Limites et continuité

Qui franchit une ligne continue, risque de perdre l'adhérence.

Remarque sur le programme : le programme se restreint à l'étude des limites et continuité sur des intervalles (ce qui pose quelques problèmes pour la dérivabilité). Le propos sera ici légèrement étendu aux parties de $\mathbf{R}$ pour éviter les acrobaties, mais on *pensera* toujours en termes d'intervalles dans l'esprit du programme.

1 Limites

A Adhérence et voisinage

Les notions de voisinage et d'adhérence sont au programme de *deuxième année* uniquement. elles ne sont donc pas développées ici plus que nécessaire. Leur assimilation n'est pas l'objectif du chapitre.
On se limite à introduire le vocabulaire « *voisinage* » et la notation $\overline{I}$, pour faciliter certaines écritures dans ce chapitre.
Les définitions suivantes ont pour but de simplifier nos propos (et non le contraire).

Définition 1.1 *(Voisinage)*

Voisinage dans R :
Dans ce cours, l'expression **au voisinage de** a désigne

- si $a \in \mathbf{R}$, un intervalle ouvert contenant a.
  Par exemple $\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ est un voisinage de 0.
- Si $a = +\infty$, un intervalle ouvert non majoré.
  Par exemple, $]1, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.
- Si $a = -\infty$, un intervalle ouvert non minoré.
  Par exemple, $]-\infty, 0[$ est un voisinage de $-\infty$.

Plus généralement, toute partie contenant un voisinage sera également un voisinage.

Explications
L'idée est de se donner un peu d'espace autour du point a pour travailler, ce qui revient à le placer dans une bulle qui possède elle-même une certaine extension. On peut imaginer le point a comme une petite tache d'encre et le voisinage comme une bulle autour de a représentant cette tache qui a « bavé » en s'étalant légèrement autour du point originel.
Cette *tache* est traduite mathématiquement par intervalle ouvert qui contient le point. En effet, par définition, un intervalle ouvert n'a pas de bord et le point a qui nous intéresse est donc *à l'intérieur* de cet intervalle : l'intervalle ouvert contient des points à gauche et à droite de a ce qui permet de défintir la notion de limite par exemple.
Toutes les notions qui suivent : limite, continuité demandent en effet de savoir ce qui se passe à proximité du point (l'idée étant généralement de s'appuyer sur cette connaissance pour en déduire des informations au point lui-même).

Définition 1.2 *(Voisinage relatif)*

Pour A une partie de $\mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{R}$.
Un **voisinage de** a **relativement à** A est l'intersection d'un voisinage de a avec A.
Par exemple pour $A = [0, +\infty[$, l'intervalle $\left[0, \frac{1}{n}\right[$ est un voisinage de 0 relativement à A.

Explications

Pour comprendre ce qu'est un voisinage relatif, prenons l'exemple de l'étude d'une fonction f définie sur $\mathscr{D}_f =]0, +\infty[$.
On s'intéresse à son comportement *au voisinage de* 0, typiquement, son éventuelle limite en 0.
On veut travailler à proximité immédiate de 0 (ce qui se passe plus loin ne nous intéresse pas ici) et on pose donc un voisinage de 0 de la forme $U =]-\varepsilon, \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$.
Mais travailler sur un tel voisinage n'a aucun sens pour f qui n'est définie que sur $\mathbf{R}_+^*$.
En effet pour $x \in U$, si $x < 0$, on ne peut pas calculer $f(x)$. Pour éviter ce genre de problèmes, on se restreint aux points de U qui sont *aussi* dans le domaine de définition de f : c'est-à-dire $U \cap \mathscr{D}_f$.
C'est un voisinage de 0 *relativement à* $\mathscr{D}_f$.
Dans ce cours, on manipulera donc le plus souvent des voisinages relatifs au domaine de définition de la fonction.
Pour éviter les formulations trop lourdes on écrira simplement voisinage, le caractère relatif étant donné par le contexte.

Exemple

Par exemple si f est définie sur $\mathbf{R}^*$, alors les voisinages de 0 relativement à $\mathbf{R}^*$ sont[1] de la forme $]\alpha, 0[\cup]0, \beta[$ avec $\alpha < 0$ et $\beta > 0$.
Par contre, si f est définie sur $\mathbf{R}_+^*$, les voisinages considérés seront de la forme $]0, \beta[$, et si f est définie sur $\mathbf{R}_+$, alors, il seront de la forme $[0, \beta[$.

Cette distinction se retrouvera lorsque l'on évoquera limite à gauche ou à droite, ou limite en un point, ainsi que dans la question des limites de restrictions de la fonction

Définition 1.3 *(Valeur d'adhérence pour un intervalle)*

Pour une intervalle I donné, on notera $\overline{I}$ l'intervalle fermé correspondant.
Par exemple pour $I = [3, 7[$, on a $\overline{I} = [3, 7]$.

Lorsque l'intervalle I est de la forme $I =]-\infty, b]$, alors $\overline{I} =]-\infty, b] \cup \{-\infty\}$.
On procède de même lorsque l'intervalle n'est pas borné à droite.

$\overline{I}$ s'appelle **l'adhérence** de I ; lorsque $a \in \overline{I}$, on dit que a est **adhérent** à I.

Explications

L'adhérence revient à considérer non seulement les points de l'intervalle, mais aussi ceux qui lui sont « collés ». Pour un intervalle ouvert, les bornes sont *collées* à l'intervalle car il est impossible de placer un point quelconque entre la borne et l'intervalle lui-même pour « séparer » les deux. C'est à ce titre que l'on parle d'adhérence.
Cette interprétation est traduite par la définition qui suit (que l'on peut sauter sans préjudice) : un point est adhérent à A lorsque je n'arrive pas à le placer dans une bulle (un voisinage) qui l'isole de A.

Définition 1.4 *(Valeur d'adhérence - cas général)*

Soit A une partie de $\mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$.
On dit que a est **adhérent** à A si tous les voisinages de a rencontrent A.

- Si $a \in \mathbf{R}$, $a \in I \iff \forall \varepsilon > 0,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$.
- Si $a = +\infty$, $a \in I \iff \forall M > 0,]M, +\infty[\cap A \neq \emptyset$,
  ce qui revient à dire que A est non majorée.
- Si $a = -\infty$, $a \in I \iff \forall m < 0,]-\infty, m[\cap A \neq \emptyset$,
  ce qui revient à dire que A est non minorée.

L'adhérence de A, notée $\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents à A.

Remarque : Par définition, un point est adhérent à A, si tous ses voisinages relatifs à A sont non vides.
On se convaincra aisément (?) que tout élément de A est dans $\overline{A}$.

Remarque 2 : L'adhérence revient à transformer les inégalités strictes en inégalités larges, ainsi les intervalles ouverts deviennent fermés, on verra justement que les passages aux limites « ferment » les intervalles.

1. À nouveau, on peut généraliser cette définition à toute partie de A qui contient un tel intervalle, mais ceci n'apportera rien par rapport aux notions étudiées ici.

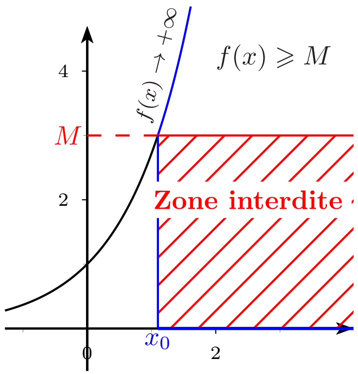
B Limites à l'infini

Définition 1.5 *(Limite infinie à l'infini)*

Soit f définie sur I, une partie non majorée de $\mathbf{R}$.
On dit que f admet $+\infty$ comme **limite** en $+\infty$ si

$$\forall M > 0,\ \exists x_0 > 0,\ \forall x \in I,\ x \geqslant x_0 \Rightarrow f(x) \geqslant M.$$

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,
ou $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.



Avec le vocabulaire des voisinages *(cette remarque peut-être sautée sans préjudice)* :
Soit f une fonction définie sur I, voisinage de $+\infty$.
On dit que f admet $+\infty$ comme limite infinie en $+\infty$ si

pour tout voisinage V de $+\infty$,
il existe U un voisinage relatif à I de $+\infty$
tel que $f(U) \subset V$.

Cela veut dire que pour tout voisinage V de $+\infty$ (dans l'espace d'arrivée), c'est-à-dire pour tout intervalle $V =]M, +\infty[$, on peut trouver un voisinage U de $+\infty$ (dans l'espace de départ) de la forme $U =]x_0, +\infty[$ tel que pour tout $x \in U \cap I$, $f(x) \in V$.
On retrouve bien l'expression quantifiée à l'exception des intervalles qui sont ouverts en M et x_0 au lieu d'être fermés. Mais on peut montrer simplement (exercice) que les deux définitions sont équivalentes.

Propriété 1.6 *(Caractérisation séquentielle)*

Soit f définie sur I non majorée. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si, et seulement si pour **toute** suite $(u_n) \in I^{\mathbf{N}}$ qui tend vers $+\infty$, $(f(u_n))$ tend vers $+\infty$.

Remarque : On remarque que la suite est à valeurs dans I pour que l'expression $f(u_n)$ ait un sens.
On peut remplacer dans la définition $M > 0$ par $M \in \mathbf{R}$, et $x_0 > 0$ par $x_0 \in \mathbf{R}$ (c'est équivalent).

⚠ Pour utiliser la réciproque, il ne suffit pas de montrer que c'est vrai pour une seule suite, mais pour *toutes* les suites.
Cela rend cette réciproque difficile à utiliser sauf dans le cadre d'exercices « théoriques ».

Preuve

- *(sens direct)* On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et on considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui tend vers $+\infty$.
  Montrons que $(f(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.
  Soit $M > 0$, $\exists x_0 > 0$, $\forall x \in I$, $x \geqslant x_0 \Rightarrow f(x) \geqslant M$.
  Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, donc $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant x_0$.
  Ainsi, $\forall n \geqslant n_0$, $f(u_n) \geqslant M$.
  Ceci démontre bien que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = +\infty$.
- *(sens réciproque)* Raisonnons par contraposée et supposons donc que f ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$ (on n'a donc pas le droit de parler de limite de f car elle n'en admet pas nécessairement une).
  Ainsi, $\exists M > 0$, $\forall x > 0$, $\exists x_1 \in I$, $x_1 > x$ et $f(x_1) < M$.
  L'idée de la preuve, à retenir, est de discrétiser le choix de x.
  Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $x = n$, $\exists u_n \in I$, $u_n \geqslant n$ et $f(u_n) < M$.
  La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ ainsi définie est à valeurs dans I et diverge vers $+\infty$ (par minoration).
  Mais la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est majorée, donc elle ne tend pas vers $+\infty$.

■

Méthode *(Utilisation de la propriété séquentielle)*

En général, on utilise le sens direct de la caractérisation séquentielle :

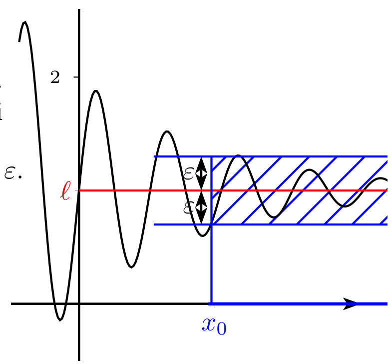
- soit pour montrer qu'une suite $(f(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$:
  on sait que f tend vers $+\infty$, alors si $u_n \to +\infty$, $f(u_n) \to +\infty$.
- soit avec la contraposée pour montrer qu'une fonction f ne tend pas vers $+\infty$:
  on trouve une suite (u_n) qui tend vers $+\infty$ telle que $f(u_n) \not\to +\infty$.

Définition 1.7 *(Limite finie à l'infini)*

Soit f définie sur I une partie non majorée de $\mathbf{R}$.
On dit que f admet une **limite finie** ℓ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 > 0,\ \forall x \in I,\ x \geqslant x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$,
ou $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$.



Avec le vocabulaire des voisinages *(cette remarque peut-être sautée sans préjudice)* :
Soit f une fonction définie sur I, voisinage de $+\infty$ et $\ell \in \mathbf{R}$.
On dit que f admet ℓ comme limite finie en $+\infty$ si

pour tout voisinage V de ℓ,
il existe U un voisinage relatif à I de $+\infty$
tel que $f(U) \subset V$.

Cela veut dire que pour tout voisinage $V =]\ell-\varepsilon,\ \ell+\varepsilon[$ de ℓ (dans l'espace d'arrivée), on peut trouver un voisinage U de $+\infty$ (dans l'espace de départ) de la forme $U =]x_0,\ +\infty[$ tel que pour tout $x \in U \cap I$, $f(x) \in V$.

Propriété 1.8 *(Caractérisation séquentielle)*

Soit f définie sur I non majorée.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ si, et seulement si pour *toute* suite $(u_n) \in I^{\mathbf{N}}$ qui tend vers $+\infty$, la suite $(f(u_n))$ tend vers ℓ.

Preuve

Il est conseillé d'essayer de faire cette preuve en exercice car ce sont exactement les mêmes ingrédients que pour la dernière caractérisation séquentielle.

- *(sens direct)* On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ et on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $+\infty$.
  Montrons que $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ.
  Soit $\varepsilon > 0$, $\exists x_0 > 0$, $\forall x \in I$, $x \geqslant x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
  Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant x_0$.
  Ainsi, $\forall n \geqslant n_0$, $|f(u_n) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
  Ceci démontre bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.
- *(sens réciproque)*
  Raisonnons par contraposée et supposons donc que f ne tend pas vers ℓ en $+\infty$
  Ainsi, $\exists\varepsilon > 0$, $\forall x > 0$, $\exists x_1 \in I$, $x_1 > x$ et $|f(x_1) - \ell| > \varepsilon$.
  Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $x = n$, $\exists u_n \in I$, $u_n \geqslant n$ et $|f(u_n) - \ell| > \varepsilon$.
  La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ ainsi définie est à valeurs dans I et diverge vers $+\infty$ (par minoration).
  Mais la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ ne converge par vers ℓ.

■

Exercice

Énoncer les autres définitions en $\pm\infty$ et leurs propriétés séquentielles.

C Limites en un point

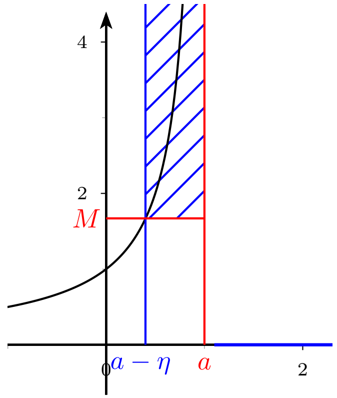
Dans cette partie, I désigne une partie de $\mathbf{R}$ (en général un intervalle ou une réunion finie d'intervalles), et $f\ : I \to \mathbf{R}$.

Définition 1.9

Soit a un réel, $a \in \overline{I}$, $a \notin I$.
On dit que f admet $+\infty$ comme **limite** en a si

$$\forall M > 0,\ \exists\eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \geqslant M.$$

On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$,
ou $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.



Remarque : La définition comporte l'hypothèse $a \notin I$, mais celle-ci n'est pas indispensable car elle est automatiquement vérifiée dès lors que l'expression quantifiée l'est.
En effet, si par l'absurde, $a \in I$, alors il existe $f(a) \in \mathbf{R}$.
On pose $M = f(a) + 1$, et on considère $\eta > 0$ quelconque. Pour $x = a$, on a bien $x \in I$ et $|x - a| = 0 \leqslant \eta$. Mais $f(x) < M$ ce qui contredit la définition de la limite.

Avec le vocabulaire des voisinages *(cette remarque peut-être sautée sans préjudice)* :
Soit $a \in \mathbf{R}$ et f une fonction définie sur I, voisinage de a.
On dit que f admet $+\infty$ comme limite infinie en a si

> pour tout voisinage V de $+\infty$,
> il existe U un voisinage relatif à I de a
> tel que $f(U) \subset V$.

Cela veut dire que pour tout voisinage $V =]M,\ +\infty[$ de $+\infty$ (dans l'espace d'arrivée), on peut trouver un voisinage U de $+\infty$ (dans l'espace de départ) de la forme $U =]x_0,\ +\infty[$ tel que pour tout $x \in U \cap I$, $f(x) \in V$.

Propriété 1.10 *(Caractérisation séquentielle)*

Soit $a \in \overline{I}$, et $a \notin I$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si, et seulement si pour **toute** suite $(u_n) \in I^{\mathbf{N}}$ qui converge vers a, la suite $(f(u_n))$ tend vers $+\infty$.

On définit de même pour $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Définition 1.11 *(Limite finie en un point)*

Soit f définie sur I, et a un nombre réel dans $\overline{I}$.
On dit que f admet $\ell \in \mathbf{R}$ pour **limite** en a si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, ou $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Avec le vocabulaire des voisinages *(cette remarque peut-être sautée sans préjudice)* :
Soit $(a, \ell) \in \mathbf{R}^2$ et f une fonction définie sur I, voisinage de a.
On dit que f admet ℓ comme limite finie en a si

pour tout voisinage V de ℓ,
il existe U un voisinage relatif à I de a
tel que $f(U) \subset V$.

Cela veut dire que pour tout voisinage $V =]\ell-\varepsilon,\ \ell+\varepsilon[$ de $+\infty$ (dans l'espace d'arrivée), on peut trouver un voisinage U de $+\infty$ (dans l'espace de départ) de la forme $U =]x_0, +\infty[$ tel que pour tout $x \in U \cap I$, $f(x) \in V$.

Propriété 1.12 *(Caractérisation séquentielle)*

Soit f définie sur I, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbf{R}$,
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si, et seulement si pour **toute** suite $(u_n) \in I^{\mathbf{N}}$ qui converge vers a, la suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ.

Preuve

- *(sens direct)*
Soit $\varepsilon > 0$, alors, par hypothèse, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in I, |x-\eta| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, donc $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, |u_n - a| \leqslant \eta$.
Donc pour $n \geqslant n_0$ $|f(u_n) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Donc la limite de $(f(u_n))$ est bien ℓ.
- *(sens réciproque)* Par contraposée, je suppose que f n'admet pas ℓ pour limite en a.
Il existe donc $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \eta = \frac{1}{n} > 0, \exists u_n \in I,\ |u_n - a| \leqslant \frac{1}{n}$ et $|f(u_n) - a| > \varepsilon$.
On a construit une suite $(u_n) \in I^{\mathbf{N}}$ qui converge vers a et telle que $(f(u_n))$ ne converge par vers ℓ.

■

Méthode

Pour montrer que f n'admet pas de limite en a, il suffit de trouver deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent vers a telles que $f(u_n)$ et $f(v_n)$ ne convergent pas vers la même limite.

Exemple

Montrer que $f : x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite en 0.
Solution :
La suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{2\pi n}$ converge vers 0 et la suite $(f(u_n))_{n \geqslant 1}$ est constante à 0.
Par contre, la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par $v_n = \frac{2}{\pi(1+4n)}$, converge aussi vers 0, mais la suite $(f(v_n))_{n \geqslant 1}$ est constante égale à 1.
Donc f n'admet pas de limite en 0.

Propriété 1.13 *(Cas où f est définie en a)*

Si $a \in I$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, alors $f(a) = \ell$.
En français : Si f est définie en a et admet une limite en a, alors cette limite est nécessairement $f(a)$.

Remarque : On remarque que si f est définie en a et admet une limite en a, alors cette limite est nécessairement finie : $f(a)$. Cela rejoint la remarque faite sur l'hypothèse de la propriété 1.9 pour la limite infinie.

Preuve

Voir la remarque de la définition 1.9 et adapter. ■

⚠ f peut-être définie en a sans admettre de limite en a.

Exemple

Montrer que la partie entière n'admet pas de limite en 0 (alors que $\lfloor 0 \rfloor = 0$).
Solution :
On note $f\ : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.
On utilise la caractérisation séquentielle avec $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = -\frac{1}{n}$.
Ainsi, $(f(u_n))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est constante égale à -1.
Donc elle converge vers -1.
Or, si f admettait une limite ce serait $\lfloor 0 \rfloor = 0$, donc f n'admet pas de limite en 0.

Propriété 1.14 *(Unicité de la limite)*

La limite d'une fonction en un point est unique (si elle existe).

Preuve

On peut le démontrer en utilisant la caractérisation séquentielle[2] :
s'il y avait deux limites ℓ et ℓ', alors on pourrait trouver une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $(f(u_n))$ tende vers ℓ.
Or en appliquant la caractérisation séquentielle à ℓ', on a donc $(f(u_n))$ qui tend nécessairement vers ℓ'.
Et par unicité des limites de suites, $\ell = \ell'$. ■

2. C'est utiliser le raisonnement fait dans le chapitre des suites pour éviter de le refaire, mais fondamentalement, cela revient au même, à la paresse près.

Propriété 1.15 *(Caractère borné au voisinage de la limite)*

Soit f définie sur I et $a \in \overline{I}$.
Si f admet une limite finie en $a \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, alors il existe un voisinage V de a tel que f soit bornée sur V.

- Si $a \in \mathbf{R}$, alors le voisinage peut s'écrire $V =]a-\eta,\, a+\eta[\cap I$ avec $\eta > 0$.
- Si $a = +\infty$ alors le voisinage peut s'écrire $V =]M,\, +\infty[\cap I$ avec $M \in \mathbf{R}$.
- Si $a = -\infty$ alors le voisinage peut s'écrire $V =]-\infty,\, M[\cap I$ avec $M \in \mathbf{R}$.

Preuve

Par exemple si $a \in \mathbf{R}$, on note $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x) \in \mathbf{R}$.
Alors par définition de la limite avec $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que sur le voisinage $V =]a-\eta,\, a+\eta[\cap I$, $\quad |f(x) - \ell| \leqslant 1$.
Donc sur V, f est bornée inférieurement par $\ell - 1$, et supérieurement par $\ell + 1$. ∎

D Résumé avec les notions de voisinage

En utilisant les notions (hors programme) d'adhérence et de voisinage, on peut résumer toutes les définitions précédentes en une seule.

Définition 1.16 *(hors programme)*

f est définie sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$. $a \in \overline{I}$ (éventuellement infini) et $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.
On dit que f admet ℓ pour limite en a, si, pour tout voisinage $\mathscr{V}_\ell$ de ℓ, il existe un voisinage $\mathscr{V}_a$de a tel que

$$x \in \mathscr{V}_a \cap I \Rightarrow f(x) \in \mathscr{V}_\ell.$$

ou avec les images directes, $f\left(\mathscr{V}_a \cap I\right) \subset \mathscr{V}_\ell$.

Cette définition est plus abstraite que celle avec les quantificateurs, et elle ne les remplace pas pour vous. Cela permet néanmoins de voir comment on peut définir des objets un peu plus abstraits et généraux pour trouver des définitions plus globales (sans avoir à traiter tous les cas un par un comme nous n'avons fait plus haut).
Ce travail est réalisé en deuxième année.

2 Continuité

Définition 2.1 *(Continuité en un point)*

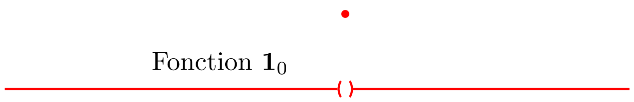
Soit f une fonction définie sur I, et $a \in I$ (pas l'adhérence).
On dit que f est **continue** en a si et seulement si $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.
C'est-à-dire si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \eta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Explications

C'est exactement la définition de la limite, mais on impose que le point appartienne à I et non à l'adhérence. Une fonction qui est continue en a est simplement une fonction dont on peut « prévoir » la valeur $f(a)$ quand on s'approche infiniment de a. Cela suppose qu'il n'y ait aucun « saut » en arrivant sur a. C'est l'idée donnée en terminale selon laquelle, on n'a pas besoin de lever le crayon pour tracer la fonction. Une fonction continue est donc une fonction **prédictible,** c'est-à-dire sans surprise. Si, quand on s'approche d'un point, on s'attend à obtenir une certaine valeur, alors la fonction nous donnera bien cette valeur au point, et non une autre.

Exemple



La fonction $\mathbf{1}_0$ (qui vaut 1 en 0, et qui est nulle partout ailleurs) est continue en tout point sauf en 0.

Propriété 2.2

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$.
f est continue en a si, et seulement si f admet une limite en a.

Preuve

En effet, nous avions vu alors que cette limite est nécessairement $f(a)$. ∎

Propriété 2.3 *(Caractérisation séquentielle)*

f continue en $a \in I$ si, et seulement si pour **toute** suite $(u_n) \in I^{\mathbf{N}}$ qui converge vers a, $\left(f(u_n)\right)_n$ converge vers $f(a)$.

Preuve

C'est la même preuve que pour la limite par identification des deux notions. ∎

En pratique, cette propriété séquentielle veut dire que l'on peut « entrer » et « sortir » la limite d'une fonction continue.

Corollaire 2.4 *(Sens direct de la caractérisation)*

Soit f continue en $a \in I$.
Si $(u_n) \in I^{\mathbf{N}}$ converge vers a, alors $\left(f(u_n)\right)_n$ tend vers $f(a)$:

$$\lim_{n \to +\infty} f\left(u_n\right) = f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right).$$

Exemple

Calculer la limite de $\mathrm{e}^{\frac{n^2-3n+1}{2n^2-1}}$ quand $n \to +\infty$.

Solution :
On remarque d'abord que $\forall n \in \mathbf{N}$, $2n^2 - 1 \neq 0$, et la fonction exponentielle est définie sur $\mathbf{R}$ donc la suite est bien définie pour tout $n \in \mathbf{N}$.
$\forall n \geqslant 1$, $\dfrac{n^2 - 3n + 1}{2n^2 - 1} = \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}}$.
Donc par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 - 3n + 1}{2n^2 - 1} = \dfrac{1}{2}$.
Et par continuité de la fonction exponentielle en $\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{n^2 - 3n + 1}{2n^2 - 1}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Exemple

Calculer la limite de $\left\lfloor -\frac{1}{n} \right\rfloor$ quand $n \to +\infty$.

Solution :
Revoir l'exemple plus haut...
La suite est bien définie pour $n \geqslant 1$.
⚠ On a $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} = 0$, mais la suite ne tend pas vers $\lfloor 0 \rfloor = 0$.
En effet, la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en 0 et on ne peut donc pas passer à la limite en composant.
Ainsi, $\forall n \geqslant 1$, $-\frac{1}{n} \in [-1, 0[$, donc $\left\lfloor -\frac{1}{n} \right\rfloor = -1$.
La suite est donc constante égale à -1 : elle tend vers -1.

Définition 2.5 *(Continuité sur un intervalle)*

Une fonction f est **continue sur un intervalle** I si sa restriction à l'intervalle I est continue en tout point de I.
On note $\mathscr{C}^0(I)$ ou $\mathscr{C}^0(I, \mathbf{R})$ ou $\mathscr{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Remarque : Cette définition n'est pas unanimement acceptée et certains préfèreront considérer que la fonction est continue sur I si, et seulement si elle est continue en tout point de I.
Chaque définition a ses avantages et ses inconvénients.
Celle proposée dans le cours, permet de travailler sur I sans utiliser une quelconque connaissance de ce qui est hors de I c'est par exemple bien adapté lorsque l'on a des formules différentes pour f sur I et son complémentaire.
En revanche, si on ne considère pas la restriction à I, l'étude aux bornes de l'intervalle (s'il est fermé), demande à connaître l'expression de f hors de I et de considérer des $x \notin I$. Par contre, cette seconde définition offre l'avantage de dire que si f est continue sur I et sur J, alors f est continue sur $I \cup J$ (ce que ne propose pas la définition présentée dans le cours : chercher un contre exemple pour bien comprendre).

À l'oral, et en cas d'ambigüité, ne pas hésiter à demander à l'examinateur la définition qu'il souhaite utiliser.

Explications *(Notion locale, locale partout, globale)*

La notion de continuité reste locale. C'est en chaque point que la fonction est continue, et indépendamment de ce qui se passe ailleurs. Parler de continuité nécessite des œillères : on est tellement myope que l'on ne peut voir les choses que localement, à proximité immédiate du point considéré.
La continuité sur un intervalle est donc une notion de type « local partout ». Elle ne doit pas être confondue avec une notion globale qui dépendrait de toute la fonction « d'un coup ». Par exemple, le caractère borné d'une fonction est une notion globale : elle dépend de tous les points à la fois.

Propriété 2.6 *(Prolongement par continuité)*

Soit f est définie sur I et $a \in \overline{I} \setminus I$ un réel.
Si la limite $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ existe et est finie,
alors on peut **prolonger** f **par continuité** en une fonction $\widetilde{f}$ continue en a en posant $\widetilde{f}(a) = \ell$.

Remarque : Le prolongement par continuité, s'il existe est unique.

Explications

Lorsqu'une fonction admet une limite finie en un point (**sans être définie en ce point**), on peut la prolonger par continuité par sa limite. Cela revient à dire que notre crayon va *jusqu'au point* au lieu de s'en approcher infiniment sans l'atteindre. On rajoute le point qui prolonge *naturellement* la fonction.

⚠ Bien sûr, $a \notin I$: la fonction ne doit pas avoir été déjà définie en a car on ne peut pas définir deux images à un point.

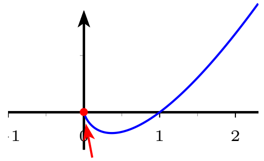
Remarque : On peut définir d'autres prolongements que celui par continuité. En effet, n'importe quelle valeur réelle pour $f(a)$ donne un prolongement, mais en général, c'est peu intéressant.
Il est évident que si f n'admet pas de limite finie en a, alors elle n'est pas prolongeable par continuité en a (exercice).

Exemple

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x \ln x$ peut être prolongée par continuité en 0.

Solution :

La fonction $f : x \mapsto x \ln x$ n'est pas définie en 0, $\lim\limits_{X \to 0} f(x) = 0$ par croissances comparées. Donc f peut être prolongée par continuité par la valeur $f(0) = 0$.

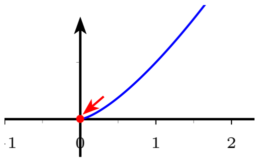


Exemple

Soit $\alpha > 0$, montrer que la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ peut être prolongée par continuité en 0.

Solution :

Pour $\alpha > 0$, les fonctions $f_\alpha \;:\; x \mapsto x^\alpha$ ne sont pas définies 0.
$\lim\limits_{x\to 0} e^{\alpha \ln x} = 0$ par composition (car $\alpha > 0$).
On peut donc prolonger f_α par continuité avec la valeur $f_\alpha(0) = 0$.



3 Limite et continuité à gauche ou à droite

A Limites à gauche et à droite

On reprend les notions précédentes, mais à présent, on ne considère qu'un seul côté de la fonction : on ne s'autorise à s'approcher de a que par la gauche ou par la droite.
⚠ Les notions présentées sont difficiles lorsqu'on les écrit avec des quantificateurs. Il est donc primordial d'avoir en tête des exemples graphiques pour comprendre et être capable de retrouver les définitions quantifiées.

Définition 3.1

Soit $a \in \overline{I}$, et f définie sur I avec $]-\infty, a[\cap I \neq \emptyset$.
On définit la limite de f à gauche de a, lorsqu'elle existe par la limite en a de la restriction de f à $]-\infty, a[\cap I$. On la note

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell.$$

On définit de la même façon la limite à droite de a.

⚠ a est exclu des valeurs possibles pour x, même si f est définie en a. Ainsi, l'intervalle est ouvert en a et la valeur de la limite peut être différente de $f(a)$.
Intuitivement, la limite à gauche de a consiste à s'approcher infiniment de a sans jamais l'atteindre. Cela suppose évidement que la fonction soit définie sur un voisinage à gauche de a (c'est la première condition de la définition).
Cela revient à la limite de la restriction de f à $]-\infty, a[\cap I$. Ainsi, les voisinages relatifs à ce nouveau domaine ne contiennent plus a.

Explications *(Différence entre limite et limite à gauche)*
Si f n'est définie qu'à gauche de a,
on peut noter ▹ la limite à gauche $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$,

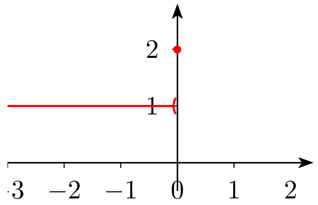
▹ la limite $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \leqslant a}} f(x)$.

Donc
- Si f est définie sur $]-\infty, a[$ (ouvert en a), alors la définition de la limite de f en a et celle de la limite à gauche en a coïncident.
  En effet, l'inégalité stricte et l'inégalité large reviennent au même car $a \notin I$.
- Par contre, si f est définie sur $]-\infty, a]$ (fermé en a), alors les définitions sont différentes.

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f admet une limite à gauche de 0 : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$.
Par contre, f n'admet pas de limite en 0 (car il y a un « saut »).



Propriété 3.2

Soit $a \in \overline{I}$ tel que f soit définie au voisinage de a à gauche et à droite.
Si f admet une limite en a alors f admet une limite à gauche et à droite en a et toutes ces limites sont égales.

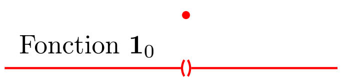
Preuve

Immédiat. ■

⚠ La réciproque est vraie si $a \notin I$, mais elle est fausse si $a \in I$.
En effet, il existe des fonctions qui admettent des limites à gauches et à droite de a sans admettre de limite en $a \in I$ (c'est à dire sans être continues en a) : il ne suffit pas que de montrer que les limites à gauche et à droite existent et sont égales pour justifier de la continuité.

Exemple

Pour la fonction $\mathbf{1}_0$. $\lim\limits_{x\to 0^-} \mathbf{1}_0(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathbf{1}_0(x) = 0$ mais $f(0) = 1$.


Fonction $\mathbf{1}_0$

On remarque que les notions de limites à gauche et limites à droite ne servent que lorsque a est fini. En effet, pour $a = +\infty$, la limite à gauche correspond exactement à la limite, et de même pour la limite à droite pour $a = -\infty$.

Théorème 3.3 *(Lien avec la continuité)*

Soit $a \in I$ tel que $\exists \alpha > 0,\ ]a-\alpha,\ a+\alpha[\subset I$.
f est **continue** en a si, et seulement si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).$$

Preuve

Le sens direct est immédiat par définition de la continuité en un point et application de la propriété précédente.
Pour le sens réciproque.

Soit $\varepsilon > 0$,
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$, donc il existe $\eta_g > 0$ tel que $\forall x \in I \cap]-\infty, a[$, $|x-a| \leqslant \eta_g \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$.
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, donc il existe $\eta_d > 0$ tel que $\forall x \in I \cap]a, +\infty[$, $|x-a| \leqslant \eta_d \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$.
On pose alors $\eta = \min(\eta_g, \eta_d) > 0$.
$\forall x \in I$, si $|x-a| \leqslant \eta$, alors

- si $x < a$, alors $|x-a| \leqslant \eta \leqslant \eta_g$, donc $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$,
- si $x > a$, alors $|x-a| \leqslant \eta \leqslant \eta_d$, donc $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$,
- si $x = a$, alors $|f(x) - f(a)| = 0 \leqslant \varepsilon$.

Donc dans tous les cas $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$ ce qui prouve bien que f est continue en a. ■

B Continuité à gauche et à droite

Définition 3.4 *(Continuité à gauche)*

Soit $a \in I$ tel que $]-\infty, a[\cap I \neq \emptyset$.
On dit que $f : I \to \mathbf{R}$ est **continue à gauche** de a si la restriction de f à $]-\infty, a] \cap I$ est continue en a.

Formulation équivalente : f est continue à gauche de a si f admet une limite à gauche en a et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Remarque : Ici, contrairement à la limite à gauche, l'intervalle est fermé en a. La notion de continuité n'a de sens que lorsque a fait partie de l'intervalle de définition : il faut atteindre le point.
On définit de même la continuité à droite.

Théorème 3.5 *(Lien avec la continuité)*

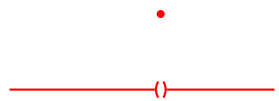
Soit $a \in I$, tel que $\exists \varepsilon > 0,\ ]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\subset I$.
f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a.

Explications

C'est un énoncé très proche de celui de la propriété 3.3. La seule différence est que la notion de continuité à gauche ou à droite contient déjà l'idée que la limite est égale à la valeur au point. La formulation de la propriété s'en trouve donc allégée.

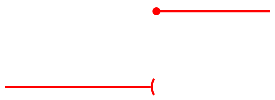
Exemple

Pour la fonction $\mathbf{1}_0$:
$\lim\limits_{x\to 0^-} \mathbf{1}_0(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathbf{1}_0(x) = 0$.
Par contre la fonction n'admet pas de limite en 0.
La fonction n'est continue, ni à gauche, ni à droite de 0.



Exemple

Si on considère la fonction de Heavside : $H = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}$:
$\lim\limits_{x\to 0^-} H(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} H(x) = 1$.
avec $H(0) = 0$
La fonction n'admet donc pas de limite en 0.
La fonction est continue à droite en 0, mais n'est pas continue à gauche (et n'est pas continue en 0).



Explications

Pour reprendre l'image donnée au lycée : quand on trace une fonction continue à gauche de a, on n'a pas besoin de lever le crayon pour arriver sur $f(a)$ depuis la gauche. Il suffit que le crayon suive la trajectoire donnée par la limite jusqu'au point.
Avec les exemples précédents :
Pour la fonction $\mathbf{1}_0$: que on s'approche par la gauche, ou par la droite, on est dans tous les cas obligé de faire un saut pour rejoindre le point $\mathbf{1}_0(0) = 1$. La fonction n'est donc continue, ni à gauche, ni à droite, et n'est donc pas continue en 0.
En revanche, la fonction admet une limite à gauche, car je peux m'approcher infiniment de $x = 0$ en suivant la courbe et sans lever le crayon tant que $x < 0$. De même à droite.
Pour la fonction de Heavside : la situation à gauche est identique à celle de $\mathbf{1}_0$. Par contre H est continue à droite. En effet, on peut atteindre le point $H(0)$ en suivant la courbe et sans lever le crayon depuis la droite.

4 Propriétés sur les limites

A Opérations sur les limites

Théorème 4.1

Les opérations sur les limites vues avec les suites sont valables pour les applications (multiplication, quotient, combinaison linéaire).
Si $f, g \in \mathscr{C}^0(I, \mathbf{R})$, et si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}^0(I, \mathbf{R})$.

Preuve

En utilisant les résultats sur les suites par passage à la caractérisation séquentielle. ■

Corollaire 4.2

$\mathscr{C}^0(I, \mathbf{R})$ est stable par somme, produit, et multiplication par un réel.

Théorème 4.3 *(Composition des limites)*

Soit u définie sur I à valeurs dans J, et f définie sur J à valeurs dans $\mathbf{R}$.
Soit $a \in \overline{I}$.

- si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$, alors $b \in \overline{J}$,
- et si de plus $\lim\limits_{u\to b} f(u) = \ell$,

alors
$$\lim_{x\to a} f(u(x)) = \ell.$$

Remarque : a, b et ℓ peuvent être infinis.

Preuve

- Montrons que $b \in \overline{J}$.
  On ne rédige ici que le cas où $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R}$. Les autres cas sont laissés en exercice.
  Supposons par l'absurde que $b \notin \overline{J}$, alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $]b - \varepsilon_0, b + \varepsilon_0[\cap J = \emptyset$.
  Or, d'après la définition de la limite appliquée à $\frac{\varepsilon_0}{2}$,
  $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |u(x) - b| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$.
  Ainsi, $u(x) \in \left[b - \frac{\varepsilon_0}{2}, b + \frac{\varepsilon_0}{2}\right] \subset \,]b - \varepsilon_0, b + \varepsilon_0[$.
  C'est absurde car $u(x) \in J$. Donc $b \in \overline{J}$.
- Pour la deuxième partie de la preuve, On peut utiliser la caractérisation séquentielle.
  Soit $(x_n) \in I^{\mathbf{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors par caractérisation séquentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty} u(x_n) = b$.
  Ainsi $(u(x_n)) \in J^{\mathbf{N}}$ tend vers b.
  Donc par caractérisation séquentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u(x_n)) = \lim\limits_{x\to b} f(x) = \ell$.
  Ainsi, on a montré que pour toute suite $(x_n) \in I^{\mathbf{N}}$ qui tend vers a, on a
  $$\lim_{n\to+\infty} (f \circ u)(x_n) = \ell$$
  ce qui prouve, encore par caractérisation séquentielle que
  $$\lim_{x\to a} (f \circ u)(x) = \ell.$$

■

Corollaire 4.4

La composée de deux applications continues est continue :
Si $f \in \mathscr{C}^0(I, J)$ et $g \in \mathscr{C}^0(J, \mathbf{R})$, alors $g \circ f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbf{R})$.

Preuve

Utiliser la propriété séquentielle pour reprendre le travail sur les limites. ■

⚠ L'espace d'arrivée de f doit être inclus dans l'espace de définition de g pour que l'on puisse composer.

Théorème 4.5 *(Fonctions usuelles)*

Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition.

1. fonctions polynomiales,
2. fonctions racines (de n'importe quel ordre).
3. fonctions circulaires (directes et réciproques),
4. exponentielle et logarithme,
5. fonctions puissances,
6. fonctions hyperboliques (directes et réciproques).

B Limites et relations d'ordre

Les preuves de cette partie sont similaires à leur homologues sur les suites. Essayer de faire ces preuves est un bon exercice pour voir si on a compris celles avec les suites.

Propriété 4.6

Soit $a \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$

1. Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.
2. Si f admet une limite finie non nulle en a alors f est non nulle et du même signe que sa limite au voisinage de a.

Preuve

La premier point a été déjà vu. Le deuxième se montre comme pour les suites (exercice). ■

Théorème 4.7 *(Stabilité des inégalités larges)*

Soient f, g deux applications définies sur I et $a \in \overline{I}$.
On suppose que $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$.
Si f et g admettent des limites en a, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x).$$

Explications

On dit que « les inégalités **larges** passent aux limites ».
⚠ Si au départ on a $f(x) < g(x)$, alors, on a quand même des inégalités larges sur les limites. Les inégalités strictes ne sont pas préservées.
On peut alléger les hypothèses en supposant que l'inégalité n'est valable que sur un voisinage de a.

Preuve

Par caractérisation séquentielle ou en utilisant un raisonnement par l'absurde. ■

Théorème 4.8 *(Théorème d'encadrement ou des gendarmes)*

Soient φ, ψ et f trois fonctions définies sur I, et $a \in \overline{I}$. Si on suppose que

- $\forall x \in I, \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$,
- φ et ψ admettent une limite finie commune ℓ en a,

alors f admet une limite en a et $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

Preuve

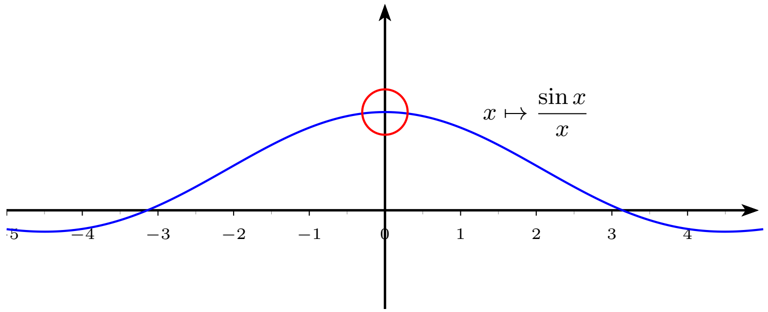
Caractérisation séquentielle (le faire pour toute suite qui converge vers a afin de bien montrer l'existence de la limite). ■

Exemple

1. Montrer que $\forall x \geqslant 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.
2. En déduire $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

Solution :

1. Soit $f : x \mapsto \sin x - x + \frac{x^2}{2}$.
   f est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$, donc en particulier sur $[0, +\infty[$.
   $\forall x \geqslant 0,\ f'(x) = \cos x - 1 + x$ et $f''(x) = -\sin x + 1$.
   Or $\forall x \in \mathbf{R}$, $\sin x \leqslant 1$, donc $f''(x) \geqslant 0$. Ainsi f' est croissante sur $\mathbf{R}_+$.
   Or $f'(0) = 0$, donc f' est positive sur $\mathbf{R}_+$.
   Ainsi f est croissante sur $\mathbf{R}_+$, et $f(0) = 0$, donc f est positive sur $\mathbf{R}_+$, donc $\forall x \geqslant 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leqslant \sin x$.
   Par un raisonnement similaire (plus simple), on montre que $\sin(x) \leqslant x$ sur $\mathbf{R}_+$.
2. D'après les inégalités précédentes, en divisant par $x > 0$, on obtient $1 - \frac{x}{2} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant 1$.
   Or $\lim_{x\to 0^+} 1 - \frac{x^2}{2} = 1$, donc par encadrement, $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
   La fonction étant paire (immédiat), $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
   Donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.



Remarque : On tourne un peu en rond car la limite de $\frac{\sin(x)}{x}$ en 0 correspond à la limite du taux d'accroissement (que l'on a supposé connaître pour avoir accès à la dérivée). Cet exercice est donc assez « artificiel ».

Théorème 4.9 *(Théorème de majoration/minoration)*

Soient φ, f deux fonctions définies sur I, et $a \in \overline{I}$. Si on suppose que

- $\forall x \in I,\ \varphi(x) \leqslant f(x)$,
- $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = +\infty$,

alors f admet une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
On a une propriété similaire pour $-\infty$ en remplaçant la minoration par une majoration.

Preuve

Par caractérisation séquentielle. ■

Théorème 4.10 *(Théorème de la limite monotone – simplifié)*

Si $I =]\alpha;\beta[$ est un intervalle **ouvert** et f est une fonction **croissante** sur I, alors f admet une limite en α et une limite en β (éventuellement infinies).

Théorème 4.11 *(Théorème de la limite monotone – complet)*

Soit $I =]\alpha;\beta[$ un intervalle **ouvert**, et f une fonction **croissante** sur I.

1. f admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point de I
2. $\forall a \in I, \quad \lim\limits_{x \to a-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim\limits_{x \to a+} f(x)$.
3. Si $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = \ell$ alors f est continue en a et $f(a) = \ell$.

Et f admet une limite en α : $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \inf\limits_{x \in I} f(x) \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$.
Et f admet une limite en β : $\lim\limits_{x \to \beta} f(x) = \sup\limits_{x \in I} f(x) \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.

Remarque : On a un énoncé analogue pour f décroissante, il suffit de prendre $-f$ croissante pour le démontrer.

Preuve

Il suffit d'adapter le théorème de la limite monotone vu pour les suites.
On considère $J = I \cap]-\infty; a[\neq \emptyset$ car I ouvert. $f(J)$ est une partie non vide de $\mathbf{R}$.
Comme f est croissante, elle est majorée par $f(a)$.
Sa restriction à J admet donc une borne supérieure.
Il suffit ensuite de montrer avec les quantificateurs que cette borne est la limite (c'est le plus petit des majorants).
On fait de même à droite et aux bornes de l'intervalle (mais ici ce n'est pas majoré ou minoré). ■

5 Continuité et densité

Définition 5.1 *(Rappel)*

Soit X une partie de $\mathbf{R}$ et $\mathscr{D} \subset X$.
On dit que $\mathscr{D}$ est dense dans X
si, et seulement si $\forall a \in X, \forall \varepsilon > 0,\ ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap \mathscr{D} \neq \emptyset$,
si, et seulement si tout élément de X peut s'écrire comme limite d'éléments de $\mathscr{D}$.

Remarque : Avec le vocabulaire de l'adhérence, on voit que $\mathscr{D}$ est dense dans X si, et seulement si $\overline{\mathscr{D}} \cap X = X$.

Exemple

$\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

Explications

La densité sert à produire des approximations. Ainsi, l'ensemble des rationnels $\mathbf{Q}$ est bien connu alors que les irrationnels restent des nombres très mystérieux et difficilement manipulables.
Dire que $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$ signifie qu'on peut approximer tout réel par un rationnel avec une marge d'erreur aussi faible que souhaitée.
L'intérêt d'une telle approximation apparaît avec le théorème qui suit.

Théorème 5.2 *(Égalité sur un sous-ensemble dense)*

Soient f et g deux fonctions **continues** sur I.
Soit $\mathscr{D}$ un ensemble dense dans I.
Si f et g coïncident sur $\mathscr{D}$, alors f et g sont égales sur I.

Explications

Comme on la vu plus haut, une fonction continue est « sans surprises ». Ainsi, disposer d'une bonne approximation de la fonction en chacun de ses points suffit à connaître parfaitement la fonction.
Si on dispose d'un domaine dense sur lequel les valeurs de f sont connues, alors toutes les autres valeurs de f s'obtiennent par approximation (passage à la limite).

Le précédé est licite tant que la fonction est continue au point considéré.
On pourrait reformuler ce théorème en disant qu'une fonction définie sur un domaine $\mathscr{D}$ dense dans X admet au plus un prolongement par continuité sur X tout entier.

Preuve

Soit $a \in I$, alors par densité de $\mathscr{D}$ dans I, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{D}^{\mathbf{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.
Or, f et g sont continues en a, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g(v_n) = g(a)$.
De plus, $\forall n \in \mathbf{N},\ f(u_n) = g(u_n)$, donc par passage de l'égalité à la limite : $f(a) = g(a)$.
Ainsi, $\forall a \in I,\ f(a) = g(a)$. ■

Exemple *(à savoir refaire)*

Trouver toutes les applications f continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$

Solution :

On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse : soit f une fonction solution.
$\star$ Recherche de valeurs particulières.
Pour $y = 0$, on a $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = f(x)f(0)$.
Donc $f(x)(1 - f(0)) = 0$.
Si $f(0) \neq 1$, alors, $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = 0$: la fonction est nulle.
Dans la suite, on supposera $f(0) = 1$.
$\star$ Construire la fonction sur $\mathbf{N}$.
$\forall n \in \mathbf{N},\ f(n+1) = f(n)f(1)$.
Si on note $\alpha = f(1)$, alors, par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbf{N},\ f(n) = \alpha^n$.
$\star$ Étendre à $\mathbf{Z}$ puis $\mathbf{Q}$.
Pour $n \in \mathbf{N},\ 1 = f(0) = f(-n+n) = f(-n)f(n) = f(-n)\alpha^n$.
Donc $\alpha \neq 0$ et $f(-n) = \alpha^{-n}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbf{Z}, f(n) = \alpha^n$.
Soit $(p,\, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*,\ \alpha^p = f(p) = f\left(\frac{p}{q}q\right) = \left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q$ par récurrence immédiate.
Ainsi, $f\left(\frac{p}{q}\right) = \alpha^{p/q}$. Donc $\forall x \in \mathbf{Q},\ f(x) = \alpha^x$.
$\star$ Étendre à $\mathbf{R}$ par densité.
On remarque que $\alpha = f(1) = \left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 > 0$, donc $\alpha^x = \mathrm{e}^{x\ln(\alpha)}$.
Ainsi f et $x \mapsto \alpha^x$ sont continues sur $\mathbf{R}$, et coïncident sur $\mathbf{Q}$ (dense dans $\mathbf{R}$) donc elles sont égales.
Synthèse :
Si f est la fonction nulle, alors elle est clairement solution.
Sinon, pour tout $\alpha > 0$, $x \mapsto \alpha^x$ est solution (vérification immédiate).

$$\mathscr{S} = \{x \mapsto \alpha^x,\, \alpha > 0\} \cup \{x \mapsto 0\}.$$

6 Fonctions continues sur un intervalle

Théorème 6.1 *(Théorème des valeurs intermédiaires)*

Si f est continue sur un intervalle I contenant $[a,b]$, alors f prend toutes les valeurs situées entre $f(a)$ et $f(b)$.
Autre formulation : L'image d'un intervalle par une application continue (à valeurs réelles) est un intervalle.

Corollaire 6.2 *(Utilisation du théorème des valeurs intermédiaires)*

Si f est continue sur un intervalle I telle qu'il existe $(a,b) \in I$, avec $f(a)f(b) \leqslant 0$ (de signes contraire). Alors f s'annule entre a et b.

Preuve

On suppose f continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. On cherche à démontrer que $f(I)$ est également un intervalle. C'est-à-dire que si $y_1 < y_2$ dans $f(I)$, et $y \in [y_1, y_2]$, alors $y \in f(I)$.
(Lorsque l'on a deux points quelconques de l'image, tous les points situés entre eux sont également dans l'image).
$y_1 \in f(I)$ donc $\exists a \in I$ tel que $f(a) = y_1$. De même $\exists b \in I$ tel que $f(b) = y_2$. On suppose par exemple que $a < b$ (ne nuit pas à la généralité de la preuve).
Alors on cherche $c \in I$ tel que $f(c) = y$.
On crée deux suites (a_n) et (b_n), avec $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Pour construire les autres termes, on pose à chaque fois $\frac{a_n + b_n}{2} = a_{n+1}$ si son image par f est inférieure à y et égale à b_{n+1} sinon.
La suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) est décroissante. De plus leur différence tend vers 0 par construction (la distance est inférieure à $\frac{|b-a|}{2^n}$). Donc elles sont adjacentes.
D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent toutes les deux vers $c \in [a,b]$.
Par continuité de f, puis passage des inégalités à la limite, on a

$$f(c) = f(\lim_{n\to+\infty} a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \leqslant y.$$

De même avec (b_n), $f(c) \geqslant y$,
Donc $f(c) = y$. ■

Théorème 6.3 *(Théorème des bornes atteintes)*

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes : elle possède un maximum et un minimum.
Autre formulation : L'image d'un segment par une application continue est un segment.

Preuve

$\star$ (non exigible)
La preuve se base sur le théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée admet une suite extraite qui converge.
Soit J le segment, $f(J)$ est un intervalle non vide (théorème des valeurs intermédiaires).

On note $M = \sup f(J)$, éventuellement infini. Alors, par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite $(u_n) \in J^{\mathbf{N}}$ telle que $f(u_n)$ converge vers M (diverge vers $+\infty$ si M est infini).
Comme (u_n) est bornée (elle est à valeur dans un segment), on peut en extraire une suite $u_{\varphi(n)}$ qui converge vers un réel $d \in \overline{J} = J$.
Alors par continuité de f en d, $f(d) = M$, donc M est fini et atteinte par f en d.
On fait de même pour la borne inférieure. ■

Théorème 6.4 *(Pseudo-réciproque du théorème des valeurs intermédiaires)*

Soit f une fonction **monotone** sur un intervalle I,
$f(I)$ est un intervalle si, et seulement si f est continue sur I.

Preuve

- *sens réciproque :* c'est le théorème des valeurs intermédiaires.
- *sens direct :*
  idée : par contraposée, on suppose que f n'est pas continue et on applique le théorème de la limite monotone. En un point la limite à gauche et la limite à droite ne sont pas égales et il existe une valeur entre les deux qui n'est jamais atteinte.
  rédaction : on considère une fonction f strictement croissante.
  Supposons que f ne soit pas continue, alors il existe $a \in I$ telle que f ne soit pas continue en I.
  Ainsi $f(a)$ est différent de sa limite à droite ou à gauche (qui existent d'après le théorème de la limite monotone).
  Par exemple si $f(a^-) < f(a)$, alors on pose $y = \frac{1}{2}\left(f\left(a^-\right) + f\left(a\right)\right)$, le milieu entre $f\left(a^-\right)$ et $f\left(a\right)$. On a alors , $f\left(a^-\right) < y < f\left(a\right)$, et par stricte croissance de f, $\forall x \in I$, si $x < a$, $f(x) \leqslant f\left(a^-\right) < y$, et si $x \geqslant a$, $f(x) \geqslant f(a) > y$.
  Ainsi, y n'admet aucun antécédent par f sur I, donc $f(I)$ n'est pas un intervalle.
  De même si f est strictement décroissante (en remplaçant par $-f$).

■

Théorème 6.5 *(Théorème de la bijection continue)*

Si f est une application continue et strictement monotone sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{R}$,
alors

- $f(I)$ est un intervalle,
- f est un bijective de I sur $f(I)$,
- f^{-1} est également bijective, continue et de même monotonie (stricte) que f.

On peut avoir la forme de l'intervalle image en fonction de I et de la monotonie de f :

- Si f est strictement croissante, et
  - $I =]a, b[$, alors $f(I) =]f(a), f(b)[$.
  - $I = [a, b[$, alors $f(I) = [f(a), f(b)[$.
  - $I =]a, b]$, alors $f(I) =]f(a), f(b)]$.
  - $I = [a, b]$, alors $f(I) = [f(a), f(b)]$.
- De même si f est strictement décroissante, en échangeant l'ordre des bornes pour $f(I)$.

Remarque : Une fonction dérivable peut être *strictement* monotone même si sa dérivée s'annule.
Par exemple $x \mapsto x^3$ est strictement monotone et pourtant sa dérivée s'annule en 0.
Pour vérifier la stricte monotonie, il suffit de revenir à la définition : l'application conserve l'ordre strict.

$$\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

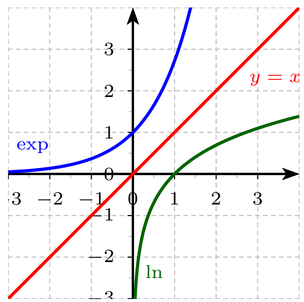
Preuve

f est continue, donc $f(I)$ est un intervalle de $\mathbf{R}$ (théorème des valeurs intermédiaires).
f est surjective sur $f(I)$ par définition et elle est injective par stricte monotonie. Donc elle est bijective.
f^{-1} a la même stricte monotonie que f (par l'absurde en exercice).
Donc f^{-1} est continue d'après le théorème précédent. ■

Exemple *(Fonction arctangente)*

tan est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.
D'après le théorème de la bijection réciproque, elle admet une fonction réciproque définie sur $\mathbf{R}$ que l'on note Arctan elle-même continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

Exemple *(Fonction logarithme népérien)*



exp est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$,
$\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$.
D'après le théorème de la bijection réciproque, elle admet une fonction réciproque définie sur $]0, +\infty[$ que l'on note ln elle-même continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.
On a vu que la courbe de la réciproque de f s'obtient par symétrie de la courbe de f par rapport à la droite $y = x$.

Exemple *(Homéomorphisme)*

Soit f définie sur I à valeurs dans J.
On dit que f est un **homéomorphisme** de I sur J, si

- f est bijective de I sur J,
- f est continue sur I,

- f^{-1} est continue sur J.

L'idée de l'homéomorphisme est de déformer « continument » une partie de $\mathbf{R}$ en une autre.
On peut ainsi réaliser des bijections continues entre différents intervalles de $\mathbf{R}$ (vous verrez l'an prochain que les intervalles homéomorphes doivent avoir certaines caractéristiques en commun).
Par exemple la restriction de tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est un homéomorphisme de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbf{R}$.
On peut la transformer en un homéomorphisme de $]0,\,1[$ dans $\mathbf{R}$. Pour cela, il suffit de la composer à droite par un homéomorphisme de $]0,\,1[$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (la composée de deux homéomorphismes est un homéomorphisme : immédiat).
On peut choisir, en s'aidant des barycentres,

$$u\ : x \mapsto x\frac{\pi}{2} - (1-x)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(2x-1).$$

On obtient alors

$$\varphi : \begin{cases}]0,\,1[& \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto \tan\left(\frac{\pi(2x-1)}{2}\right). \end{cases}$$

D'une certaine façon, on arrive à étirer l'intervalle $]0,\,1[$ jusqu'à lui donner la taille de $\mathbf{R}$ tout entier. La continuité veut dire que l'on n'a pas besoin pour cela de déchirer l'intervalle ou de recoller plusieurs intervalles entre eux pour y arriver. Il faut imaginer l'intervalle comme un élastique que l'on peut étirer à l'infini (c'est possible car entre deux points deux points de $\mathbf{R}$, il en existe toujours une infinité d'autres).
De façon tout à fait contre-intuitive, on a réussi à associer chaque élément de l'intervalle $]0,1[$ à un unique élément de $\mathbf{R}$. En ce sens, on *pourrait dire que* $]0,1[$ *aurait le même nombre d'éléments que* $\mathbf{R}$ *tout entier !*
Lorsque l'on peut créer une homéomorphie entre deux éléments, on dit qu'ils sont homéomorphes. Par exemple, $\mathbf{R}$ est homéomorphe à tout intervalle ouvert, par contre, il n'est pas homéomorphe à $\mathbf{R}^*$ (car il faudrait alors recoller des morceaux). Cette notion peut-être généralisé à des ensembles plus complexes. Par exemple deux objets de l'espace sont homéomorphes si on peut passer de l'un à l'autre sans déchirure ou sans colle. Par exemple, une sphère est homéomorphe à un cube, mais elle n'est pas homéomorphe à un plan...
On remarque que pour les fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, l'hypothèse de continuité de la réciproque n'est pas utile car c'est une conséquence du théorème de la bijection continue 6.5. Mais ce théorème n'existe pas dans d'autres espaces comme $\mathbf{R}^2$ par exemple.

Théorème 6.6

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
f est injective si, et seulement si f est strictement monotone.

Preuve *(Non exigible)*

sens réciproque : immédiat, déjà prouvé.
sens direct : par contraposée.

Supposons que f n'est pas strictement monotone, alors elle n'est pas non plus monotone.
En effet, si elle était monotone, sans être strictement monotone, cela contredirait l'injectivité.
Il existe donc $x_1 < y_1$ tel que $f(x_1) < f(y_1)$ (pas décroissante) et $x_2 < y_2$ tel que $f(x_2) > f(y_2)$ (pas croissante).
On veut donc obtenir un point avec deux antécédents pour contredire l'injectivité. Pour cela on paramètres les arcs de la courbe de f entre x_1 et x_2 et entre y_1 et y_2 par deux fonctions :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &: t \mapsto f\left((1-t)x_1 + tx_2\right), \\ \varphi_2 &: t \mapsto f\left((1-t)y_1 + ty_2\right). \end{aligned}$$

On montre alors que ces deux arcs passent nécessairement par la même ordonnée en deux points distincts.
On note $\varphi\ : t \mapsto \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$, alors

$$\varphi(0) = f(y_1) - f(x_1) > 0 \quad \text{et} \quad \varphi(1) = f(y_2) - f(x_2) < 0.$$

Or, φ est continue, et d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $t_0 \in]0,\,1[$ tel que $\varphi(t_0) = 0$, c'est-à-dire $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$.
Or $z_1 = (1-t_0)x_1 + t_0x_2 \neq z_2 = (1-t_0)y_1 + t_0y_2$ (sinon, on aurait $(1-t_0)(x_1-y_1) = t_0(y_2-x_1)$ qui sont de signe strictement opposés).
On a donc trouvé $z_1 \neq z_2$ tel que $f(z_1) = f(z_2)$ donc f n'est pas injective. ∎

7 Fonctions à valeurs complexes

Définition 7.1

Soit $f\ : I \to \mathbf{C}$, une fonction définie sur un intervalle et à valeurs complexes. On dit que f admet la **limite** $\ell \in \mathbf{C}$ en $a \in \overline{I}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \eta > 0,\, \forall x \in I,\, |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On dit que f est **continue** en $a \in I$, si f admet une limite complexe en a.
Dans ce cas, cette limite est nécessairement $f(a)$.

Explications

Ce sont les même définitions que pour les fonctions à valeurs réelles, si ce n'est que les valeurs absolues sont remplacées par le module.

Théorème 7.2 *(Limites)*

Soit f définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs complexes.
Soit $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbf{C}$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \left(\lim_{x\to a} \mathfrak{Re}\,(f)(x) = \mathfrak{Re}\,(\ell) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \mathfrak{Im}\,(f)(x) = \mathfrak{Im}\,(\ell)\right).$$

Théorème 7.3 *(Continuité)*

Soient $f : I \to \mathbf{C}$ et $a \in I$.
f est continue en a si, et seulement si $\mathfrak{Re}\,(f)$ et $\mathfrak{Im}\,(f)$ le sont.

Définition 7.4 *(Fonction bornée)*

Soit f définie sur I à valeurs dans $\mathbf{C}$.
f est bornée sur $J \subset I$ si

$$\exists M > 0, \forall x \in J, |f(x)| \leqslant M.$$

Propriété 7.5

Si f admet une limite finie ℓ en $a \in \overline{I}$, alors f est bornée sur un voisinage de a

Théorème 7.6 *(Opérations sur les limites)*

Les opérations sur les limites vues dans le cas réel restent valables pour les fonctions à valeurs complexes.

⚠ Lorsque l'on compose des fonctions f et u en $f \circ u$, u *doit* être à valeurs réelles (on n'a pas étudié les fonctions dont l'ensemble de départ est dans $\mathbf{C}$.
Les théorèmes de caractérisation séquentielle, somme, produit, inverse, quotient... restent valables.

Le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème des bornes atteintes, le théorème de la bijection continue ne sont en revanche plus valable.
⚠ On ne parle pas de monotonie sur $\mathbf{C}$ (il n'y a pas d'inégalités).