E = p$ et $\dim F = n$.
 $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base de E . $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ est une base de F .
 Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)$ la matrice de u entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.
 Soit $x \in E$ et $X = \text{mat}_{\mathcal{E}}(x)$ la matrice colonne représentant x dans la base $\mathcal{E}$.

la matrice colonne de $u(x)$ dans la base $\mathcal{F}$ est AX .

Preuve

Il suffit d'écrire le produit matriciel. ■

Explications

N'oublions pas que nous sommes en algèbre linéaire : on ne fait qu'étudier des situations de proportionnalité. Revenez donc en 4^e quelques instants et vous remarquerez que vous l'aviez déjà appris : calculer $u(x)$, c'est multiplier x par le coefficient de proportionnalité a . La seule différence est qu'ici, le coefficient de proportionnalité n'est pas un nombre, mais une matrice.

Chercher l'image d'un vecteur par une application linéaire revient à faire un produit matriciel.

C Opérations sur les matrices

Théorème 1.4

Soient E, F, G trois espaces de dimension finie, de bases respectives $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

- Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2; \quad \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(\lambda u + \mu v) = \lambda \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) + \mu \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(v).$$

- Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors

$$\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{G}}(v \circ u) = \text{mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(v) \times \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u).$$

- $\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(\text{Id}_E) = I_n$.

- Si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $u \in \text{GL}(E) \iff \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(u) \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ et dans ce cas :

$$\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(u^{-1}) = \left(\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(u) \right)^{-1}.$$

⚠ On choisit les mêmes bases pour les différentes applications : la matrice dépend du choix de la base. En particulier, si on prend deux bases différentes de E : $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, alors $\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'}(\text{Id}_E) \neq I_n$.

Preuve

- immédiat en construisant la matrice de $\lambda u + \mu v$.
- pour un $x \in E$ quelconque, on vérifie que $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.
Ainsi, avec les matrices, cela revient à faire successivement le produit avec $\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)$ puis $\text{mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(v)$ ce qui donne le résultat par unicité de la matrice.
- Il suffit de construire la matrice de l'application identité.
- Si $u \in \text{GL}(E)$, alors on utilise les deux points précédents :

$$I_n = \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(\text{Id}_E) = \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(u \circ u^{-1}) = \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(u) \times \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(u^{-1}).$$

Réciproquement, si la matrice est inversible, alors il existe une application v représentée par la matrice inverse. Et le calcul précédent montre alors que $v = u^{-1}$ (et en particulier que $u \in \text{GL}(E)$).

Théorème 1.5

Si $\dim E = n$ et $\dim F = p$, avec des bases $\mathcal{E}$ de E et $\mathcal{F}$ de F fixées, alors

$$\text{L'application } \Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}) \\ u & \mapsto \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) \end{cases} \text{ est un isomorphisme.}$$

Preuve

La première propriété du théorème 1.4 revient à dire que pour les bases de E et de F fixées $\mathbf{K}$ -linéaire. Et d'après le théorème 1.1 et la propriété 1.2, c'est un **isomorphisme**.

Corollaire 1.6

Pour E et F de dimensions finies,

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim E \times \dim F.$$

Propriété 1.7 (Isomorphisme entre deux bases différentes)

Si $u \in \text{GL}(E)$ et $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux bases de E , alors

$$\text{mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{E}}(u^{-1}) = \left(\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'}(u) \right)^{-1}.$$

⚠ On change l'ordre des bases entre u et u^{-1} .

Preuve

On adapte la preuve précédente.

Exemple

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ définie par $\begin{cases} a_{i,j} = 1 & \text{si } i = j \text{ ou } j = i + 1, \\ a_{i,j} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'application linéaire canoniquement associée à A dans $\mathbf{K}^n$ et justifier, sans calculs, que c'est un automorphisme de $\mathbf{K}^n$.

Solution :

On lit les images avec les vecteurs colonne : $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = e_1 + e_2$, ...
 $u(e_n) = e_{n-1} + e_n$.

$$u : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n).$$

La matrice associée est inversible (elle est écrite sous forme échelonnée avec n pivots).

Donc u est inversible : c'est un automorphisme de $\mathbf{K}^n$.

Exploiter l'isomorphisme Φ :

À présent que nous avons établi un lien linéaire et bijectif entre les applications linéaires et les matrices, on peut travailler indifféremment sur l'un ou l'autre objet. En fonction du problème, on passera d'une approche à l'autre.

- Toute matrice (ou tout système linéaire) peut être interprétée géométriquement avec des applications linéaires.
- À l'inverse, toute application linéaire (en dimension finie) peut être écrite sous forme matricielle. Cela permet de transformer un problème *géométrique* en un simple calcul matriciel.

Les deux sections qui suivent exploitent ce lien :

- matriciel $\rightarrow$ intrinsèque pour la section E.
- intrinsèque $\rightarrow$ matriciel pour la section F.

Exemple

Dans le chapitre sur les matrices, nous avons admis qu'il suffit d'avoir une matrice inverse à droite ou à gauche pour montrer qu'une matrice est inversible. C'est une conséquence de l'isomorphisme Φ . Plus précisément, nous avons formulé ainsi le théorème :
Pour qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ soit inversible, il suffit qu'il existe un inverse à gauche, ou un inverse à droite. C'est-à-dire

$$\begin{aligned} A \text{ inversible} &\iff (\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \text{ tel que } AB = I_n) \\ &\iff (\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \text{ tel que } BA = I_n). \end{aligned}$$

En quoi cela est-il une conséquence du théorème 1.5 ?

Cela vient du fait qu'une matrice carrée A représente un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$ dans une certaine base.

S'il existe B telle que $AB = I_n$, alors on peut interpréter B comme la matrice d'une autre application $v \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$ telle que que $u \circ v = \text{Id}$.

Or, nous avons vu au chapitre précédent que pour un endomorphisme en dimension finie, admettre un inverse à droite (ou à gauche) donnait l'inversibilité de l'application. Or, la propriété 1.4 nous dit qu'une matrice est inversible si, et seulement si son endomorphisme associé l'est aussi. Ce qui donne la preuve de ce résultat qui était resté en suspens.

Définition 1.8

On appelle noyau, image et rang d'une matrice, les images de l'image, du noyau et du rang de son application linéaire associée par l'application Φ .
Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$,

$$\ker(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}), AX = 0\}.$$

$$\text{Im}(A) = \{AX, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})\}.$$

Propriété 1.9 (Rang d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Le rang de A est égal à :

1. le rang de toute application linéaire associée à A dans n'importe quelles bases.
2. la dimension de $\text{Im}(A)$.
3. le nombre de pivot des matrices échelonnées en ligne ou en colonne à partir de A (voir partie qui suit).
4. On verra plus loin une autre caractérisation à partir des matrices extraites.

D Tableau récapitulatif

Vision intrinsèque		Vision matricielle
E , tel que $\dim E = p$	$\mathbf{K}^p$	$\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$
F , tel que $\dim F = n$	$\mathbf{K}^n$	$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$
$x \in E$	$x \in \mathbf{K}^p$	$X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$
$f \in \mathcal{L}(E, F)$	$f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$	$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$
$f(x)$		AX
$\lambda.f + g$		$\lambda A + B$
$f \circ g$		AB
$f \in \text{GL}(E)$	$f \in \text{GL}(\mathbf{K}^n)$	$A \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$
f^{-1}		A^{-1}
$\text{rg } f$		$\text{rg } A$
$\text{rg } f \leq \min(\dim E, \dim F)$	$\text{rg } f \leq \min(\dim \mathbf{K}^p, \dim \mathbf{K}^n)$	$\text{rg } A \leq \min(p, n)$

E Résolution de systèmes linéaires

Propriété 1.10

Pour tout système linéaire de taille $n \times p$ de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où les $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et les $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des coefficients dans $\mathbf{K}$.

On définit l'application linéaire

$$u : \begin{cases} \mathbf{K}^p & \rightarrow \mathbf{K}^n \\ (x_1, x_2, \dots, x_p) & \mapsto \left(\sum_{j=1}^p a_{1,j}x_j, \sum_{j=1}^p a_{2,j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^p a_{n,j}x_j \right) \end{cases}.$$

On note les vecteurs $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^p$ et $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbf{K}^n$.

x est solution du système si et seulement si $u(x) = b$.

Propriété 1.11

Le système est compatible si et seulement si $b \in \text{Im}(u)$.

Dans ce cas, si x_0 est une solution particulière, alors l'ensemble des solutions est de la forme

$$\mathcal{S} = \{x_0 + x, \quad x \in \text{Ker}(u)\}.$$

C'est un sous-espace affine de E de direction $\text{ker}(u)$.

Remarque : Écrit matriciellement, on obtient le même théorème.

Preuve

Le système est compatible si et seulement s'il admet une solution $x_0 \in \mathbf{K}^p$.

C'est-à-dire, s'il existe $x_0 \in \mathbf{K}^p$ tel que $u(x_0) = b$.

Ainsi, le système est compatible si et seulement si $b \in \text{Im}(u)$.

Si x_0 est une solution particulière, alors

$$x \in \mathcal{S} \iff u(x) = b \iff u(x) = u(x_0) \iff u(x - x_0) = 0 \iff x - x_0 \in \text{Ker}(u). \quad \blacksquare$$

Propriété 1.12 (Système de Cramer)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$,

$$\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}), \exists ! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}), \text{ tel que } AX = B \iff A \text{ est inversible.}$$

Preuve

Si on revient à l'application linéaire sous-jacente u , cela veut dire que

$\forall b \in F, \exists ! x \in E$, tel que $u(x) = b$. C'est la définition d'une application bijective, ce qui correspond à l'inversibilité de la matrice. $\blacksquare$

F Obtenir le noyau et l'image à partir de la matrice

On peut facilement obtenir une base du noyau et de l'image à partir de la matrice de l'application linéaire en réalisant un pivot de Gauss **sur les lignes**¹.

Un exemple à la fin de cette partie met en œuvre ces méthodes.

Elles s'appuient sur le théorème fondamental suivant :

Théorème 1.13

Les colonnes d'une matrice forment une famille génératrice de son image.

Les lignes d'une matrice forment un système d'équations de son noyau.

Preuve

Si $u \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ et $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base de $\mathbf{K}^p$, alors on a vu que

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)).$$

Matriciellement, cela veut dire que l'image est engendrée par les vecteurs colonne de la matrice.

Le noyau d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ s'obtient en résolvant $u(x) = 0_F$.

Cela revient donc à résoudre le système linéaire associé à u que l'on peut obtenir par la méthode du pivot. $\blacksquare$

Propriété 1.14

Les opérations élémentaires sur les colonnes conservent l'image.

Les opérations élémentaires sur les lignes conservent le noyau.

Les opérations élémentaires conservent le rang.

Le noyau :

Méthode (Obtenir le noyau par pivot sur les lignes)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^n)$, et $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ sa matrice associée dans les bases canoniques.

1. On résout le système d'équation avec le pivot de Gauss sur les lignes de A .
→ k paramètres et $n - k$ inconnues principales.
2. Si on donne la valeur 1 à un paramètre fixé et 0 aux autres paramètres, alors on obtient un unique vecteur du noyau.
On fait cela pour chacun des k paramètres ce qui donne k vecteurs générateurs du noyau.
Ces vecteurs forment aussi une famille libre (trivial²) : c'est une base du noyau.

1. On peut également faire un travail *dual* sur les colonnes pour obtenir les mêmes résultats.
L'avantage de la présente méthode est qu'elle utilise la même procédure pour répondre aux deux questions : noyau comme image.

Propriété 1.15

La dimension du noyau est donnée par le nombre de paramètres du système.

Méthode (*Obtenir le noyau par pivot sur les colonnes*)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$, et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sa matrice associée dans les bases canoniques.

On réalise les mêmes opérations sur les colonnes de la matrice A et sur celles de la matrice identité I_p .

Lorsque l'on a la forme échelonnée, on considère les vecteurs colonne de la matrice identité modifiée qui correspondent aux colonnes nulles de la matrice A : ils forment une base du noyau.

Preuve

Faire des opérations sur les colonnes de la matrice A revient à réaliser des combinaisons linéaires sur la famille des $(u(x_i))_{i \in I}$.

Ces opérations sur la matrice identité réalisent ces mêmes combinaisons linéaires sur les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_p$. Ainsi, à chaque étape, la colonne modifiée de A correspond à l'image par u de la colonne correspondante modifiée dans I_p .

Les opérations sur les lignes correspondant à des opérations bijectives, les colonnes de I_p forment alors à tout instant une base de $\mathbf{K}^p$.

Ainsi, lorsque la matrice est échelonnée, les colonnes dans la matrice identité (modifiée) correspondant aux matrices nulles de A donnent bien une famille libre du noyau de u .

Or, il est clair qu'elle est de cardinal maximal, donc c'est une base. ■

Image :

Si $u \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ et $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base de $\mathbf{K}^p$, alors on a vu que

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)).$$

Matriciellement, cela veut dire que l'image est engendrée par les vecteurs colonne de la matrice.

Il s'agit ensuite d'en extraire une famille libre maximale pour avoir une base de l'image.

Méthode (*Obtenir l'image par pivot sur les lignes*)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$, et $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ sa matrice associée dans les bases canoniques.

La matrice échelonnée possède $r = n - k$ pivots.

Si on ne conserve dans la matrice initiale A que les vecteurs qui ont donné un pivot, on obtient une famille libre avec autant d'éléments que le rang de la matrice : c'est une base de l'image.

⚠ Il faut prendre les vecteurs colonne dans la matrice initiale A , et non dans la matrice échelonnée.

Preuve

Si on note A la matrice initiale et R une matrice échelonnée obtenue à partir de A (ce

n'est pas utile d'aller jusqu'à la matrice échelonnée réduite).

On note A' la matrice obtenue en extrayant de A les r vecteurs qui ont donné un pivot dans R .

On peut appliquer exactement les mêmes opérations sur les lignes de A' que celles réalisées sur A pour obtenir R . Comme on travaille uniquement sur les lignes et que les colonnes restent totalement indépendantes les unes des autres, on voit que l'on obtient alors exactement les r vecteurs de la matrice R qui possèdent des pivots.

C'est donc une matrice avec r colonnes qui contient r pivots : ces vecteurs colonnes forment une famille libre.

Or tout élément de l'image peut-être obtenu à partir de ces colonnes (les autres colonnes correspondent à des paramètres que l'on peut mettre à zéro).

Ainsi, la famille obtenue est à la fois libre et génératrice de l'espace $\text{Im } u$: c'est une base de $\text{Im } u$. ■

Pour se souvenir :

Lorsque l'on fait un pivot sur les lignes, alors on lit directement :

- le noyau avec les colonnes nulles.
En résolvant le système, chaque paramètre donne un vecteur de base du noyau.
- l'image avec les colonnes à pivot.
les colonnes correspondantes dans la matrice initiale forment une base de $\text{Im } u$.

Exemple

On considère l'application $u \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^4, \mathbf{K}^5)$ définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbf{K}^4$ par

$$u(x, y, z, t) = (x - y - 2z, 2x - y - 5z + t, x - 3z + t, -x + 3z - t, x + y - 4z).$$

Déterminer une base du noyau et une base de l'image de u .

À quelle(s) condition(s) sur a, b, c, d et e le vecteur (a, b, c, d, e) appartient-il à $\text{Im}(u)$?

Solution :

u est clairement linéaire car le vecteur image s'écrit en fonction des coordonnées du vecteur (x, y, z, t) .

Sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbf{K}^4$ et $\mathbf{K}^5$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

On réalise le pivot de Gauss sur les lignes :

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right) &\sim_L \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \leftarrow L_3 - L_1 \\ \leftarrow L_4 + L_1 \\ \leftarrow L_5 - L_1 \end{array} \\
 &\sim_L \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow L_3 - L_2 \\ \leftarrow L_4 + L_2 \\ \leftarrow \frac{1}{2}L_5 - L_2 \end{array} \\
 &\sim_L \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow -L_5 \\ \leftarrow L_3 \\ \leftarrow L_4 \end{array}
 \end{aligned}$$

On obtient 3 pivots donc l'image est de dimension 3. Une base de l'image s'obtient avec les colonnes qui ont donné des pivots (la première, la deuxième et la quatrième) :

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}((1, 2, 1, -1, 1), (-1, -1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, -1, 0)).$$

En effet, la famille donnée par les 4 vecteurs de la matrice A est génératrice de $\text{Im}(u)$ (car c'est l'image d'une base par u) et les trois vecteurs en question forment une famille libre extraite de cardinal maximal.

Le noyau est de dimension 1 car il y a un paramètre pour le système, on trouve ainsi

$$u(x, y, z, t) = 0_{\mathbf{R}^5} \iff \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ y - z + t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3z \\ y = z \\ t = 0 \end{cases}.$$

On obtient un vecteur de base avec $z = 1$ (les autres solutions sont proportionnelles) :

$$\text{Ker}(u) = \{(3z, z, z, 0), z \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}((3, 1, 1, 0)).$$

Pour trouver simplement une condition sur les coordonnées de (a, b, c, d, e) pour que le vecteur appartienne à $\text{Im}(u)$, il suffit de chercher à quelle condition le système $u(x, y, z, t) = (a, b, c, d, e)$ admet au moins une solution.

On rajoute donc un second membre au système linéaire et on réalise exactement les

mêmes opérations que précédemment sur les lignes. Après calculs, on obtient,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2a + b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2}a + b - \frac{e}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a - b - c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a + b + d \end{array} \right)$$

Le système est compatible si et seulement s'il n'y a pas de pivot dans le second membre, c'est-à-dire pour $2a - b - c = 0$ et $-a + b + d = 0$.

$$\text{Im}(u) = \{(a, b, c, d, e) \in \mathbf{R}^5, \text{ tel que } 2a - b - c = 0 \text{ et } -a + b + d = 0\}.$$

2 CHANGEMENT DE BASE

On connaît la matrice d'une application linéaire entre deux bases et on veut exprimer la matrice de cette même application, mais dans des bases différentes. C'est la même application linéaire, mais on change de « repère » pour l'exprimer.

Ce travail constituera une partie importante du programme d'algèbre linéaire de deuxième année : trouver des bases dans lesquelles les applications linéaires s'écrivent le plus simplement possible. L'idéal est d'obtenir une matrice diagonale.

Dans cette partie, E et F désignent deux espaces vectoriels de dimension finie.

A Matrice de passage

Principe général : Changer de base revient à appliquer un isomorphisme (c'est-à-dire une application linéaire qui transforme une base en une autre) : c'est multiplier par une matrice inversible.

Toute matrice inversible, peut être interprétée comme la matrice d'un changement de base.

Théorème 2.1 (Changement de la base de départ)

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{F}$ une base de F .

$$\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{F}}(u) = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{F}}(u) \times \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E).$$

Si on note $A = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{F}}(u)$, $A' = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{F}}(u)$ et $P = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$, alors

$$A' = AP.$$

Explications

Une fois qu'on a l'idée tout devient évident !

$u = u \circ \text{Id}_E$ et on se sert de l'identité (qui ne change pas l'application linéaire) pour modifier matriciellement la base de départ grâce aux règles de composition des applications.

Lorsqu'on lit l'expression du théorème, on part de la base $\mathcal{B}'$, pour aller dans la base $\mathcal{B}$ grâce à l'application identité, puis de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{F}$ avec u .

Exercice

Cela invite à la remarque importante suivante : la matrice de l'application identité est rarement la matrice identité. À quelle condition l'est-elle ?

Définition 2.2 (matrice de passage)

On appelle **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, la matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id})$.

Dans ce cours, on notera $\text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id})$.

Théorème 2.3

Soient E, F deux espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{F}$ une base de F .

$$\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{F}}(u) = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{F}}(u) \times \text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

Si on note $A = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{F}}(u)$ et $A' = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{F}}(u)$, alors

$$A' = A \times \text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

Explications

$\text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ permet de passer d'une matrice exprimée dans $\mathcal{B}$ à une matrice exprimée dans $\mathcal{B}'$.

Propriété 2.4 (Inverse de la matrice de passage)

Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E . $\text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible et

$$\left(\text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = \text{Pa}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}.$$

Preuve

Trivial en revenant à la définition de la matrice de changement de base $\text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id})$. ■

Théorème 2.5 (Expression de la matrice de passage)

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E .

$\text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans $\mathcal{B}$.

Preuve

$\text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$, donc les vecteurs colonnes sont les $\text{Id}_E(e'_i)$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$. ■

Exemple

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{K}^2$ et $\mathcal{F}$ la base canonique de $\mathbf{K}^3$,

Soit $f : \mathbf{K}^2 \rightarrow \mathbf{K}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y) = (x + y, x - y, y)$.

On pose $e'_1 = e_1 + e_2$ et $e'_2 = e_1 - e_2$. et on note $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$.

1. Donner la matrice de f entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$.
2. Justifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbf{K}^2$, et exprimer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$: $\text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.
3. Donner la matrice de f entre les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{F}$.
4. Exprimer les vecteurs e_1 et e_2 dans la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$.

Solution :

1. $f(e_1) = f(1, 0) = (1, 1, 0)$ ce qui donne la première colonne.
 $f(e_1) = f(0, 1) = (1, -1, 1)$ ce qui donne la deuxième colonne. Donc $A =$

$$\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{F}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. On a de nombreuses méthodes (équivalentes) pour montrer que $\mathcal{B}'$ est une base :
 - (a) La famille est libre et génératrice dans E .
 - (b) La famille est composée de deux vecteurs et elle est libre dans un espace de dimension 2 : c'est une base.
 - (c) La famille est composée de deux vecteurs et elle est génératrice dans un espace de dimension 2 : c'est une base.
 - (d) L'application $\varphi : e_i \mapsto e'_i$ est un isomorphisme (transforme une base en une autre).
 - (e) La matrice des vecteurs colonne e'_i exprimés dans $\mathcal{B}$ est inversible (ou de rang 2).
 - (f) La transposée de la matrice est de rang 2.
 - (g) ...

D'un point de vue calculatoire, toutes ces méthodes reviennent au même : elle consistent à montrer que la matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\varphi)$ des vecteurs colonne e'_i exprimés dans la base $\mathcal{B}$ définit un système de Cramer.

Or, $\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 2 car ses colonnes ne sont pas proportionnelles entre elles (ou son déterminant est non nul).
 Donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{B}$. Et la matrice de φ est également la matrice de passage $\text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

$$\text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(nouvelle base exprimée dans l'ancienne)

3. La matrice de f entre les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{F}$ s'obtient simplement en calculant $f(e'_1)$ et $f(e'_2)$. On trouve :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{F}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que l'on retrouve ainsi le résultat de la question précédente :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{F}}(f) = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{F}}(f) \times \text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Pour exprimer les vecteurs e_1 et e_2 dans la base $\mathcal{B}'$, il suffit de lire la matrice

$$\text{Pa}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \left(\text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \right)^{-1}.$$

C'est un calcul d'inverse. On trouve alors directement avec le pivot :

$$\text{Pa}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ici, comme les bases sont très simples, on peut aussi voir « à la main » que $e_1 = \frac{e'_1 + e'_2}{2}$ et $e_2 = \frac{e'_1 - e'_2}{2}$, et retrouver ainsi la matrice.

On remarque que l'on a bien $\text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times \text{Pa}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = I_2$.

Exemple

Dans $E = \mathbf{K}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{C}$, on définit les vecteurs

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E .
- Exprimer $\text{Pa}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id})$.

Exemple

Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$
 et $\mathcal{B}' = (1, 1 + X, \dots, 1 + X + X^2 + \dots + X^n)$ une base échelonnée.
 Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Solution :

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est très simple à exprimer.

C'est la matrice des polynômes échelonnés exprimés dans la base canonique :

$$\text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le fait que cette matrice soit inversible, confirme que la famille des polynômes échelonnés est bien une base.

Pour exprimer la base canonique en fonction de la famille des polynômes échelonnés, il suffit d'inverser la matrice. Ou pour inverser la matrice, il suffit d'exprimer la base canonique en fonction de la base des vecteurs échelonnés.

Exemple

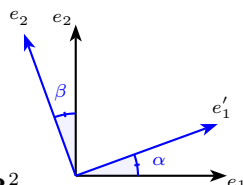
Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e_n, e_{n-1}, \dots, e_1)$ la base lue en sens inverse.

Donner $\text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $\text{Pa}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

Exemple (*Rotation du plan*)

Cet exemple a pour but de montrer la pluralité des approches envers un objet mathématique simple.

Soit l'application r de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même qui opère une rotation d'angle θ dans le sens trigonométrique.



- Nature de l'application :** c'est un automorphisme de $\mathbf{R}^2$.
Sa réciproque est la rotation d'angle $-\theta$.
- En géométrie complexe :** cette opération se résume à la multiplication par $e^{i\theta}$.
- Expression de l'automorphisme :** pour connaître l'expression de l'automorphisme, il suffit de connaître son action sur une base.
On considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.
 $r(e_1) = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ et $r(e_2) = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2$.

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- Interprétation comme matrice de passage :** cet automorphisme correspond à la matrice de passage qui transforme la base canonique $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ (base $\mathcal{B}$ tourné d'un angle θ).

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(r) = \text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

⚠ une même matrice peut représenter des applications linéaires différentes selon les bases dans lesquelles on l'interprète. Ici par exemple, la matrice représente une rotation lorsqu'elle est vue dans la base $\mathcal{B}$ et elle représente l'identité lorsque la base de départ est changée en $\mathcal{B}'$.

- Matrice inverse :** la matrice inverse correspond à la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$. C'est la matrice de la rotation d'angle $-\theta$.

$$\text{Pa}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \text{mat}_{\mathcal{B}}(r^{-1}) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

B Matrices équivalentes

Jusqu'à présent, on s'est contenté de changer la base de départ en multipliant à **droite** par une matrice de passage.

Pour changer la base d'arrivée, on multiplie à **gauche** par l'**inverse** de matrice de passage.

Théorème 2.6 (*Changement des bases de départ et d'arrivée*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E ; $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux bases de F .

$$\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{F}'}(f) = \left(\text{Pa}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'}\right)^{-1} \times \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{F}}(f) \times \text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Si on note $A = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{F}}(f)$, $A' = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{F}'}(f)$ alors

$$A' = \left(\text{Pa}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'}\right)^{-1} \times A \times \text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Preuve

$$\begin{aligned} \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{F}'}(f) &= \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{F}'}(\text{Id}_F \circ f \circ \text{Id}_E) \\ &= \text{mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(\text{Id}) \times \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{F}}(f) \times \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}) \\ &= (\text{mat}_{\mathcal{F}', \mathcal{F}}(\text{Id}))^{-1} \times \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{F}}(f) \times \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}) \\ &= \left(\text{Pa}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'}\right)^{-1} \times \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{F}}(f) \times \text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

Définition 2.7 (*Matrices équivalentes*)

Deux matrices sont dites **équivalentes**, si elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

On note $A \sim A'$. Ainsi,

$$A \sim A' \iff \exists (P, Q) \in \text{GL}_p(\mathbf{K}) \times \text{GL}_q(\mathbf{K}), A' = PAQ.$$

P et Q peuvent alors s'interpréter comme des matrices de passage.

Exemple (*Interprétation du pivot de Gauss-Jordan*)

Soit $A = \text{mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ la matrice d'une application linéaire entre E et F deux espaces vectoriels de dimensions q et p .

Appliquer l'algorithme de Gauss-Jordan aux lignes et aux colonnes de A , c'est

chercher deux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{F}'$ de E et F dans lesquelles l'application u s'écrit :

$$A' = \text{mat}(u, \mathcal{B}', \mathcal{F}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,q-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,q-r} \end{pmatrix}.$$

L'algorithme peut se résumer à la multiplication à gauche (opérations sur les lignes) et à droite (opération sur les colonnes) par des matrices inversibles.

On peut donc noter $A' = QAP$, avec P, Q inversibles : les matrices P et Q peuvent donc être interprétées comme des matrices de passage.

$P = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id})$ et $Q = \text{mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(\text{Id})$.

En particulier l'expression de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ est immédiate car elle correspond aux vecteurs colonne de P . Pour la base $\mathcal{F}'$, il faut déjà obtenir l'expression de Q^{-1} en inversant Q .

Propriété 2.8 (Propriétés des matrices équivalentes)

1. La relation « être équivalentes » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$: elle est

- réflexive : pour toute matrice A , $A \sim A$.
- symétrique : si $A \sim A'$ alors $A' \sim A$.
- transitive : si $A \sim A'$ et $A' \sim A''$ alors $A \sim A''$.

2. Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si elles représentent une même application linéaire entre deux bases différentes.

3. Toutes les matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ de rang r sont équivalentes à

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,q-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,q-r} \end{pmatrix}.$$

4. Deux matrices (de même taille) sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Preuve

1. • Immédiat avec P et Q les matrices identité de bon ordre.
• Si $A' = PAQ$ avec P et Q inversibles, alors $A = P^{-1}AQ^{-1}$.
• Si $A' = PAQ$ et $A'' = P'A'Q'$, alors $A'' = (P'P)A(QQ')$ avec $P'P$ et QQ' inversibles par produit.
2. On interprète les matrices inversibles comme des matrices de passage.
3. On peut le voir comme une application de l'algorithme de Gauss-Jordan tel que présenté à l'exemple précédent.
Le pivot sur les lignes permet d'obtenir une matrice échelonnée réduite en ligne, puis sur les colonnes.
L'application du pivot sur les lignes revient à multiplier à gauche par une matrice inversible (changement de la base d'arrivée) et le pivot sur les colonnes revient à multiplier à droite par une matrice inversible (changement de la base de départ).
Le rang n'est pas modifié par changement de base, donc la matrice est bien sous la forme proposée.
4. Parce qu'elles sont toutes les deux équivalentes à la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,q-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,q-r} \end{pmatrix}$ et par transitivité de la relation d'équivalence.

Exemple

Démontrer le point 3. de la propriété précédente de façon *intrinsèque* en démontrant l'existence des bases dans lesquelles la matrice prend la forme voulue.

Solution :

On considère u l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A de rang r . Ainsi u est également de rang r .

On reprend la preuve du théorème du rang en décomposant $E = S \oplus \ker(u)$. On construit une base de E adapté à cette somme directe.

Comme $u|_S$ réalise un isomorphisme de S sur $\text{Im}(u)$, les images de la base de S forment une base de $\text{Im}(u)$ que l'on peut ensuite compléter en une base de F .

Dans les deux bases considérées, la matrice a la bonne forme.

Propriété 2.9 (Invariance du rang par transposition)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$,

$$\text{rg } A = \text{rg } A^T.$$

Preuve

A est équivalente à J_r , donc on peut écrire $A = PJ_RQ$, avec P et Q inversibles.

Alors $A^T = Q^T J_r^T P^T = Q^T J_r P^T$.

De plus P^T et Q^T sont inversibles (car P et Q le sont) donc A^T est aussi équivalente à J_r donc de même rang que A .

C Matrices semblables

Pour un endomorphisme, ce qui a été dit précédemment reste vrai, mais s'avère sou-

vent insuffisant. En effet, pour un endomorphisme, on cherche en général à utiliser la même base au départ et à l'arrivée (sinon, on ne peut plus composer l'endomorphisme avec lui-même).

C'est la raison pour laquelle, on ne note la base qu'une seule fois : $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$.

Corollaire 2.10 (Cas particulier d'un endomorphisme)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E .

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \left(\text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} \times \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

Si on note

- $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans l'ancienne base $\mathcal{B}$,
- $A' = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(f)$ la matrice de f dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$,
- $P = \text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de l'ancienne base vers la nouvelle base,

alors

$$A' = P^{-1} A P.$$

Définition 2.11 (Matrices semblables)

Deux matrices sont dites **semblables**, si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

$$A \text{ semblable à } A' \iff \exists P \in \text{GL}_n(\mathbf{K}), A' = P^{-1} A P.$$

P peut alors s'interpréter comme la matrice de passage.

⚠ On choisit la même base au départ et à l'arrivée.

Propriété 2.12 (Propriétés des matrices semblables)

1. La relation « être semblables » est :
 - réflexive : toute matrice carrée est semblable à elle-même.
 - symétrique : si A est semblable à A' , alors A' est semblable à A .
 - transitive : si A est semblable à A' et si A' est semblable à A'' , alors A est semblable à A'' .
2. Deux matrices sont semblables si, et seulement si elles représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes.
3. Deux matrices semblables ont le même rang (la réciproque est fausse).
4. Deux matrices semblables ont la même trace (la réciproque est fausse).

Preuve

Immédiat (sur le modèle des matrices équivalentes).

Pour la trace cela vient de la propriété $\text{tr}(AP) = \text{tr}(PA)$. ■

⚠ Contrairement au cas des matrices équivalentes, deux matrices qui ont même rang n'ont aucune raison d'être semblables.

La notion « être semblable » est beaucoup plus forte que la seule notion d'équivalence. Par contre, elle est plus difficile à obtenir. Une partie importante de l'algèbre linéaire de seconde année sera tournée vers cette question.

Exemple

1. Trouver deux matrices carrées de même taille et de même rang qui ne sont pas semblables. Le prouver.
2. Trouver deux matrices carrées de même taille et de même trace qui ne sont pas semblables. Le prouver.

Solution :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont toutes les deux de même rang, mais de trace différente. Elles ne sont donc pas semblables.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont de même trace, mais pas de même rang. Elles ne sont donc pas semblables.

Exemple

Trouver toutes les matrices semblables à I_n .

Solution :

L'image d'un vecteur par l'identité est égal au même vecteur. Donc, dans n'importe quelle base, la matrice de l'application identité est I_n . Ainsi, I_n n'est semblable qu'à elle-même.

Le fait que toutes les matrices semblables aient même trace indique que la trace est une propriété intrinsèque de l'endomorphisme (il ne dépend pas du choix des bases). On peut donc définir :

Définition 2.13 (Trace d'un endomorphisme)

Soit E un espace de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On définit la **trace** de u comme la trace de sa matrice dans n'importe quelle base.

D Réduction des endomorphismes remarquables

Théorème 2.14

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .

1. u est une homothétie de rapport λ , si, et seulement si la matrice de u est la même dans n'importe quelle base avec

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \lambda I_n.$$

2. p est un projecteur de rang r , si, et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de p s'écrit

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(p) = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

3. s est une symétrie si, et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de s s'écrit

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & -I_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Preuve

1. trivial
2. $\text{Im } p \oplus \ker p = E$
Soit $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ une base de $\text{Im } p$, et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\ker p$.
Alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E adaptée à la somme directe.
Dans cette base, la matrice a la bonne forme.
La réciproque est évidente.
3. s est la symétrie sur F parallèlement à G (supplémentaires).
Dans une base adaptée à la somme directe, la matrice a la bonne forme.
La réciproque est évidente.

■

Corollaire 2.15 (Rang d'un projecteur)

Pour un projecteur p

$$\text{rg}(p) = \text{tr}(p).$$

Exemple (CCINP)

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équations $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbf{R}^3 = P \oplus D$.

2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbf{R}^3$ sur P parallèlement à D .
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Solution :

1. P est un plan car c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle de $\mathbf{R}^3$, et D est une droite car c'est l'intersection de deux hyperplans non confondus, ou encore $D = \text{Vect}(1, 2, 3)$.
Or, D n'est pas incluse dans P ($(1, 2, 3) \notin P$), donc $D \cap P = \emptyset$.
On a donc $P + D = P \oplus D$.
Et par égalité des dimensions $\mathbf{R}^3 = P \oplus D$.
2. $p(u) \in P$ et $u - p(u) \in D = \text{Vect}(1, 2, 3)$, donc il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $u - p(u) = \alpha(1, 2, 3)$, ou encore $p(u) = u - \alpha(1, 2, 3) = (x - \alpha, y - 2\alpha, z - 3\alpha)$.
On cherche donc α tel que $(x - \alpha, y - 2\alpha, z - 3\alpha) \in P$.
D'après l'équation qui caractérise P , on trouve $x + y + z - 6\alpha = 0$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{1}{6}(x + y + z)$.
Ainsi

$$p(u) = u - \alpha(1, 2, 3) = \frac{1}{6}(5x - y - z, -2x + 4y - 2z, -3x - 3y + 3z).$$

La matrice de p dans la base canonique se lit donc directement

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(p) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. On cherche une base adaptée pour exprimer la matrice.
On choisit une base de P , par exemple les deux vecteurs libres $e_1 = (1, 0, -1)$ et $e_2 = (1, -1, 0)$.
On complète avec $e_3 = (1, 2, 3)$ qui engendre D .
Les trois vecteurs forment bien une base car la somme $P \oplus D$ est directe.
Dans cette base, la matrice de p s'écrit

$$\text{mat}_{(e)}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E Changement de base pour un vecteur

Propriété 2.16 (Application du changement de base à une matrice colonne)

Si X est la matrice colonne de x exprimée dans la base $\mathcal{B}$ et X' représente le même vecteur x exprimé dans la base $\mathcal{B}'$, alors

$$X' = \text{Pa}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \times X = \left(\text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \right)^{-1} \times X.$$

⚠ Comme pour le changement de la base d'arrivée, on multiplie **à gauche** par **l'inverse** de la matrice de passage. En général, c'est la matrice $\text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ que l'on connaît car elle exprime les coordonnées de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ dans l'ancienne $\mathcal{B}$. On peut ainsi voir, en notant $A = \text{mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ et $A' = \text{mat}(u, \mathcal{B}', \mathcal{F})$ que :

$$\begin{aligned} A'X' &= \underbrace{A \times \text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}_{A'} \times \underbrace{\left(\text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \right)^{-1} \times X}_{X'} \\ &= A \times \underbrace{\text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times \left(\text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \right)^{-1}}_{I_n} \times X \\ &= AX \end{aligned}$$

Preuve

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}(x) = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(\text{Id}_E(x)) = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id}_E) \times \text{mat}_{\mathcal{B}}(x).$$

Exemple

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $A^2 = A$.

Montrer que A est semblable à la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r, n-r} \end{pmatrix}$$

avec $r = \text{rg } A$.

Solution :

A peut être vue comme la matrice d'un projecteur p exprimé dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbf{K}^n$.

Exemple

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $A^2 = 0$.

montrer que A est semblable à la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $r \leq \frac{n}{2}$

Solution :

On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A .

On considère une base $(e_1, \dots, e_r)$ de $\text{Im}(u)$ avec $r = \text{rg}(u)$.

Alors $u^2 = 0$, donc $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$.

On complète en une base de $\ker(u)$.

On note S un supplémentaire de $\ker(u)$ dans $\mathbf{K}^n$.

On sait que $u|_S$ induit un isomorphisme de S sur $\text{Im}(u)$.

donc les antécédents de $(e_1, \dots, e_r)$ forment une base de S .

On ajoute donc cette base à la suite de celle de $\ker(u)$ précédemment obtenue.

On obtient alors une base de $\mathbf{K}^n$ dans laquelle la matrice de u s'écrit sous la forme souhaitée.

On remarque que $r \leq \frac{n}{2}$ car $\dim S = \text{rg } u = r$.

Propriété 2.17

Si $A = PDP^{-1}$, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$.

Explications

Si on trouve une matrice très simple dont on sait facilement calculer les puissances (par exemple diagonale), alors le calcul des puissances de A peut s'en trouver grandement simplifié.

3 MATRICES EXTRAITES

A Caractérisation du rang

Définition 3.1 (Matrice extraite)

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, une **matrice extraite** de $A = (a_{i,j})$ est une matrice B obtenue à partir de A en enlevant certaines lignes et colonnes.

Propriété 3.2

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et B une matrice extraite de A .

$$\text{rg } B \leq \text{rg } A.$$

Preuve

Si on ne supprime dans un temps que des lignes de A (et non les colonnes pour obtenir B). On appelle B' la matrice obtenue.

Le rang de B' est égal au rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

Si on extrait donc une famille libre maximale pour B , elle sera également libre pour A .

Donc $\text{rg } B' \leq \text{rg } A$.

On fait la même chose sur les lignes (après application de la transposition qui ne change pas le rang) et on obtient donc le résultat voulu. ■

Théorème 3.3 (*Caractérisation du rang*)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Le rang de A est égal à la taille maximale des matrices inversibles que l'on peut extraire de A .

Preuve

La propriété précédente avait montré que le rang est supérieur à cette taille maximale. Pour obtenir l'égalité, on considère une base des matrices colonnes que l'on extrait de la matrice (et qui contient donc r vecteurs colonne). On fait de même avec la transposée : c'est fini. ■

B Matrice par blocs**Propriété 3.4**

On considère des matrices par blocs (les lettres dans la matrice ne désignent pas les coefficients mais des sous-matrices).

Sous réserve de compatibilité des dimensions, on a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}.$$

Explications

Le calcul s'effectue comme si les blocs étaient de simples coefficients.

Preuve

Calculatoire. ■

Exemple (*Interprétation des blocs*)

On considère la matrice $M \in \mathcal{M}_{n+n', p+p'}(\mathbf{K})$ définie par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p'}(\mathbf{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n',p}(\mathbf{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n',p'}(\mathbf{K})$. On note $u \in \mathcal{L}(E, F)$ l'application linéaire associée à M dans les bases (e) et (f) .

On pose $E_1 = \text{Vect}(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ et $E_2 = \text{Vect}(e_i)_{i \in \llbracket n+1, n+n' \rrbracket}$ de telle sorte que $E = E_1 \oplus E_2$.

On fait de même avec $F = F_1 \oplus F_2$.

A représente alors la projection sur F_1 de $u|_{E_1}$.

On interprète de même les autres blocs.

En particulier, si $C = 0$, alors $\text{Im}(u|_{E_1}) \subset F_1$.

On peut interpréter à nouveau le produit par bloc à partir de ces applications linéaires.

C Valeurs propres et vecteurs propres**Définition 3.5** (*Valeur propre*)

Soit u un endomorphisme de E ,

On dit que $\lambda \in \mathbf{K}$ est une valeur propre de u si elle vérifie l'une de ces trois conditions (équivalentes)

- $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas inversible.
- $\ker(u - \lambda \text{Id}) \neq \{0\}$.
- $\exists x \neq 0$, tel que $u(x) = \lambda x$.

Preuve

L'équivalence entre ces deux premières formulations vient du fait que u est un endomorphisme en dimension finie et donc que u bijective est équivalent au fait que u soit injective.

L'équivalence entre les deux dernières est triviale (c'est la définition du noyau). ■