Logique et raisonnement

« Les mathématiques sont un jeu qu'on exerce selon des règles simples en manipulant des symboles et des concepts qui n'ont en soi, aucune importance particulière. » D. Hilbert (1862-1943)

Aperçu historique :
On situe l'origine de la logique à Aristote (IV$^{\text{ème}}$ av. J.C.) et à son ouvrage l'*Organon*[1]. Il y énonce le procédé de la démonstration rigoureuse basée sur le syllogisme.

La philosophie d'Aristote a une place prédominante pendant tout le Moyen-Âge. En particulier, la *scolastique* qui trouve son point d'orgue chez Saint Thomas d'Aquin vise à rapprocher la théologie chrétienne de la philosophie traditionnelle en s'appuyant sur les concepts et le langage formel introduits par Aristote.

À partir de la Renaissance, la logique est utilisée pour tenter de construire un fondement rigoureux à la connaissance avec une place prépondérante pour l'expérience.

En 1900, David Hilbert énonce 23 problèmes qui marqueront la suite des mathématiques. Le deuxième concerne la cohérence de l'arithmétique.
En substance, il pose la question suivante :

« Quelles sont les règles du jeu minimales pour faire des mathématiques, et telles, qu'elles nous assurent de l'absence de toute contradiction ? »

Ce problème ouvrit un vaste travail dans la formalisation des mathématiques et la définition d'un fondement axiomatique clair.

Répondre à cette question requit de dépasser les simples raisonnements intuitifs pour construire des raisonnements rigoureux et d'une logique inattaquable. C'est également l'objectif visé par cet ouvrage.

1. Le titre est donné postérieurement par Diogène Laërce. Il veut dire « outil » ou « instrument ».

Remarque : Pour ne pas surcharger ce chapitre, la plupart des résultats sont admis : il ne sera pas présenté de preuve, sauf quand celle-ci constitue un exercice salutaire.

1 Logique mathématique

A Fondements de la logique

Définition 1.1

Dans ce cours, une **assertion** désigne une phrase non paradoxale[2].
Lorsque la valeur de vérité dépend d'une variable, on parle plutôt de **prédicat**.

Remarque : Dans cet ouvrage, le terme d'assertion sera utilisé dans les deux situations.

Exemple

« $x > 3$ » est un prédicat.
Cela est vrai pour certaines valeurs de x et faux pour d'autres.

Le **principe du tiers-exclu** affirme qu'une assertion est soit vraie, soit fausse.
Ainsi lorsque l'on montre qu'une assertion ne peut pas être fausse, c'est qu'elle est vraie : c'est le raisonnement par l'absurde.

« Il est absolument ou il n'est pas du tout. » Parménide

Le **principe de non contradiction** affirme qu'une assertion ne peut pas être à la fois vraie et fausse.

« Être en repos et en mouvement, simultanément, sous le même rapport, est-ce que c'est possible pour la même chose ? Nullement. » Platon

Ces deux principes de base ont fondé la logique mathématique telle que nous l'utilisons habituellement, cependant, ils ne sont pas universellement acceptés :

En 1931, Gödel donna une réponse négative à la question posée par Hilbert en 1900 avec *le théorème d'incomplétude*. Il démontra que dans tout système axiomatique (tel que nous les construisons aujourd'hui), il subsiste des énoncés *indécidables* : dont on ne peut prouver qu'ils sont vrais ou faux.

Pour des raisons plus philosophiques, les *intuitionnistes* s'opposent au principe du tiers-exclu. Selon eux, rien ne permet d'affirmer qu'une assertion possède nécessairement une valeur de vérité. Partisans d'une approche constructiviste, ils refusent d'affirmer qu'une propriété est vraie tant que l'on n'a pas *construit* une solution. Cette logique est importante en informatique, science dans laquelle la construction de l'objet est nécessaire. Ce problème de la constructibilité des objets est une question récurrente en mathématiques. Aujourd'hui, certains résultats mathématiques sont donnés comme vrais sans que nous sachions comment les obtenir concrètement : nous avons juste montré qu'il était impossible qu'ils soient faux.

Les critiques contre le principe de non contradiction sont anciennes, mais ont été

2. Pour ne pas mettre en défaut le principe du tiers-exclu qui est exposé juste après, on évitera les énoncés contradictoires du type « cette phrase est fausse ».

ravivées avec la physique contemporaine. Le philosophe Lupasco qui a travaillé sur la question, a introduit la notion de « *potentialisation* ».

Méthode

Pour démontrer qu'une assertion est juste, il faut montrer qu'elle est juste **dans tous les cas**. En général cela représente une infinité de cas possibles.
Par contre, pour montrer qu'une assertion est fausse, il suffit de trouver **un seul contre-exemple**, c'est-à-dire une situation pour laquelle elle est fausse.

Exemple

Pour démontrer que la somme des angles d'un triangle fait 180 degrés, il ne suffit pas de le vérifier sur certains triangles, mais il faut le vérifier pour **tous** les triangles qui peuvent exister. Cela demande donc un raisonnement *qualitatif* qui soit valable pour tous les triangles à la fois. (Au fait, comment fait-on[3] ?)
En revanche, pour démontrer qu'un résultat est faux, il suffit de trouver **une** situation où il n'est pas vérifié. Par exemple, l'assertion : *« Tous les nombres impairs supérieurs ou égaux à trois sont premiers »* est fausse.
Pour le montrer, il suffit de dire que $9 = 3 \times 3$ est impair mais pas premier.
Si on s'était contenté de certains exemples, $3, 5, 7 \cdots$ alors on aurait très bien pu croire que la propriété était vraie. C'est une erreur malheureusement courante.

Définition 1.2

Une **conjecture**, est un énoncé mathématique non prouvé mais que l'on pense être vrai.

Il existe de nombreuses conjectures en mathématiques dont on est presque sûr de la véracité mais que l'on n'a toujours pas réussi à démontrer.

Exemple

La conjecture de Goldbach dit que tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme somme de deux nombres premiers (ce n'est pas prouvé).
Au lycée, vous aviez l'habitude d'établir des conjectures d'après les figures obtenues à la calculatrice.

Définition 1.3

Lorsqu'une conjecture *importante* est démontrée, on parle de **théorème**.

Exemple

Le grand théorème de Fermat, énoncé par Fermat vers le milieu du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, est resté à l'état de conjecture pendant 3 siècles. Il a été démontré par A. Wiles en 1995 devenant dès lors un théorème.
Ce théorème stipule que pour tout entier $n \geqslant 3$, il n'existe pas d'entiers x, y, z tous non nuls tels que

$$x^n + y^n = z^n$$

3. On trace une droite parallèle à un côté et passant par le sommet opposé et on utilise les propriétés des angles alternes internes... à condition de savoir démontrer cette propriété.

À noter que dans le cas $n = 2$, il existe une infinité de solutions qui correspondent aux triangles rectangles (dont les côtés ont des longueurs entières). On trouve des traces de solution de ce problème dès l'époque babylonienne et la résolution complète de ce cas est un exercice accessible en classes préparatoires (avec un peu d'arithmétique).

B Quantificateurs et opérateurs logiques élémentaires

Les quantificateurs sont des symboles mathématiques qui permettent d'écrire des assertions mathématiques de façon très ramassée et compréhensible en un coup d'œil.

⚠ On évite d'utiliser les quantificateurs au sein d'une phrase en français. Voici une liste des quantificateurs et opérateurs logiques qui seront utilisés.

Dans la suite, p et q désignent deux assertions logiques.

Conjonction « et » : l'assertion « $p \wedge q$ » se lit « p et q ».
Elle est vraie lorsque p et q sont simultanément vraies.
Par exemple, « $5 \leqslant x < 2$ » peut se décomposer en « $5 \leqslant x$ et $x < 2$ » : il faut que x vérifie les deux inégalités en même temps.

Disjonction « ou » : l'assertion « $p \vee q$ » se lit :« p ou q ».
Elle est vraie lorsque l'une au moins des assertions p ou q est vraie. Il n'est pas nécessaire qu'elles soient toutes les deux vraies. On voit que la disjonction est *moins exigeante* que la conjonction.

Remarque : On utilise peu les symboles $\wedge$, $\vee$ et on préfère souvent l'écriture en toutes lettres « et » , « ou » ; faisant ainsi la première entorse à la règle édictée plus haut...

Contraire : l'assertion contraire de p se note « $\neg\, p$ » ou « non(p) ». C'est la *négation.*

Appartenance : pour indiquer qu'un élément x appartient à un ensemble E, on note « $x \in E$ ». La négation est «$x \notin E$ » : « x n'appartient pas à E ».

Quantificateur universel : si p est une assertion et E un ensemble, pour indiquer que tous les éléments de E vérifient la propriété p, on note « $\forall x \in E,\ p$ ».
« $\forall x \in E$ » se lit « pour tout x dans E » ou « quel que soit x dans E ».

Quantificateur existentiel : si p est une assertion et E un ensemble, pour indiquer qu'il existe *au moins* un élément de E qui vérifie la propriété p, on note « $\exists x \in E,\ p$ ».
« $\exists x \in E$ » se lit « il existe x dans E ».

Remarque : Pour dire que le x est unique, on écrit « $\exists\,!\, x \in E$ » qui se lit : « il existe un *unique* x dans E ».

Exemple

Il faut bien comprendre la différence entre les quantificateurs « $\forall$ » et « $\exists$ » : il n'est pas du tout pareil de dire que « il existe une voiture jaune » ou « toutes les voitures sont jaunes ».
Formellement, pour E un ensemble non vide, et p une assertion logique,
Si « $\forall x \in E, p$ », alors en particulier « $\exists x \in E, p$ ».
Mais la réciproque est fausse en général, ce n'est pas parce que « $\exists x \in E, p$ », que l'on a « $\forall x \in E, p$ ».

Exemple

Soit f une application définie sur $\mathbf{R}$. Les assertions suivantes disent-elles la même chose, ou ont-elles des significations différentes ? Quelle est leur signification ?

1. $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = 0$.
2. $\forall z \in \mathbf{R},\ f(z) = 0$.

Solution :

⚠ Avant d'utiliser un objet mathématique, il faut s'assurer qu'il est bien défini. Par exemple, écrire $f(x) \neq 0$ n'a aucun sens, si f et x n'ont pas été définis précédemment.

Équivalence : deux propositions sont équivalentes lorsqu'elles ont la même valeur de vérité : soit elles sont vraies en même temps, soit elles sont fausses en même temps. En français $p \iff q$ se dit « p est vraie *si et seulement si* q est vraie ».

Exemple

« Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$. » est une équivalence qui est vraie.
C'est le théorème de Pythagore et sa réciproque mis ensemble.

⚠ Lorsque $p \iff q$ est vraie, cela ne veut pas dire que p et q soient vraies. Cela peut vouloir dire au contraire que p et q sont toutes les deux fausses.

Par exemple, le triangle ABC peut très bien ne pas être rectangle en A, mais alors l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée pour lui.

Méthode *(Utilisation des équivalences dans les raisonnements)*

Pour montrer que q est vraie, on peut lui chercher une proposition équivalente plus simple qui soit également vraie.

Exemple

Résoudre sur $\mathbf{R}$: $5x - 7 \geqslant -1$.
Solution :

Remarque : Contrairement à ce qui a été dit plus haut, ici, on n'a pas défini x avant de l'écrire dans l'expression. Cela vient du fait que c'est l'expression elle-même qui définit la valeur de x. En effet, lorsque l'on résout une équation ou une inéquation, on ne sait pas, a priori, pour quelles valeurs elle est valable. C'est la résolution elle-même qui nous indique quels sont les « x » pour lesquels la relation est vraie. Il serait donc prématuré de définir x préalablement.
Par contre, il faut préciser dans quel ensemble on cherche x. Ici, il est sous-entendu que l'on cherche $x \in \mathbf{R}$.

Exemple

Montrer que l'assertion $x^2 = y^2 \iff x = y$ est fausse sur $\mathbf{R}$.
Sur quel sous-ensemble (le plus grand possible) de $\mathbf{R}$ est-elle vraie ?
Solution :

Implication : $p \Rightarrow q$ est vraie si et seulement si
$\begin{cases} p \text{ et } q \text{ son simultanément sont vraies,} \\ \text{ou } p \text{ est fausse.} \end{cases}$

L'implication $p \Rightarrow q$ traduit le lien logique « *Si p, alors q* ».
Si *la prémisse* p est vraie, alors q est aussi vraie, par contre, si p est fausse, on n'a aucune information sur q qui peut être soit vraie, soit fausse. En effet, à partir d'un postulat faux, on peut démontrer à la fois des énoncés faux, et des énoncés vrais. En d'autres termes, ce n'est pas parce que votre résultat est vrai que votre hypothèse ou le raisonnement est lui-même vrai[4].

Exemple

Commenter : « $1 + 1 = 3 \Rightarrow$ "je suis la reine d'Angleterre" ».
Solution :

La **réciproque** de $p \Rightarrow q$ est $q \Rightarrow p$. Une implication peut être vraie sans que sa réciproque le soit.

4. Contrairement à la croyance commune, un résultat juste sur une copie de maths n'a aucune valeur en lui-même. Pour acquérir de la valeur, il faut expliciter les hypothèses émises et détailler un raisonnement sans fautes qui conduit à ce résultat.

⚠ L'implication ne traduit pas nécessairement un lien de cause à conséquence.

Exemple

« S'il pleut, alors il y a des nuages. »
Cette assertion est vraie (sauf si votre frère joue avec le tuyau d'arrosage à côté), et pourtant elle n'exprime pas un lien de cause à conséquence mais tout le contraire : elle exprime un lien de conséquence à cause nécessaire. La cause, n'est pas la pluie, mais ce sont les nuages.
L'implication réciproque est fausse : ce n'est pas parce qu'il y a des nuages qu'il pleut nécessairement.

C Propriétés élémentaires du « et » et du « ou »

Propriété 1.4 *(Propriétés du « et » et du « ou »)*

1. **Associativité**

$$(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r) \quad \text{et} \quad (p \vee q) \vee r \iff p \vee (q \vee r)$$

Il n'est donc pas utile de mettre des parenthèses si on n'a que des conjonctions, ou que des disjonctions (par contre on en a besoin si on mélange les deux).

2. **Commutativité**

$$(p \wedge q) \iff (q \wedge p) \quad \text{et} \quad (p \vee q) \iff (q \vee p)$$

L'ordre des termes d'une conjonction ou d'une disjonction n'a pas d'importance.

3. **Distributivité** du *et* par rapport au *ou*

$$p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

4. **Distributivité** du *ou* par rapport au *et*

$$p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Rappelez-vous : Le « *et* » et le « *ou* » se comportent l'un par rapport à l'autre comme la multiplication par rapport à l'addition. On peut donc utiliser des formules de double distributivité.

D Lois de De Morgan pour la négation

Propriété 1.5 *(Loi de De Morgan pour « et » et « ou »)*

1. la négation de « $p \wedge q$ » est « $(\neg p) \vee (\neg q)$ »
2. la négation de « $p \vee q$ » est « $(\neg p) \wedge (\neg q)$ »

Explications

1. Si les deux assertions ne sont pas vraies en même temps, c'est que l'une ou l'autre n'est pas vraie.
2. De même, si aucune des assertions n'est vraie, c'est que ni la première, ni la deuxième n'est vraie.

Rappelez-vous : la négation échange le « **et** » et le « **ou** ».

Propriété 1.6 *(Loi de De Morgan des quantificateurs)*

1. la négation de « $\forall x \in E, p$ » est « $\exists x \in E, \neg p$ »
2. la négation de « $\exists x \in E, p$ » est « $\forall x \in E, \neg p$ »

Exemple

Le contraire de l'assertion « toutes les billes du sac sont rouges » est : « il existe une bille du sac qui n'est pas rouge ».
Le contraire de l'assertion « il y a au moins une bille du sac qui est rouge » est : « aucune des billes du sac n'est rouge ».

Rappelez-vous : la négation échange les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Exemple

Soit E, un ensemble de nombres. Quelle est la différence entre le fait de dire

- « les éléments de E sont tous non nuls »,
- « les éléments de E sont non tous nuls ».

Solution :

Exemple

1. Écrire avec les quantificateurs qu'une application f définie sur $\mathbf{R}$ est majorée. Avec les lois de De Morgan, donner l'assertion contraire.
2. Que signifie l'assertion q : $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists M \in \mathbf{R},\ f(x) \leqslant M$. Écrire avec les quantificateurs l'assertion $\neg\, q$.

Solution :

⚠ Un quantificateur $\exists$ dépend des $\forall$ et $\exists$ qui le précèdent.

On ne peut donc **pas les échanger** sans vérification supplémentaire.

E Propriétés de l'implication et de l'équivalence

Propriété 1.7 *(Transitivité de l'implication)*

$$\Big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\Big) \Rightarrow \Big(p \Rightarrow r\Big)$$

Explications

L'implication se transmet de proche en proche... .

Propriété 1.8 *(Double implication)*

$$\Big(p \iff q\Big) \iff \Big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\Big)$$

Explications

Si deux assertions sont équivalentes, c'est que si l'une est vraie, alors l'autre aussi. Une double flèche, c'est simplement une flèche dans chaque sens.

Méthode *(Prouver une équivalence)*

Pour prouver que deux propositions p et q sont équivalentes, on peut

1. raisonner par équivalences successives,
2. raisonner par double implication $p \Rightarrow q$ puis $q \Rightarrow p$.

Exemple

Montrer que $(\forall n \in \mathbf{N},\ a\,2^n + b\,3^n = 0) \iff a = b = 0$.

Solution :

De l'exemple précédent, on doit en particulier retenir la méthode suivante :

Méthode

Si on sait qu'une propriété est vraie pour tout n, alors on peut particulariser n.

Propriété 1.9 *(Implication)*

$$\Big(p \Rightarrow q\Big) \iff \Big((\neg\, p) \vee q\Big)$$

$$\Big(\neg(p \Rightarrow q)\Big) \iff \Big(p \wedge \neg\, q\Big)$$

Preuve

Montrons la première équivalence (la seconde s'en déduit par les règles de De Morgan sur la négation).
On utilise un raisonnement par équivalences successives :

$$\begin{aligned}
\Big(p \Rightarrow q\Big) &\iff \Big((p \wedge q) \vee (\neg\, p)\Big) && \text{(par définition)}\\
&\iff \Big(\big(p \vee (\neg\, p)\big) \wedge \big(q \vee (\neg\, p)\big)\Big) && \text{(par distributivité)}\\
&\iff \Big(V \wedge \big(q \vee (\neg\, p)\big)\Big) && \text{(principe de tiers-exclu)}\\
&\iff \Big((\neg\, p) \vee q\Big) && \blacksquare
\end{aligned}$$

Explications

On voit que l'implication est vraie dans les seuls deux cas suivants : soit p est fausse, soit q est vraie.

Exemple

Soit f une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Définir avec les quantificateurs

1. que f est croissante,
2. que f n'est pas croissante,
3. que f est décroissante.

Commenter.
Solution :

Propriété 1.10 *(Contraposée)*

$$\Big(p \Rightarrow q\Big) \iff \Big(\neg\, q \Rightarrow \neg\, p\Big)$$

Exemple

La contraposée est un raisonnement subtil qui se comprend mieux sur des exemples : La contraposée de « S'il pleut, alors il y a des nuages » est « s'il n'y a pas de nuages, alors il ne pleut pas ».
Il est parfois plus simple de démontrer la contraposée que directement l'énoncé.

Preuve

La preuve est immédiate en utilisant les définition de l'implication et l'involutivité de la négation :
$(p \Rightarrow q) \iff (\neg\, p \vee q) \iff (q \vee \neg\, p) \iff (\neg(\neg\, q) \vee \neg\, p) \iff (\neg\, q \Rightarrow \neg\, p)$. $\blacksquare$

Exemple

Donner la contraposée de $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = 0 \Rightarrow \exists z \in \mathbf{R},\ f(z) = 0$.
Traduire l'assertion et sa contraposée en français.
Solution :

Nous reviendrons sur le raisonnement par contraposée en fin de chapitre.

F Conditions nécessaires et suffisantes

En mathématiques, on utilise souvent le vocabulaire de *condition nécessaire* et de *condition suffisante.* Cela traduit des implications.

On dit que p est une **condition suffisante** à la réalisation de q si la véracité de p implique celle de q : $p \Rightarrow q$.
Par exemple, il *suffit* qu'il pleuve pour que l'on sache qu'il y a des nuages : « pluie $\Rightarrow$ nuages ».

On dit que p est une **condition nécessaire** à la réalisation de q si q ne peut pas être vraie quand p ne l'est pas.
On remarque que c'est la réciproque de la condition suffisante : $p \Leftarrow q$ (quand q est vraie, alors p l'est aussi *nécessairement*).
Avec l'exemple précédent, il *faut* qu'il y ait des nuages pour qu'il puisse pleuvoir (ce qui ne veut pas dire qu'il pleuvra).

p est une **condition nécessaire et suffisante** à la réalisation de q si on a à la fois l'implication et sa réciproque : p et q sont équivalentes.

Exemple

Écrire avec une implication le proverbe « Il n'y a pas de fumée sans feu ».
La fumée est-elle une condition nécessaire ou suffisante au feu ? La réciproque est-elle vraie ?
Solution :

L'expression **il faut** indique une condition nécessaire, et **il suffit** indique une condition suffisante.

2 Récurrence

C'est à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle que l'ensemble des entiers naturels **N** est enfin construit rigoureusement par Péano. **N** est ainsi construit avec 5 axiomes[5] (règles de bases) :

1. **N** contient un élément noté 0.
2. Tout entier naturel n à un unique successeur.
3. Aucun élément de **N**, n'a 0 pour successeur.
4. Deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux.
5. Si un sous-ensemble de **N** contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors il est égal à **N**.

Le principe de récurrence vu en terminale découle simplement du cinquième axiome. De façon plus imagée : on peut représenter **N** par une échelle infinie. Les axiomes précédents s'écrivent alors ainsi :

1. L'échelle contient un barreau noté 0.
2. Chaque barreau à une unique successeur : l'échelle est infinie (existence du successeur) et ne se sépare jamais en deux ou davantage (unicité du successeur).
3. Aucun barreau de l'échelle n'a 0 pour successeur : 0 est le barreau le plus bas de l'échelle, il n'y en a pas avant lui.
4. Deux barreaux qui ont le même successeur sont égaux : ce n'est pas un escabeau.
5. Si je prends une partie de l'échelle qui contient le barreau 0, et pour chaque barreau de cette partie, elle contient le barreau qui suit, alors j'ai toute l'échelle. En d'autre termes, si je pars du barreau 0 et qu'à chaque barreau, je sais aller au barreau suivant, alors je peux monter toute l'échelle.

C'est cette dernière « *opération* » qui constitue la récurrence : pour monter une échelle, il suffit de trouver le barreau du bas, et de savoir passer d'un barreau à son successeur. Si on se base sur l'axiomatique de Péano, le principe de récurrence n'est pas un théorème à prouver car il fait partie de la définition même de **N**.

Principe 2.1 *(Récurrence simple)*

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion logique qui dépend de l'entier n.

Si 1. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
2. Pour $n \in \mathbf{N}$ **quelconque** fixé, $\mathcal{P}(n)$ vraie implique $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Remarques :

- On peut réaliser des récurrences *finies* qui s'arrêtent à un certain rang N.
- On peut faire commencer la récurrence à 1, 2 ou à tout autre entier.

⚠ Ne pas oublier d'initialiser la récurrence, et de l'initialiser au **bon indice** : si la propriété doit être vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$, il faut initialiser la récurrence à $n = 0$ (et non pas $n = 1$).

5. Il existe d'autres axiomatiques équivalentes pour définir **N**, mais celle-ci est sans doute la plus intuitive.

Méthode *(Rédaction de la récurrence)*

Annonce : Prouvons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.
Pour tout entier naturel n, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$:« ... ».
Initialisation : On vérifie que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Pour $n \geqslant 0$ **quelconque fixé**, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
On montre alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est également vraie.
Conclusion.

On utilise ce mode de raisonnement lorsque la propriété à démontrer dépend de n. Par exemple, le raisonnement par récurrence apparaît souvent avec les suites lorsque le terme u_{n+1} dépend du terme précédent u_n. Ce sont les suites définies par récurrence (il faut aussi définir à part le premier terme u_0).

Exemple

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = 2u_n - 1$.
Montrer que la suite est constante égale à 1.
Solution :

Exemple *(Le paradoxe de la boîte de crayons de couleur)*

On propose de montrer que dans une boîte de crayons de couleur, tous les crayons sont nécessairement de la même couleur.
Pour cela, faisons une récurrence sur le nombre de crayons que contient la boîte.
Rédaction de la récurrence :
Pour tout entier naturel non nul n, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$ par :
$\mathcal{P}(n)$: « Si une boîte de crayons de couleur contient exactement n crayons, alors ils sont tous de la même couleur. »
Initialisation : pour $n = 1$, la propriété est évidemment vraie. En effet, si une boîte ne contient qu'un seul crayon de couleur, alors tous les crayons de la boîte sont de la même couleur (il n'y en a qu'un seul). C'est une trivialité.
Hérédité : on suppose que cette propriété est vraie à un rang $n \geqslant 1$ quelconque fixé et on démontre qu'elle est alors vraie au rang $n + 1$.
Supposons donc une boîte de $n + 1$ crayons de couleur.
• Prenons les n premiers ; on peut en former une boîte et d'après l'hypothèse de récurrence, ils sont tous de la même couleur.
• Pour la même raison, les n derniers sont également tous de la même couleur.
Le crayon de couleur situé au milieu de la boîte fait tantôt partie des n premiers et tantôt des n derniers. Ainsi, il est de la même couleur que les n premiers et que les n derniers : tous sont de la même couleur que lui. Cela montre donc bien que tous les crayons de la boîte sont de la même couleur.
Conclusion : par principe de récurrence, quelque soit le nombre de crayons dans une boîte, ils sont tous de la même couleur. Où est l'erreur ?

Solution :

Théorème 2.2 *(Récurrence double)*

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion logique qui dépend de l'entier n.

Si 1. $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
2. Pour $n \in \mathbf{N}$ **quelconque** fixé, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies implique $\mathcal{P}(n+2)$ vraie.

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Remarque : Cette fois-ci, c'est un théorème que l'on démontre à partir du principe de récurrence simple (récurrence simple sur la propriété $Q(n) =$« $P(n)$ et $P(n+1)$ »).

Explications

La récurrence double est une récurrence pour laquelle l'assertion $\mathcal{P}(n)$ ne dépend pas seulement du terme précédent, mais de deux termes précédents $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n-2)$: on s'appuie sur les deux barreaux précédents pour monter sur le suivant. Cela suppose donc de faire une initialisation sur les deux premiers barreaux.
La récurrence double est surtout utile avec les suites à récurrence double pour lesquelles u_{n+2} dépend de u_n et de u_{n+1}. Il va sans dire que ce principe peut se généraliser sans problème à 3, 4 ou plus d'indices successifs.

Exemple

On définit la suite de Fibonacci par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Montrer que tous les termes de la suite de Fibonacci sont dans $\mathbf{N}$.
Solution :

Si pour prouver $\mathcal{P}(n)$ on a besoin de tous les termes qui précèdent, on utilise alors la récurrence forte :

Théorème 2.3 *(Récurrence forte)*

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion logique qui dépend de l'entier n.

Si 1. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
2. Pour $n \in \mathbf{N}$ **quelconque** fixé, le fait que les assertions $\mathcal{P}(k)$ soient vraies pour tous les $k \leqslant n$ implique que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Preuve

C'est simplement le principe de récurrence appliqué à la propriété $(\forall k \leqslant n,\ \mathcal{P}(k))$. ■

3 Synthèse : différents types de raisonnement

Nous récapitulons les différents types de raisonnement que nous venons de voir. Lorsqu'on a quelque chose à démontrer, on peut s'appuyer sur une des méthodes qui suit.
⚠ Avant d'écrire un raisonnement sur une copie, il faut **annoncer** le type de raisonnement qui sera utilisé (sauf si c'est un raisonnement déductif ou par équivalence).

Méthode *(La déduction)*

À partir d'hypothèses, arriver à la conclusion par une suite d'implications.

La déduction correspond à l'implication logique. Elle s'appuie sur le raisonnement « *Si... , alors...* ». C'est ce que les anciens appelaient le *syllogisme*.

Exemple

Tout homme est mortel, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel.

Méthode *(le raisonnement par l'absurde)*

Pour démontrer qu'une proposition est vraie, on montre qu'il est absurde de la supposer fausse.

Pour rédiger un raisonnement par l'absurde, il faut toujours bien préciser quelle hypothèse doit donner l'absurdité.

Exemple *(Culture générale)*

Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
Solution :

Méthode *(la contraposée)*

$$(p \Rightarrow q) \iff (\neg\, q \Rightarrow \neg\, p)$$

Si la conclusion est fausse, c'est que l'hypothèse ne peut pas être vraie.

Exemple

Montrer que, si $a+b$ est irrationnel alors ou a ou b est irrationnel.

Solution :

Méthode *(Disjonction des cas)*

Pour montrer qu'une propriété est vraie dans certains cas, on étudie chaque situation séparément.

Exemple

Pour $n \in \mathbf{Z}$, donner la parité de $n(n+1)$.

Solution :

Lorsque l'expression fait intervenir des valeurs absolues, on utilise très souvent la disjonction des cas : il faut y penser.

Exemple

Montrer que $\forall x \in \mathbf{R},\ |x-1| \leqslant x^2 - x + 1$.

Solution :

Méthode *(Par analyse-synthèse)*

Pour trouver des solutions :

- **Analyse (condition nécessaire) :** on commence par supposer que l'on connait ces solutions et on en déduit des conditions qu'elles doivent vérifier.
- **Synthèse (condition suffisante) :** on montre que si un objet vérifie ces conditions, alors il est bien solution.

Ce type de raisonnement répond souvent à la question

« montrer qu'il existe un unique ... tel que ... ».

Analyse (unicité) : On suppose que le x existe et on en déduit des conditions *nécessaires* sur lui. Ces conditions vont montrer qu'alors, ce x (s'il existe) est unique.
Synthèse (existence) : on va construire un objet qui vérifie les hypothèses trouvées dans l'analyse et on montera qu'il est solution (condition *suffisante*). Ceci prouvera qu'un tel objet existe.

Dans ce genre de raisonnement, on voit bien que pendant l'analyse (pour montrer l'unicité), on suppose qu'un tel objet existe, mais on n'en est pas sûr. La synthèse doit donc être rédigée pour montrer que cet objet existe bien. Si on oublie la synthèse (qui tient souvent en un mot : *trivial*), alors le raisonnement est incomplet.

Exemple

Prouver que toute fonction f définie sur $\mathbf{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Solution :

Méthode *(Récurrence)*

Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$,

1. On montre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie,
2. On suppose que pour un $n \in \mathbf{N}$ quelconque, $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie.

On peut aussi utiliser les récurrences double, triple... ou forte.