Changement de base

C'est une question de point de vue.

On connait la matrice d'une application linéaire entre deux bases et on veut exprimer la matrice de cette même application, mais dans des bases différentes. C'est la même application linéaire, mais on change de « *repère* » pour l'exprimer.

Ce changement de base permet de travailler avec une base plus adaptée à la géométrie du problème et d'avoir une expression de la matrice la plus simple possible.
Ce travail constitue une part essentielle du programme d'algèbre linéaire de deuxième année. L'idéal est d'obtenir une matrice diagonale, ou, à défaut, triangulaire.

Notations : Dans ce chapitre, E et F désignent deux espaces vectoriels de dimension finie.

1 Matrice de passage

Principe général : Changer de base revient à appliquer un isomorphisme (c'est-à-dire une application linéaire qui transforme une base en une autre) : c'est multiplier par une matrice inversible.

Toute matrice inversible, peut être interprétée comme la matrice d'un changement de base.

Théorème 1.1 *(Changement de la base de départ)*

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{F}$ une base de F.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{F}}(f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(f) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E).$$

Si on note $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(f)$, $A' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{F}}(f)$ et $P = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(\mathrm{Id}_E\right)$, alors

$$A' = A\,P.$$

Explications
Une fois qu'on a l'idée tout devient évident !
$f = f \circ \mathrm{Id}_E$ et on se sert de l'identité (qui ne change pas l'application linéaire) pour modifier matriciellement la base de départ grâce aux règles de composition des applications.
Lorsqu'on lit l'expression du théorème, on part de la base $\mathcal{B}'$, pour aller dans la base $\mathcal{B}$ grâce à l'application identité, puis de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{F}$ avec f.

Exercice
Cela invite à la remarque importante suivante : la matrice de l'application identité est rarement la matrice identité. À quelle condition l'est-elle ?

Définition 1.2 *(matrice de passage)*

On appelle **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$.
Dans ce cours, on notera $\mathrm{Pa}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$.

⚠ Entre les deux notations, on inverse l'ordre entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Cette notation est justifiée par une nouvelle écriture du théorème 1.1 comme suit.

Théorème 1.3

Soient E, F deux espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{F}$ une base de F.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{F}}(f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(f) \times \mathrm{Pa}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$$

Si on note $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(f)$ et $A' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{F}}(f)$, alors

$$A' = A \times \mathrm{Pa}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Explications

$\mathrm{Pa}\left(\mathcal{B} \to \mathcal{B}'\right)$ permet de passer d'une matrice exprimée dans $\mathcal{B}$ à une matrice exprimée dans $\mathcal{B}'$.

Propriété 1.4 *(Inverse de la matrice de passage)*

Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. $\mathrm{Pa}\left(\mathcal{B} \to \mathcal{B}'\right)$ est inversible et

$$\left(\mathrm{Pa}\left(\mathcal{B} \to \mathcal{B}'\right)\right)^{-1} = \mathrm{Pa}\left(\mathcal{B}' \to \mathcal{B}\right).$$

Preuve

Trivial en revenant à la définition de la matrice de changement de base $\mathrm{Pa}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$. ■

Théorème 1.5 *(Expression de la matrice de passage)*

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ deux bases de E.
$\mathrm{Pa}\left(\mathcal{B} \to \mathcal{B}'\right)$ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans $\mathcal{B}$.

Preuve

$\mathrm{Pa}\left(\mathcal{B} \to \mathcal{B}'\right) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(\mathrm{Id}_E\right)$, donc les vecteurs colonnes sont les $\mathrm{Id}_E(e'_i)$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$. ■

Exemple

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et $\mathcal{F}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$,
Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y) = (x + y, x - y, y)$.
On pose $e'_1 = e_1 + e_2$ et $e'_2 = e_1 - e_2$. et on note $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$.

1. Donner la matrice de f entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$.
2. Justifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbf{R}^2$, et exprimer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$: $\mathrm{Pa}\left(\mathcal{B} \to \mathcal{B}'\right)$.
3. Donner la matrice de f entre les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{F}$.
4. Exprimer les vecteurs e_1 et e_2 dans la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$.

Solution :

2 Matrices semblables et équivalentes

A Matrices équivalentes

Jusqu'à présent, on s'est contenté de changer la base de départ en multipliant à **droite** par une matrice de passage.
Pour changer la base d'arrivée, on multiplie à **gauche** par **l'inverse** de matrice de passage.

Théorème 2.1 *(changement des bases de départ et d'arrivée)*

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E ; $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux bases de F.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{F}'}(f) = \left(\mathrm{Pa}\left(\mathcal{F} \to \mathcal{F}'\right)\right)^{-1} \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(f) \times \mathrm{Pa}\left(\mathcal{B} \to \mathcal{B}'\right).$$

Si on note $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(f)$, $A' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{F}'}(f)$ alors

$$A' = \left(\mathrm{Pa}\left(\mathcal{F} \to \mathcal{F}'\right)\right)^{-1} \times A \times \mathrm{Pa}\left(\mathcal{B} \to \mathcal{B}'\right).$$

Preuve

$$\begin{aligned}\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{F}'}(f) &= \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{F}'}(\mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E)\\ &= \mathrm{mat}_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}(\mathrm{Id}) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(f) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id})\\ &= \left(\mathrm{mat}_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}(\mathrm{Id})\right)^{-1} \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(f) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id})\\ &= \left(\mathrm{Pa}\left(\mathcal{F} \to \mathcal{F}'\right)\right)^{-1} \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(f) \times \mathrm{Pa}\left(\mathcal{B} \to \mathcal{B}'\right).\end{aligned}$$

■

Définition 2.2 *(Matrices équivalentes)*

Deux matrices sont dites **équivalentes**, si elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.
On note $A \sim A'$. Ainsi,

$$A \sim A' \iff \exists (P,Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbf{R}),\ A' = PAQ.$$

P et Q peuvent alors s'interpréter comme des matrices de passage.

Propriété 2.3 *(Propriétés des matrices équivalentes)*

1. La relation « *être équivalentes* » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{R})$: elle est
   - réflexive : pour toute matrice A, $A \sim A$.
   - symétrique : si $A \sim A'$ alors $A' \sim A$.
   - transitive : si $A \sim A'$ et $A' \sim A''$ alors $A \sim A''$.
2. Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si elles représentent une même application linéaire entre deux bases différentes,
3. Toutes les matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ de rang r sont équivalentes à $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,q-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,q-r}\end{pmatrix}$.
4. Deux matrices (de même taille) sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang,

Preuve

1. - immédiat avec P et Q les matrices identité de bon ordre.
   - Si $A' = PAQ$ avec P et Q inversibles, alors $A = P^{-1}AQ^{-1}$.
   - Si $A' = PAQ$ et $A'' = P'A'Q'$, alors $A'' = (P'P)A(QQ')$ avec $P'P$ et QQ' inversibles par produit.
2. Cela vient simplement de l'application de l'algorithme de Gauss Jordan, sur les lignes pour obtenir une matrice échelonnée réduite en ligne, puis sur les colonnes.
   L'application du pivot sur les lignes revient à multiplier à gauche par une matrice inversible (changement de la base d'arrivée) et le pivot sur les colonnes revient à multiplier à droite par une matrice inversible (changement de la base de départ).
   Le rang n'est pas modifié par changement de base, donc la matrice est bien sous la forme proposée.
3. Parce qu'elles sont toutes les deux équivalentes à la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,q-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,q-r}\end{pmatrix}$ et par transitivité de la relation d'équivalence.

■

Pour un endomorphisme, ce qui a été dit précédemment reste vrai, mais s'avère souvent insuffisant. En effet, pour un endomorphisme, on cherche en général à utiliser la même base au départ et à l'arrivée (sinon, on ne peut plus composer l'endomorphisme avec lui-même).
C'est la raison pour laquelle, on ne note la base qu'une seule fois : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

B Matrices semblables

Corollaire 2.4 *(Cas particulier d'un endomorphisme)*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = (\operatorname{Pa}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}'))^{-1} \times \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \operatorname{Pa}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Si on note

- $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans l'ancienne base $\mathcal{B}$,
- $A' = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$ la matrice de f dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$,
- $P = \operatorname{Pa}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ la matrice de passage de l'ancienne base vers la nouvelle base,

alors

$$A' = P^{-1}\, A\, P.$$

Définition 2.5 *(Matrices semblables)*

Deux matrices sont dites **semblables**, si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

$$A \text{ équivalente à } A' \iff \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}),\ A' = P^{-1}AP.$$

P peut alors s'interpréter comme la matrice de passage.

⚠ On choisit la même base au départ et à l'arrivée.

Propriété 2.6 *(Propriétés des matrices semblables)*

1. La relation « *être semblables* » est :
   - réflexive : toute matrice carrée est semblable à elle-même.
   - symétrique : si A est semblable à A', alors A' est semblable à A.
   - transitive : si A est semblable à A' et si A' est semblable à A'', alors A est semblable à A''.
2. Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme entre deux bases différentes.
3. Deux matrices semblables ont le même rang (la réciproque est fausse).
4. Deux matrices semblables ont la même trace (la réciproque est fausse).

Preuve

Immédiat (sur le modèle des matrices équivalentes).
Pour la trace cela vient de la propriété $\operatorname{tr}(AP) = \operatorname{tr}(PA)$. ∎

⚠ Contrairement au cas des matrices équivalentes, deux matrices qui ont même rang n'ont aucune raison d'être semblables.

La notion « être semblable » est beaucoup plus forte que la seule notion d'équivalence. Par contre, elle est plus difficile à obtenir. Une partie importante de l'algèbre linéaire de seconde année sera tournée vers cette question.

Exemple

1. Trouver deux matrices carrées de même taille et de même rang qui ne sont pas semblables. Le prouver.
2. Trouver deux matrices carrées de même taille et de même trace qui ne sont pas semblables. Le prouver.

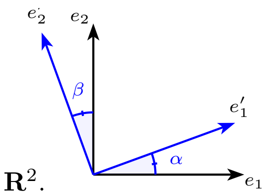
Solution :

Exemple

Trouver toutes les matrices semblables à I_n.
Solution :

Exemple *(Rotation du plan)*

Cet exemple a pour but de montrer la pluralité des approches envers un objet mathématique simple.
Soit l'application r de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même qui opère une rotation d'angle θ dans le sens trigonométrique.



1. **Nature de l'application :** c'est un automorphisme de $\mathbf{R}^2$.
   Sa réciproque est la rotation d'angle $-\theta$.
2. **En géométrie complexe :** cette opération se résume à la multiplication par $\mathrm{e}^{i\theta}$.
3. **Expression de l'automorphisme :** pour connaître l'expression de l'automorphisme, il suffit de connaître son action sur une base.
   On considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.
   $r(e_1) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ et $r(e_2) = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2$.

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

4. **Interprétation comme matrice de passage :** cet automorphisme correspond à la matrice de passage qui transforme la base canonique $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ (base $\mathcal{B}$ tourné d'un angle θ).

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(r) = \mathrm{Pa}\left(\mathcal{B} \to \mathcal{B}'\right).$$

⚠ une même matrice peut représenter des applications linéaires différentes selon les bases dans lesquelles on l'interprète. Ici par exemple, la matrice représente une rotation lorsqu'elle est vue dans la base $\mathcal{B}$ et elle représente l'identité lorsque la base de départ est changée en $\mathcal{B}'$.

5. **Matrice inverse :** la matrice inverse correspond à la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$. C'est la matrice de la rotation d'angle $-\theta$.

$$\mathrm{Pa}\left(\mathcal{B}' \to \mathcal{B}\right) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\left(r^{-1}\right) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

3 Changement de base pour un vecteur

Propriété 3.1 *(Application du changement de base à une matrice colonne)*

Si X est la matrice colonne de x exprimée dans la base $\mathcal{B}$ et X' représente le même vecteur x exprimé dans la base $\mathcal{B}'$, alors

$$X' = \mathrm{Pa}\left(\mathcal{B}' \to \mathcal{B}\right) \times X = \left(\mathrm{Pa}\left(\mathcal{B} \to \mathcal{B}'\right)\right)^{-1} \times X.$$

⚠ Comme pour le changement de la base d'arrivée, on multiplie **à gauche** par **l'inverse** de la matrice de passage. En général, c'est la matrice $\mathrm{Pa}\left(\mathcal{B} \to \mathcal{B}'\right)$ que l'on connait car elle exprime les coordonnées de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ dans l'ancienne $\mathcal{B}$. On peut ainsi voir, en notant $A = \mathrm{mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ et $A' = \mathrm{mat}(u, \mathcal{B}', \mathcal{F})$ que :

$$\begin{aligned} A'X' &= \underbrace{A \times \mathrm{Pa}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')}_{A'} \times \underbrace{\mathrm{Pa}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1} \times X}_{X'} \\ &= A \times \underbrace{\mathrm{Pa}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') \times \mathrm{Pa}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}}_{I_n} \times X \\ &= AX \end{aligned}$$

Preuve

$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(x) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E(x)) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x).$ ■