Espaces vectoriels approfondissement

« Sachez seulement qu'il n'y a pas que des nombres...
il y a aussi des grandeurs, des sommes, il y a des groupes, il y a des tas,
des tas de choses telles que les prunes, les wagons, les oies, les pépins... »
La Leçon, Ionesco

Ce document est un approfondissement du cours proposé en classe. Il constitue un complément pour proposer une présentation **plus formelle et rigoureuse** et permettra aux étudiants qui le souhaitent d'aller plus loin dans leur maîtrise des objets présentés.

1 Structure d'espace vectoriel

A Structure algébrique

Définition 1.1 *(Espace vectoriel)*

Un ensemble E muni des opérations $+$ et $\cdot$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. **loi interne « + » :**
   (a) $+$ est une loi *interne* : $\forall (u,v) \in E^2$, $u+v \in E$,
   (b) $+$ est *associative* : $\forall (u,v,w) \in E^3$, $(u+v)+w = u+(v+w)$,
   (c) $+$ est *commutative* : $\forall (u,v) \in E^2$, $u+v = u+v$,
   (d) $+$ admet un élément neutre noté 0_E : $\forall u \in E$, $u+0_E = u$,
   (e) tout élément de E admet un symétrique pour la loi $+$:
   $\forall u \in E, \exists v = (-u) \in E,$ tel que $u+(-u) = 0$,
   $(-u)$ est appelé l'**opposé** de u.
2. **loi externe « · » :** produit avec un scalaire
   (a) $\cdot$ est une loi de $\mathbf{R} \times E$ dans E,
   (b) $\forall u \in E,\ 1 \cdot u = u$,
   (c) (distributivité par rapport à l'addition de E)
   $$\forall \lambda \in \mathbf{R},\ \forall (u,v) \in E^2, \quad \lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v,$$
   (d) (distributivité par rapport à l'addition de $\mathbf{R}$)
   $$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2,\ \forall u \in E, \quad (\lambda+\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u,$$
   (e) (associativité mixte) $\quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2,\ \forall u \in E, \quad (\lambda \times \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$.

Les éléments de $(E,+,\cdot)$ sont alors appelés **vecteurs**.
Les éléments de $\mathbf{R}$ sont appelés **scalaires**.
L'élément neutre 0_E de E s'appelle le **vecteur nul**.

Remarques sur les notations :

- Dans la notation $\lambda \cdot u$, on omet souvent le point « · » pour écrire simplement $\lambda\, u$.
- En géométrie, il est d'usage de noter les vecteurs en gras $\boldsymbol{u}$ ou avec une flèche $\overrightarrow{u}$. Dans ce cours, nous noterons les vecteurs de la même manière que les scalaires ce qui demande de redoubler de vigilance et de bien réflechir à la nature de l'objet. Pour faciliter la lecture, il est d'usage d'utiliser plutôt les lettres latines $(u,v,w,...)$ pour les vecteurs et les lettres grecques $(\lambda,\mu,...)$ pour les scalaires, mais il y a toujours des exceptions.

Explications
Toutes ces conditions de la définition sont naturelles avec les ensembles sur lesquels nous travaillons, mais la rigueur mathématique exige d'en faire la liste exhaustive pour

définir proprement ce qu'est un espace vectoriel et éviter toute ambigüité future.

1. **loi interne :**
   (a) La caractère interne est essentiel pour « *ne pas sortir de l'ensemble* » avec une opération.
   (b) L'associativité permet de s'affranchir des parenthèses : il n'y a pas d'ordre de priorité au sein de l'addition. Ainsi, je peux commencer par ajouter u et v puis ensuite w à droite ou au contraire, commencer à ajouter v et w puis ensuite u à gauche.
   (c) La commutativité ne doit pas être confondue avec l'associativité. L'associativité permet de ne pas utiliser les parenthèses, mais l'ordre d'*écriture* importe, c'est la raison pour laquelle nous précisions au point précédent si on ajoutait à droite ou à gauche. Avec la commutativité nous pouvons mélanger les termes : additionner à droite ou à gauche revient au même.
   (d) L'intérêt de l'élément neutre n'est pas immédiat. Pourquoi inventer un élément dont le rôle est justement de *ne rien faire* ? Ce n'est pas pour rien s'il a fallu attendre le XII$^{\text{ème}}$ siècle pour que le 0 soit pleinement accepté en Occident.
   En fait, le zéro devient important lorsqu'il ne s'agit plus seulement d'ajouter mais aussi de soustraire. C'est l'objet du point suivant.
   (e) Chaque élément admet un symétrique. Lorsque l'on ajoute à un élément son symétrique on retombe sur l'élément neutre. On parle d'opposé. L'existence d'un symétrique veut dire que l'on peut soustraire. Soustraire, c'est ajouter l'opposé[1]. C'est pour pouvoir définir cet opposé que nous avions besoin de l'élément neutre 0.
2. **loi externe :**
   (a) On définit une loi de $\mathbf{R} \times E$ dans E, car à partir d'un scalaire $\lambda \in \mathbf{R}$ et d'un vecteur $u \in E$, on obtient un nouveau vecteur $\lambda \cdot u \in E$.
   $$\begin{cases} \mathbf{R} \times E & \to E \\ (\lambda, u) & \mapsto \lambda \cdot u \end{cases}$$
   (b) Si on multiplie le vecteur par 1, il ne faut pas qu'il soit modifié.
   (c) Si dans une caisse, on place un panier u et un panier v et qu'on prend λ caisses, alors, on obtient au total λu et λv : multiplier les objets séparément ou ensemble revient au même.
   (d) Prendre 5 fois u, revient au même que de prendre 3 fois u, puis encore 2 fois u.
   (e) Prendre 15 fois u est la même chose que prendre 5 fois u et de multiplier le tout par 3.

Remarque : on peut montrer que l'élément neutre et l'opposé sont définis de manière unique.

1. En fait, la soustraction en tant que telle n'a pas besoin d'être définie, c'est simplement l'ajout de l'opposé.

B Exemples et propriétés élémentaires

Propriété 1.2

Un espace vectoriel est toujours **non vide** : il contient le vecteur nul.

Théorème 1.3 *(Règles de calcul)*

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel. Si $\lambda \in \mathbf{R}$, et $u \in E$ alors

1. $\lambda \cdot u = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $u = 0_E$.
2. L'opposé de u, noté $-u$ est égal à $(-1) \cdot u$. Il vérifie $u - u = 0_E$.

Preuve

Admis. ■

Remarque : Il ne faut par confondre 0_E l'élément nul de l'espace vectoriel avec le nombre 0. 0_E et 0 sont des objets de nature différente :

- 0_E désigne un vecteur (un couple, une application, un n-uplet... on pourrait mettre une flèche au dessus).
- 0 est un nombre réel.

Définition 1.4 *(Combinaison linéaire)*

On appelle **combinaison linéaire** de E toute somme finie de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot u_k$$

où $u_1, u_2, \cdots, u_n$ représentent un nombre **fini** de vecteurs
et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont des nombres réels (scalaires).

Propriété 1.5

Un espace vectoriel est *stable* par combinaison linéaire.

C'est **la** propriété essentielle des espaces vectoriels : celle qui nous intéressait dans notre exemple initial. Les espaces vectoriels sont conçus pour pouvoir réaliser des combinaisons linéaires (additions et produit externe). Dans le théorème 1.7, nous verrons que cette notion suffit *presque* pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.

Preuve

Idée : faire une récurrence sur le nombre n d'éléments de la somme et couper celle-ci en deux pour l'hérédité.

Initialisation : pour $n = 0$, si la somme est vide, alors elle est nulle.
Or E contient le vecteur nul. L'initialisation est donc vraie.
Hérédité : on suppose le résultat vrai pour toute combinaison linéaire à n éléments et on le montre pour $n+1$ éléments.
Soient $(u_1, u_2, \cdots, u_{n+1}) \in E^{n+1}$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k u_k = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \right) + \lambda_{n+1} u_{n+1} \qquad \text{(associativité)}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \in E$.
De plus, $\lambda_{n+1} \in \mathbf{R}$ et $u_{n+1} \in E$,
donc par propriété sur le produit externe $\lambda_{n+1} u_{n+1} \in E$.

Et la somme de deux éléments de E est un élément de E, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k u_k \in E$.

D'après le principe de récurrence, le résultat est vrai pour toute combinaison linéaire.

■

Exemple *(à connaître)*

- Le plan $\mathbf{R}^2$ est un espace vectoriel, il correspond à tous les *vecteurs* du plan.
- L'espace $\mathbf{R}^3$ est un espace vectoriel, il correspond à tous les *vecteurs* de l'espace.
- L'espace $\mathbf{R}^n$ des n-uplets sur $\mathbf{R}$ est un espace vectoriel.
- L'ensemble des applications d'un ensemble non vide Ω à valeurs dans $\mathbf{R}$ est un espace vectoriel (avec les opérations usuelles).
- L'ensemble des suites réelles : $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ forme un espace vectoriel.
- Pour I un intervalle non vide, l'ensemble des applications de I dans $\mathbf{R}$: $(\mathbf{R}^I, +, \cdot)$ forme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

La démonstration pour montrer que ces ensembles sont des espaces vectoriels est longue et représente peu d'intérêts.

C Sous espaces vectoriels

Définition 1.6 *(Sous espace vectoriel)*

Soit E un espace vectoriel.
Un **sous espace vectoriel** de E est un espace vectoriel inclus dans E.

Exemple

Un plan passant par l'origine est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

Théorème 1.7 *(Caractérisation des sous espaces vectoriels)*

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, et $F \subset E$,
F est un **sous espace vectoriel** de E s'il vérifie l'**une** des propriétés équivalentes suivantes :

- F est non vide et stable par combinaison linéaire.
- $\begin{cases} 0_E \in F \\ \forall (u, v) \in F^2, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad u + \lambda v \in F \end{cases}$.
- $\begin{cases} 0_E \in F \\ \forall (u, v) \in F^2, \quad u + v \in F \\ \forall u \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda u \in F \end{cases}$.

Remarque : on peut remplacer la condition $0_E \in F$ par $F \neq \emptyset$.

Preuve

Cette preuve peut être sautée sans problème.
L'équivalence des trois formulations est immédiate. Nous ne la prouvons donc pas ici.
Par contre, nous montrons que la deuxième formulation (par exemple) permet bien de caractériser les sous espaces vectoriels.

Tout d'abord un sous espace vectoriel vérifie toujours cette condition (propriétés 1.2 et 1.5).
Réciproquement, supposons qu'un sous-ensemble F de E vérifie cette condition, et montrons que c'est un sous espace vectoriel de E.

1. « + » est une loi interne en prenant $\lambda = 1$.
2. « + » est associative et commutative car E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
3. En prenant $\lambda = -1$, chaque élément admet un symétrique pour « + ».
4. $0_E \in F$ par hypothèse (si on remplace la condition par $F \neq \emptyset$, alors, on a $0 \cdot x = 0_E$, donc $0_E \in F$).
5. La loi externe est à valeurs dans F (en prenant $u = 0_E$).
6. « $\cdot$ » est distributive par rapport à « + » suivant la loi interne et la loi externe car E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
7. $\forall u \in E$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, $1 \cdot u = u$ et $(\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$ car E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

Donc F est un espace vectoriel.

■

Méthode

Il est beaucoup plus rapide de montrer qu'un ensemble est un sous espace vectoriel d'un autre plutôt que de vérifier les axiomes un à un. À chaque fois que l'on demande de montrer qu'un ensemble $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel, il faut chercher à montrer que c'est un sous espace vectoriel d'un espace connu.

Exemple

Montrer que les ensembles ci-dessous sont des $\mathbf{R}-$espaces vectoriels (munis des opérations usuelles).

- $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \text{ tel que } x + y + z = 0\right\}.$
- $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \text{ tel que } x = 3y = -2z\right\}.$
- $E = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ dérivable}, \text{ tel que } f' + 5f = 0\}.$
- $E = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \text{ tel que } f(1) = 0\}.$

Solution :

Méthode *(Montrer que E n'est pas un espace vectoriel)*

Pour montrer qu'un ensemble E n'est pas un espace vectoriel :

1. On teste si $0 \in E$.
2. Si c'est vérifié, alors on cherche des vecteurs et des scalaires pour construire une combinaison linéaire dont le résultat n'est pas dans E.

Exemple *(Contre-exemples)*

Montrer que les ensembles ci-dessous ne sont pas des espaces vectoriels (munis des opérations usuelles)

- Une droite affine du plan : pour $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$,
  $E = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \text{ tel que } y = ax + b\right\}.$
- Une demi-droite du plan.
- $E = \{f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \text{ tel que } f(0) = 1\}.$

Solution :

D Intersections d'espaces vectoriels

Théorème 1.8 *(Intersection de deux espaces vectoriels)*

Si F et G sont deux sous espaces vectoriels de E, alors $(F \cap G, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Preuve

- $F \cap G \subset F$, il suffit donc de montrer que $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de F.
- $0_E \in F \cap G$ (car $0_E \in F$ et $0_E \in G$: ce sont des espaces vectoriels),
- $\forall (u, v) \in F \cap G, \forall \lambda \in \mathbf{R}$,
  or $(u, v) \in F^2$, donc $u + \lambda v \in F$ car F est un espace vectoriel.
  et $(u, v) \in G^2$, donc $u + \lambda v \in G$ car G est un espace vectoriel.
  Donc $u + \lambda v \in F \cap G$.

Donc $F \cap G$ est un espace vectoriel. ∎

Exemple

L'intersection de deux plans vectoriels (non confondus) dans l'espace forme une droite vectorielle.

Théorème 1.9 *(Intersection)*

Toute intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Remarque : C'est vrai pour l'intersection d'un nombre quelconque d'espaces vectoriels.

Preuve

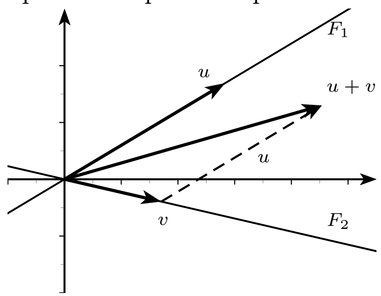
C'est la même preuve que pour 2 espaces. ■

⚠ En général l'union de deux espaces vectoriels $E \cup F$ **n'est pas** un espace vectoriel.

Exemple

L'union de deux droites non confondues du plan n'est pas un espace vectoriel.

Sur la figure ci-contre,
Si on note F_1 la première droite et F_2 la seconde droite.
$u \in F_1$, donc $u \in F_1 \cup F_2$
$v \in F_2$, donc $v \in F_1 \cup F_2$,
mais $u + v \notin F_1$, $u + v \notin F_2$,
donc $u + v \notin F_1 \cup F_2$.



Explications

En général, les structures « passent très bien » à l'intersection et mal à l'union.
Cela se comprend aisément : faire l'intersection de deux ensembles, c'est cumuler les conditions de chacun : si $u \in E \cap F$, alors u vérifie *à la fois* les conditions de E et celles de F. C'est une notion très restrictive : on trie les candidats sur le volet.
En revanche, les structures passent moins bien à l'union, car dans l'union, il suffit de ne vérifier que l'une *ou* l'autre des conditions d'appartenance : c'est beaucoup moins rigide.
Cette idée n'est pas spécifique aux espaces vectoriels : par exemple, l'intersection de deux intervalles est encore un intervalle (éventuellement vide), par contre, l'union n'en est pas un (sauf cas particulier).

E Sous espaces vectoriels engendrés

L'objet de cette section est de trouver une méthode pour décrire un espace vectoriel sans avoir besoin de lister tous les éléments de l'espace (il y en a une infinité).

Définition 1.10 *(Sous espace vectoriel engendré)*

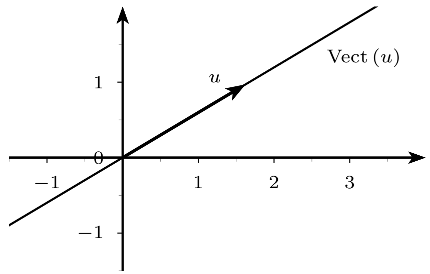
Soit E un espace vectoriel, et $u_1, u_2, \cdots, u_n$ une famille finie de vecteurs de E.
On appelle sous espace vectoriel de E **engendré** par $u_1, u_2, u_3, \cdots u_n$, le sous espace vectoriel de E composé des combinaisons linéaires des u_i.
On note

$$\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots \lambda_n u_n, \ \text{pour } (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n\}.$$

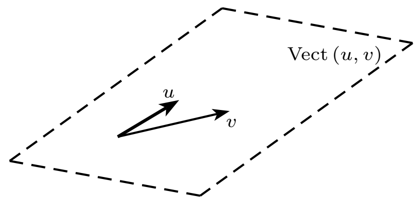
Remarque : On vérifie aisément que c'est un sous espace vectoriel de E.
Ce sous espace vectoriel correspond à tous les vecteurs que l'on peut obtenir à partir des $(u_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$.

Exemple

- L'espace vectoriel engendré par un vecteur u : $\mathrm{Vect}\,(u) = \mathbf{R}u$ est la droite vectorielle de vecteur directeur u (qui passe par 0_E).
  Par exemple, dans le plan :



- Espace vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires u, v :
  $\mathrm{Vect}\,(u, v) = \left\{\lambda u + \mu v, \ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\right\}$ est le plan vectoriel engendré par ces deux vecteurs.



La définition précédente d'un espace vectoriel engendré sera suffisante pour les situations concrètes auxquelles vous serez confrontés.

On peut cependant la généraliser à un espace vectoriel engendré, non seulement par une famille finie de vecteurs, mais également par une partie quelconque de E.

Définition 1.11 *(Sous-espace vectoriel engendré par une partie)*

Soit E un espace vectoriel, et $\mathcal{F}$ une partie de E.
On appelle sous espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$, le plus petit[2] sous espace vectoriel de E qui contient $\mathcal{F}$.
On le note $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$.

Caractérisation :
$\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ est alors égal à l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{F}$.

$$\mathrm{Vect}\;(\mathcal{F}) = \bigcap_{F\in\mathcal{S}} F.$$

avec $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous espaces vectoriels de E qui contiennent $\mathcal{F}$.

Preuve

Il faut démontrer que cette définition a un sens, c'est-à-dire qu'il existe un plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E qui contient F.
L'ensemble des sous-espace vectoriels qui contiennent F est non vide, car E en fait partie.
Leur intersection est également un sous-espace vectoriel de E (voir théorème 1.9) et il contient F.
S'il existe un sous-espace vectoriel de E qui contient F, alors, il fait partie de l'intersection, donc il est plus grand (au sens de l'inclusion) que l'intersection.
La définition et la caractérisation sont donc démontrées. ■

Théorème 1.12

Le sous espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est égal au sous espace vectoriel engendré par la partie $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

$$\mathrm{Vect}\;(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \mathrm{Vect}\;(\{x_1, x_2, \cdots, x_n\})\,.$$

Explications

En d'autres termes, l'espace vectoriel formé par les combinaisons linéaires des x_i est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient tous les x_i : les définitions 1.10 et 1.11 ne sont pas contradictoires.

Preuve

Cette preuve est très simple, les difficultés viennent des notations qui sont proches.
L'étudiant capable de comprendre et refaire cette preuve a certainement compris la notion d'espace vectoriel engendré.
Si F est un espace vectoriel qui contient les x_i, alors il contient toutes leurs combinaisons linéaires (puisqu'il est stable par combinaisons linéaires).
Donc cet espace F contient $\mathrm{Vect}\;(x_1, \cdots, x_n)$.
Ainsi, $\mathrm{Vect}\;(\{x_1, x_2, \cdots, x_n\})$ qui contient tous les x_i, contient $\mathrm{Vect}\;(x_1, \cdots, x_n)$:

$$\mathrm{Vect}\;(x_1, \cdots, x_n) \subset \mathrm{Vect}\;(\{x_1, x_2, \cdots, x_n\})\,.$$

Or $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset \mathrm{Vect}\;(x_1, \cdots, x_n)$ par définition, donc

$$\mathrm{Vect}\;(\{x_1, \cdots, x_n\}) \subset \mathrm{Vect}\;(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,.$$

(car $\mathrm{Vect}\;(\{x_1, \cdots, x_n\})$ est le plus petit espace qui contient les x_i)
Donc par double inclusion :

$$\mathrm{Vect}\;(\{x_1, \cdots, x_n\}) = \mathrm{Vect}\;(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,.$$

■

2 Familles finies de vecteurs

Dans cette section, E désigne un espace vectoriel.

A Familles libres et liées

Nous avons vu comment engendrer un espace vectoriel par une famille de vecteurs. Mais parfois, la famille contient des informations redondantes : par exemple $\mathrm{Vect}\,(u, 2u) = \mathrm{Vect}\,(u)$. En effet, $\mathrm{Vect}\,(u, 2u)$ est exactement la droite engendrée par u : ici, l'ajout dans la famille du vecteur $2u$ n'apporte aucune information supplémentaire (car il est colinéaire à u).
Le but de cette section est analyser l'information portée par une famille de vecteurs :

- Lorsque tous les vecteurs de la famille sont *indispensables* et apportent chacun une information nouvelle, alors on dira que la famille est **libre**.
- A contrario, si certains vecteurs de la famille sont *superflus* et n'apportent aucune information supplémentaire, alors, la famille sera dite **liée** : on peut lui retirer un certain nombre de vecteurs sans modifier l'espace qu'elle engendre.

La famille $(u, 2u)$ est liée : on peut supprimer l'un des deux vecteurs sans que cela change l'espace engendré. Par contre, si $u \neq 0$, alors la famille composée du seul vecteur u est libre : si on enlève le vecteur, l'espace engendré est $\{0\}$ et non plus la droite.
On cherchera autant que possible à travailler avec des familles libres pour éviter les informations redondantes.

Définition 2.1 *(Famille libre et famille liée)*

Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que la famille est **liée**, si un de ses vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.
- On dit que la famille est **libre** si elle n'est pas liée. Dans ce cas, on dit aussi que les vecteurs sont **linéairement indépendants**.

2. Au sens de l'inclusion : tout sous espace vectoriel de E qui contient $\mathcal{F}$, contient ce sous espace.

Exemple

Deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$ forment une famille libre s'ils ne sont pas colinéaires.
Trois vecteurs de $\mathbf{R}^n$ forment une famille libre s'ils ne sont pas coplanaires.

Exemple

Dans $E = \mathbf{R}^3$, on définit les vecteurs $u = (2, 3, 5)$, $v = (3, 4, 0)$ et $w = (5, 7, 5)$.
Montrer que la famille (u, v, w) est liée, mais que la famille (u, v) est libre.
Solution :

Théorème 2.2 *(Caractérisation des familles liées et libres)*

$(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est une **famille libre**, si et seulement si

$$\forall(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

$(u_1, u_2, \cdots, u_n) \in E^n$ est une **famille liée**, si et seulement si

il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ **non tous nuls** tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$.

Remarque : pour la famille libre, on a même l'équivalence, mais la réciproque n'apporte rien car elle est toujours vraie.

Preuve

(*sens direct*) par l'absurde : soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$.

Supposons par l'absurde qu'il existe un λ_{i_0} non nul, alors $u_{i_0} = \sum\limits_{i \neq i_0} -\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} u_i$.

Donc u_{i_0} s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs : la famille n'est pas libre. C'est aburde. Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$.
(*sens réciproque*) par contraposée : si la famille est liée, alors un des vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres. Par exemple $u_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \lambda_i u_i$.

Donc en posant $\lambda_{i_0} = -1$, on trouve $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ et les λ_i sont non tous nuls.

D'où le résultat par contraposée.
Le cas de la famille liée s'obtient simplement par la négation du précédent. ∎

Méthode

- Pour montrer qu'une famille $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est **libre**,
  on suppose n scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ dans $\mathbf{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0$,
  et on montre que tous les λ_k sont nécessairement nuls.
- Pour montrer qu'une famille $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est **liée**,
  on cherche une combinaison linéaire qui donne 0_E.

Exemple

Montrer que les trois vecteurs $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 1, 2)$ et $w = (2, 3, 1)$ forment une famille libre de $\mathbf{R}^3$.
Solution :

Propriété 2.3 *(Interprétation de la liberté)*

La famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille **libre** de E, si et seulement si tout vecteur de $\operatorname{Vect}(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ s'exprime de manière *unique* comme combinaison linéaire des u_i.

Preuve

- **sens direct :** on suppose que la famille est libre et on décompose un vecteur $u \in \operatorname{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ de deux manières différentes : $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i$.
  Montrons que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = \mu_i$ (la décomposition est unique).
  Si on fait la différence, on obtient : $0_E = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) u_i$.
  Or, la famille $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est libre, donc une si combinaison linéaire de ses vecteurs est nulle, alors les coefficients sont nuls. Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i - \mu_i = 0$, donc $\lambda_i = \mu_i$.
- **sens réciproque :** on suppose que la décomposition est unique pour tout vecteur de l'espace engendré. C'est donc vrai en particulier pour le vecteur 0 :
  $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot u_i \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$. Donc la famille est bien libre. ∎

Explications

Quel est l'intérêt d'une famille libre ?
Si un vecteur u peut être décomposé comme combinaison linéaire des éléments de cette famille, alors, cette décomposition est unique.
C'est l'intérêt des familles libres, on pourra raisonner par identification :

> Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leur décomposition dans la famille est identique.

Le théorème suivant sert à construire des familles libres par ajouts successifs de vecteurs. On l'utilise dans des raisonnements par récurrence.
Il traduit une intuition géométrique forte qu'il faut comprendre :
Si on veut ajouter un vecteur qui donne une « information » supplémentaire, il faut (et il suffit) qu'il n'appartienne pas à l'espace déjà engendré par les premiers vecteurs.

Théorème 2.4 *(Ajout d'un vecteur à une famille libre)*

Si $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre de E et $y \in E$,
alors la famille obtenue à partir de $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ complétée par y est libre si et seulement si

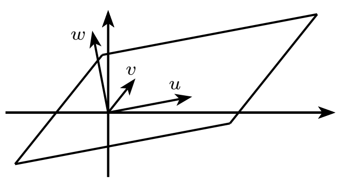
$$y \notin \text{Vect } (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\,.$$

Preuve

(sens direct) par contraposée.
Si $y \in \text{Vect }\left(\{u_i\}_{i\leqslant i\leqslant n}\right)$, alors y s'écrit comme combinaison linéaire des (u_i), donc la nouvelle famille est liée.
(sens réciproque) par contraposée.
Si la famille obtenue est liée, alors on peut trouver des vecteurs (non tous nuls) tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i + \lambda_{n+1} y = 0_E$.
Si $\lambda_{n+1} = 0$, alors la famille des u_i serait liée, ce qui est contraire à l'énoncé. Donc en divisant par λ_{n+1}, on montre que $y \in \text{Vect }\left(\{u_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}\right)$. ■

Exemple

Si u et v sont deux vecteurs non colinéaires (famille libre), alors Vect (u, v) est un plan.
Pour que la famille (u, v, w) soit libre, il faut (et il suffit) que les vecteurs soient non coplanaires, c'est-à-dire que w n'appartienne pas au plan engendré par u et v.



Propriété 2.5 *(Famille extraite)*

Toute famille extraite d'une famille libre est libre.

Explications

Si dans une famille de vecteurs, chaque vecteur porte une information qui lui est propre et ne peut pas s'obtenir avec les autres vecteurs de la famille, alors, c'est « encore plus vrai » si on ne prend qu'une partie de cette famille :

Preuve

On suppose que $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est une famille libre.
On en extrait une sous famille (c'est-à-dire que l'on ne prend qu'une partie des u_k) et on écrit qu'une combinaison linéaire de ces vecteurs est égale à 0_E.
Or, c'est également une combinaison linéaire de la famille initiale (on rajoute zéro fois chacun des vecteurs qui n'apparaissait pas dans la sous famille).
Donc, par liberté de la famille initiale, tous les scalaires sont nécessairement nuls.
Ils le sont donc pour la sous famille : elle est libre. ■

B Familles génératrices

La notion de famille génératrice est très simple dans son principe : par définition, une famille est génératrice de l'espace qu'elle engendre.
Ainsi, pour savoir si une famille est génératrice de E, il faut voir si la famille engendre l'espace E.

Définition 2.6 *(Famille génératrice)*

La famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille **génératrice** de E, si

$$E = \text{Vect } (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\,.$$

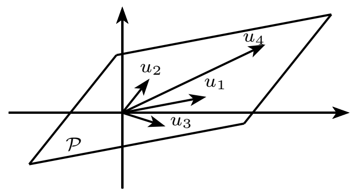
Cette notion nous assure que l'on ne travaille pas dans un espace « trop gros » et que tout vecteur de E peut être décomposé dans la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Si ce n'était pas le cas, alors, il faudrait, soit travailler dans un espace plus petit, soit ajouter des vecteurs dans la famille.

Théorème 2.7 *(Caractérisation)*

La famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille **génératrice** de E, si et seulement si tout vecteur de E peut s'exprimer comme combinaison linéaire des u_i.

Exemple

Une famille de $\mathbf{R}^3$ génératrice d'un plan doit contenir deux vecteurs non colinéaires.
Dans la figure ci-contre,
(u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille génératrice du plan $\mathcal{P}$.
(on pourrait générer le même plan avec moins de vecteurs)



Exemple *(Trouver une famille génératrice)*

Soit F le sous espace de $\mathbf{R}^4$ défini par

$$F = \left\{(x+y+z, x-3y+4z, y-z, -x+2z)\,, \quad (x,y,z) \in \mathbf{R}^3\right\}$$

Donner une famille génératrice de F.

Solution :

Exemple *(méthode)*

Montrer que $e_1 = (1,1,1)\,, e_2 = (1,2,3), e_3 = (2,3,4), e_4 = (3,2,3)$ forment une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$. La famille est-elle libre ?

Solution :

Dans l'exemple précédent, on observe que la famille est génératrice si et seulement si le système admet une solution quelque soit le second membre.

⚠ Ne pas être génératrice de $\mathbf{R}^n$ n'empêche pas d'être génératrice d'un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.

Propriété 2.8 *(Famille complétée)*

Tout famille génératrice de E complétée d'un ou plusieurs vecteurs de E est génératrice de E.

Preuve

Si $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est une famille génératrice de E que l'on complète avec $u_{n+1}, \cdots, u_p$, alors tout vecteur $u \in E$ peut s'écrire comme combinaison de $u_1, \cdots, u_n$. Ainsi il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ ..

En posant $\lambda_{i+1} = \cdots = \lambda_p = 0$, alors on a également $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$.

Donc $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est une famille génératrice de E. ∎

C Bases

Ce qui nous intéresse, c'est de pouvoir générer un espace avec le nombre minimal de vecteurs.

Pour cela, il faut donc que la famille de vecteurs soit génératrice.

Mais en général, une famille génératrice contient plus de vecteurs que nécessaire. On impose donc également à la famille d'être libre.

Définition 2.9 *(Base)*

La famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une **base** de E, si elle est libre et génératrice de E.

Théorème 2.10 *(Caractérisation)*

La famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une **base** de E, si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire de façon *unique* comme une combinaison linéaire des u_i.

Les coefficients de la combinaison linéaire sont alors appelés les **coordonnées** du vecteur dans la base.

Preuve

Tout vecteur de E peut se décomposer dans la famille car elle est génératrice de E et l'écriture est unique car la famille est libre. ∎

Exemple

- Les vecteurs $\overrightarrow{i} = (1,0)$ et $\overrightarrow{j} = (0,1)$ forment une base de $\mathbf{R}^2$.
- De même, si dans $\mathbf{R}^n$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $e_1 = (0, 0, \cdots, \underbrace{1}_{i}, 0, ..)$ le vecteur dont toutes les coordonnées valent 0, sauf la coordonnée i qui vaut 1, alors $\mathcal{C} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$ appelée **base canonique** de $\mathbf{R}^n$.

Exemple

Donner une base de $\mathbf{R}^2$, autre que la base canonique.

Solution :

Exemple *(Décomposer un vecteur dans une base de $\mathbf{R}^n$)*

Dans $\mathbf{R}^3$, on définit les vecteurs $e_1 = (1, 5, 2)$, $e_2 = (0, 2, -2)$ et $e_3 = (1, 3, 2)$.
Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ donner les coordonnées de $u = (x, y, z)$ dans cette base.

Solution :

3 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 3.1

Un espace vectoriel est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie.

Remarque : Certains espaces ne sont pas de dimension finie.
Par exemple l'ensemble des suites réelles est de dimension infinie car il n'admet aucune famille génératrice de dimension finie : il faut un nombre infini d'informations pour décrire une suite quelconque (il faut tout ses termes).
Si un espace admet une famille génératrice finie, alors on peut décrire chaque vecteur comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille. Et donc avec un nombre fini d'informations.
Le problème est, qu'en général, l'écriture du vecteur n'est pas unique. Pour éviter cet écueil, on veut donc que la famille soit aussi libre : une base.

Justifions donc que l'on peut en trouver une.

Théorème 3.2 *(Théorème de la base extraite)*

De toute famille génératrice finie d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel (non réduit à 0), on peut extraire une base de E.
Donc tout espace vectoriel non nul de dimension finie admet une base (finie).

⚠ Cette base n'est pas unique.

Preuve

Idée : on part d'une famille génératrice et on enlève un à un les vecteurs « redondants » jusqu'à obtenir une famille libre (sans changer l'espace généré).
Soit $\mathcal{G} = (u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille génératrice de E.
Si la famille est libre, alors c'est une base de E.
Si la famille est liée, alors un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison des autres : par exemple $x_p = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k u_k$.
Alors la famille $(u_1, u_2, \cdots, u_{p-1})$ est génératrice.
On réitère ce processus en enlevant 1 à 1 les éléments surabondants de la famille jusqu'à obtenir une famille libre. Par construction cette famille est à la fois libre et génératrice : c'est donc une base.
(Le processus aboutit bien à un certain rang, car le nombre d'éléments dans la famille décroît strictement et une famille à un seul élément non nul est toujours libre.) ■

Maintenant que l'on sait que tout espace de dimension finie admet une base, il reste à démontrer que toutes ses bases ont le même nombre d'éléments pour pouvoir définir la dimension.

Théorème 3.3 *(Lemme de Steinitz)*

Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Autre formulation : Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice finie de E et $\mathcal{F}$ une famille libre de E, alors
$$\mathrm{Card}\,\mathcal{F} \leqslant \mathrm{Card}\,\mathcal{G}.$$

Explications

Ce théorème est assez intuitif. Il énonce simplement que si on peut exprimer $(n+1)$ vecteurs à partir de n vecteurs différents, alors les $n+1$ vecteurs ne peuvent pas être linéairement indépendants.

Preuve

Admis ■

Théorème 3.4 *(Dimension)*

Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre d'éléments.
Ce nombre est appelé **la dimension** de l'espace.
Par convention, l'espace vectoriel nul : $\{0_E\}$ est de dimension 0 (on ne parle pas de base pour cet espace).

Preuve

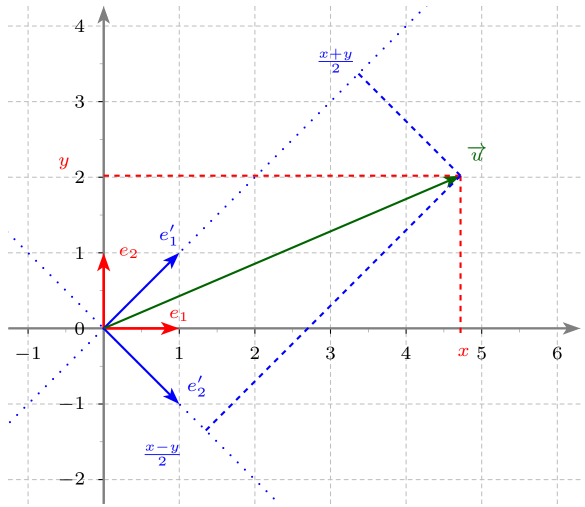
Si E admet une base à n éléments. Cette base est une famille génératrice, donc toute famille libre de E admettra au plus n éléments.
Donc toutes les autres bases admettent au plus n éléments.
Si on suppose qu'il existe une autre base admettant strictement moins que n éléments, alors en échangeant les rôles, on voit que la première base qui contient n éléments ne peut pas être libre. C'est absurde. ■

Exemple

- Le plan $\mathbf{R}^2$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Pour connaître un vecteur, il me faut au minimum deux informations. Par exemple l'abscisse et l'ordonnée. L'espace est de dimension 2, et pour construire une base, je prends deux vecteurs (e_1, e_2), tel que e_1 serve à donner l'abscisse : $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$, l'ordonnée.

  Un vecteur (x,y) du plan est alors décrit par $xe_1 + ye_2$.

  On peut aussi choisir une autre base (cela revient à changer de repère). Par exemple, prendre $e_1' = (1,1)$ et $e_2 = (1,-1)$. Le vecteur (x,y) s'écrit dans cette base $(x,y) = \frac{x+y}{2}e_1' + \frac{x-y}{2}e_2'$



Méthode *(Déterminer la dimension d'un espace)*

En général, pour déterminer la dimension d'un espace, on lui trouve une base.
Il faut alors montrer qu'elle est à la fois libre et génératrice.

Propriété 3.5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.
Soit $\mathcal{F}$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie.
$$\mathrm{Card}\,\mathcal{F} \leqslant n \leqslant \mathrm{Card}\,\mathcal{G}.$$

Preuve

C'est simplement le théorème 3.3. ■

De même que l'on peut supprimer des éléments d'une famille génératrice jusqu'à obtenir une base, on peut compléter une famille libre et obtenir une base.
C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 3.6 *(Théorème de la base incomplète)*

Toute famille libre d'un espace de dimension finie peut-être complétée en une base.
Les vecteurs pour compléter la famille peuvent être choisis dans une famille génératrice finie quelconque.

Preuve

Soit $\mathcal{F} = (x_1, x_2, ..., x_p)$ une famille libre de E.
On suppose que l'on possède une famille génératrice finie quelconque $\mathcal{G} = (y_1, y_2, \cdots, y_q)$ (existe car E est de dimension finie).

- Si tout élément de $\mathcal{G}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}$ est génératrice.
En effet, si $\forall i \in [\![1, q]\!], \exists (\lambda_{i,k})_{1 \leqslant k \leqslant p}$ tels que $y_i = \sum_{k=1}^{p} \lambda_{i,k} x_k$.
Comme $\mathcal{G}$ est génératrice, $\forall x \in E, \exists (\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{q} \mu_i y_i$.
Alors $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} \mu_i \lambda_{i,k} x_k$. $\mathcal{F}$ est génératrice, c'est donc une base.
- Sinon, il existe un élément de $\mathcal{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des x_i : par exemple y_1 (quitte à réordonner). Alors $(x_1, x_2, ..., x_p, y_1)$ est une famille libre.

On réitère le processus en ajoutant 1 à 1 les éléments de $\mathcal{G}$ jusqu'à obtenir une famille génératrice. Alors, par construction elle sera aussi libre. Ce sera donc une base.
(Le processus s'arrête nécessairement au plus tard quand tous les éléments de $\mathcal{G}$ ont été intégrés à $\mathcal{F}$). ■

Pour se souvenir

Famille libre $\xrightarrow{\text{ajoute des vecteurs}}$ **Base** $\xleftarrow[\text{retire des vecteurs}]{\text{Th. base extraite}}$ **Famille génératrice**

Base = famille libre maximale = famille génératrice minimale

Explications

La base est un ensemble de vecteurs de E, à partir desquels, je peux exprimer tous les autres *de façon unique*.

- Le fait que je puisse exprimer tous les autres vecteurs à partir de ceux de la base traduit que la base est une famille génératrice.
- Le fait que cette expression soit unique, traduit que la base est une famille libre.

Intuitivement : Lorsque je possède une famille génératrice, si elle n'est pas libre, c'est qu'il y a une redondance d'information entre ces éléments. Je peux donc en supprimer certains tout en restant générateur. Lorsque je ne peux plus en supprimer, c'est que la famille est une base : elle est aussi libre.
De même, si une famille est libre, il me manque des informations pour pouvoir exprimer tous les vecteurs. Je peux donc compléter la famille pour obtenir une base.

Théorème 3.7 *(Caractérisation des bases)*

Si E est de dimension finie $n \geqslant 1$, et $\mathcal{F}$ une famille de n **vecteurs** de E,
alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{F}$ est une base de E,
2. $\mathcal{F}$ est génératrice de E,
3. $\mathcal{F}$ est libre.

Preuve

- Si $\mathcal{F}$ est une base, alors elle est génératrice.
- Si $\mathcal{F}$ est génératrice. Si elle était liée, alors on pourrait lui enlever un vecteur et elle resterait génératrice. C'est absurde car alors il existerait une famille génératrice à $n-1$ éléments (qui est moins que le nombre d'éléments de la base qui forme une famille libre). Donc $\mathcal{F}$ est libre.
- Si $\mathcal{F}$ est libre. Si ce n'était pas une base, alors il existerait $y \in E$ tel que $y \notin \text{Vect}(\mathcal{F})$.
Alors, la famille $\mathcal{F}$ complétée par y serait libre et aurait plus d'éléments qu'une base (qui est génératrice). C'est impossible d'après Steinitz.
Donc la famille $\mathcal{F}$ est génératrice : c'est une base. ■

Méthode *(Montrer qu'une famille est une base)*

Lorsque l'on travaille dans un espace E dont on connaît la dimension n.
Pour montrer que $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base, il suffit de vérifier qu'elle a le bon nombre de vecteurs, et de prouver qu'elle est **soit** libre, **soit** génératrice.
En général, le plus simple est de montrer qu'elle est **libre**.

Propriété 3.8 *(Coordonnées d'un vecteur dans une base)*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E.
Tout vecteur $u \in E$ s'écrit de manière unique comme une combinaison des e_i.

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

C'est-à-dire que la matrice colonne $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ décrit parfaitement x.

⚠ Si on change de base, alors les (λ_i) sont également changés. On indique donc la base utilisée en indice dans la notation : $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Preuve

L'existence des scalaires vient du caractère générateur de la base, leur unicité de la liberté de la base. ■

4 Sous espaces vectoriels de dimension finie

Propriété 4.1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Si F est un sous espace vectoriel de E,
alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus, on a alors
$$\dim E = \dim F \quad \iff \quad E = F.$$

Preuve

Si $F = \{0_E\}$ c'est terminé,
Sinon, une famille libre de F est également libre dans E, donc toutes les familles libres de F ont au plus n vecteurs (d'après Steinitz). Si on note p le nombre maximum de vecteurs que peut contenir une famille libre de F, alors $p \leqslant \dim E$.
On considère une famille libre de F à p vecteurs : $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$.
Si, par l'absurde, cette famille n'est pas génératrice de F, alors il existe $y \in F$ tel que $y \notin \text{Vect}\,(e_1, \cdots, e_p)$. La famille complétée $(e_1, \cdots, e_p, y)$ est donc une famille libre de F avec $(p+1)$ vecteurs.C'est contradictoire avec la définition de p (cardinal maximal d'une famille libre).
Donc $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre et génératrice de F, donc c'est une base de F.
Ainsi F est de dimension finie, et $\dim F = p \leqslant \dim E$.
Cas d'égalité :
On pose $n = \dim E$ et on suppose que $\dim F = \dim E = n$.
F possède donc une base de la forme $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_n)$. Cette famille est libre dans F, donc également dans E et son cardinal est égal à la dimension de E.
D'après la propriété 3.7, c'est donc une base de E.
Ainsi $F = \text{Vect}\,(\mathcal{F}) = E$. Donc les espaces sont égaux. ∎

Méthode *(Égalité de deux espaces vectoriels)*

Pour montrer que deux espaces vectoriels de dimension finie E et F sont égaux, il suffit de montrer que $F \subset E$ et que $\dim F \geqslant \dim E$.

L'égalité des dimensions remplace la deuxième inclusion d'un raisonnement par double inclusion.

Définition 4.2 *(Nature de sous espaces particuliers)*

Soit E un espace de dimension finie n et F un sous espace de E,

- Si $\dim F = 1$, alors F est une **droite vectorielle.**
- Si $\dim F = 2$, alors F est un **plan vectoriel.**
- Si $\dim F = n-1$, alors F est un **hyperplan vectoriel.**

Théorème 4.3 *(Sous espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$.)*

Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$, trois situations se présentent :

- Soit $\dim F = 0$, c'est-à-dire $F = \{0\}$: il ne contient que le vecteur nul.
- Soit $\dim F = 1$. Il contient un vecteur non nul e et tous ses vecteurs sont proportionnels à e.
  Géométriquement : F est une droite vectorielle.
- Soit $\dim F = 2$, alors $F = \mathbf{R}^2$
  (inclus et de même dimension, donc égal).

5 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 5.1 *(Rang d'une famille de vecteurs)*

Le rang d'une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est la dimension de l'espace vectoriel engendré
$$\text{rg}\,(u_1, \cdots, u_n) = \dim\left(\text{Vect}\,(u_1, u_2, \cdots, u_n)\right).$$

Exemple

$\text{rg}\,(u_1, u_2, \cdots, u_n) = n$ si et seulement si la famille est libre.

Méthode *(Calcul du rang par le pivot)*

Le rang d'une famille de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ est égal au nombre de pivot de la matrice formée des vecteurs colonne correspondants.
Les vecteurs donnant les pivots forment alors une base de l'espace engendré.

Preuve

En effet, réaliser le pivot sur la matrice revient à chercher les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ tels que la combinaison linéaire soit nulle : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$.

- S'il y a autant de pivots que de colonnes, alors, il n'y a que des inconnues principales et la seule solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$: la famille est libre.
- Pour chaque paramètre, si on lui affecte par exemple la valeur 1, alors on peut obtenir une combinaison linéaire qui donne 0.
  Par exemple, on obtient $u_{i_0} + \displaystyle\sum_{i \neq i_0} \lambda_i u_i = 0$.
  Ainsi $u_{i_0} = -\sum_{i \neq i_0} \lambda_i u_i$: il s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs et peut donc être supprimé de la famille sans changer l'espace engendré.
  Si on retire ainsi tous les vecteurs donnant des paramètres, on obtient donc une famille libre, pour le même espace engendré : c'est une base.

∎

Exemple *(exercice récapitulatif)*

Dans $\mathbf{R}^4$, on définit les vecteurs

$$\begin{array}{lll} v_1 = (1,2,1,0) & v_2 = (-1,1,1,0) & v_3 = (1,5,3,0) \\ v_4 = (3,3,1,0) & v_5 = (0,1,0,1) & v_6 = (-1,3,3,-1) \end{array}$$

On note $F = \operatorname{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$.

1. Dire sans calculs si la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ est libre.
2. Extraire de cette famille, une sous famille de rang maximal que l'on notera $\mathcal{E}$. Quelle est la dimension de F ?
3. Compléter $\mathcal{E}$ en une base de $\mathbf{R}^4$. On notera cette base $\mathcal{B}$.
4. Exprimer les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^4$ dans la base $\mathcal{B}$.

Solution :