Dérivabilité

« Je me détourne avec horreur et effroi de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées. »
(Correspondance de Hermite à Stiltjes, 1893)

Ce chapitre vient en complément de ce qui a déjà été vu dans le chapitre sur les fonctions usuelles.

On désigne par « vrai » intervalle, un intervalle qui contient au moins deux points (et donc une infinité).

1 Dérivabilité en un point

A Dérivabilité et développement limité

Soit f une fonction définie sur un « vrai » intervalle (ou sur une réunion finie de vrais intervalles) I et $a \in I$.

Définition 1.1 *(Dérivée)*

- On dit que f est **dérivable** en a si son taux d'accroissement admet une limite finie en a.
  On appelle **dérivée de f en** a et on note $f'(a)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ cette limite.
  $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
- On dit que f est **dérivable à gauche** en a si son taux d'accroissement admet une limite finie à gauche en a.
  On appelle **dérivée à gauche de f en** a et on note $f'(a^-)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a^-)$ cette limite.
  $$f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
- On définit de même la **dérivée à droite** en a.

Remarque : On pourrait également dire que f est dérivable en a, si son taux d'accroissement est prolongeable par continuité en a. $f'(a)$ est alors la valeur du prolongement.

Exemple *(Fonction sinus cardinal)*
On définit la fonction sinus cardinal par
$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad \text{et} \quad \operatorname{sinc}(0) = 1.$$

- La fonction est continue en 0 (on reconnaît le taux d'accroissement de la fonction sin en 0 qui vaut $\cos 0 = 1$).

Définition 1.2 *(Développement limité à l'ordre 1)*

On dit que f admet un **développement limité à l'ordre 1** en a, s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que
$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + (x-a)\,\varepsilon_a(x).$$
avec ε_a une fonction définie sur I telle que $\lim_{x \to a} \varepsilon_a(x) = 0$.
On note
$$f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + o_{x \to a}(x-a).$$

Définition 1.3 *(Développement limité à gauche ou à droite)*

On dit que f admet un **développement limité à gauche** en a, s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in I$

$$x \leqslant a \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + (x-a)\,\varepsilon_a(x).$$

avec ε_a une fonction de limite nulle en a.
On note

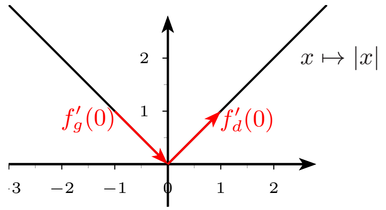
$$f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + o_{x\to a^-}(x-a).$$

On définit de même le développement limité à droite.

Exemple

Soit $f : x \mapsto |x|$. Montrer que f admet une dérivée à gauche de 0 et une dérivée à droite de 0, mais pas de dérivée en 0.

Solution :
Le taux d'accroissement en 0 est $\tau(x) = \frac{|x|}{x}$.
Il est constant égal à 1 pour $x > 0$ et à -1 pour $x < 0$.
Ainsi, f admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite qui valent respectivement -1 et 1.
Ces dérivées étant différentes, nous verrons que f n'est pas dérivable en 0.



Théorème 1.4 *(Dérivabilité et développement limité d'ordre 1)*

- f est dérivable en a si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas et avec les notations précédentes : $f'(a) = \lambda$.
- f est dérivable à gauche de a si et seulement si elle admet un développement limité à gauche de a. Dans ce cas et avec les notations précédentes : $f'(a^-) = \lambda$.
- f est dérivable à droite de a si et seulement si elle admet un développement limité à droite de a. Dans ce cas et avec les notations précédentes : $f'(a^+) = \lambda$.

Preuve

On fait la preuve pour le premier point, les autres sont des cas particuliers.
sens réciproque : on suppose que f admet un développement limité d'ordre 1 en a.
On peut donc écrire $f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + (x-a)\,\varepsilon_a(x)$.
Et pour $x \neq a$, on obtient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lambda + \varepsilon_a(x)$.
Si on fait tendre x vers a, avec $x \neq a$, alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lambda$.
Donc f est dérivable en a et $f'(a) = \lambda$.
Sens direct : on suppose que f est dérivable en a.
Ainsi le taux d'accroissement admet une limite finie : $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
On définit la fonction ε_a : $\begin{cases} x \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \quad \text{si } x \neq a \\ a \mapsto & 0 \end{cases}$
ε_a est alors bien définie sur I et continue en a avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_a(x) = 0 = \varepsilon(a)$ (par définition de la dérivée). Ainsi, $\forall x \neq a$, en multipliant l'expression par $x-a$, on trouve
$f(x) - f(a) - f'(a)\,(x-a) = \varepsilon_a(x)(x-a)$.
C'est-à-dire $f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \varepsilon_a(x)(x-a)$.
Cette expression est aussi vraie en $x = a$.
Ainsi f admet un développement limité d'ordre 1 en a.

■

Explications

Le développement limité à l'ordre 1 est une manière de dire que la dérivée est une approximation de la fonction au voisinage de a (on dit que c'est une approximation à l'ordre 1). Ainsi, la tangente correspond à la « meilleure approximation possible » de la courbe par une droite affine.
D'un point de vue historique, l'idée du développement limité est apparue chez Leibniz : elle trouve son origine dans la physique avec une petite quantité de mouvement :

$$x(t+h) \approx x(t) + v(t)h.$$

Cette notion sera généralisée dans le chapitre sur les développements limités, avec des approximations d'ordre 2, 3 ... Cette notion est essentielle pour la physique. En effet, une grande partie de la physique consiste à savoir trouver les approximations pertinentes pour modéliser un phénomène ou résoudre un problème. Savoir trouver une bonne approximation et connaître son degré de précision est donc fondamental.

Remarque : L'avantage de l'écriture avec le développement limité par rapport au taux d'accroissement est que cela évite d'avoir recours au quotient.
Elle est donc aussi valable en $x = a$ contrairement au taux d'accroissement.

Théorème 1.5

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$.
On suppose que f est dérivable à gauche et à droite de a, alors

$$f \text{ est dérivable en } a \text{ si et seulement si } f'_g(a) = f'_d(a).$$

Dans ce cas, $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Preuve

Si f est dérivable en a, alors la limite à gauche de a et la limite à droite de a sont égale à la limite en a.
Réciproquement, si les deux limites sont égales, alors on peut écrire les développements limités correspondants avec deux fonctions ε_g pour le développement limité à gauche et ε_d pour celui à droite.

Ainsi, il existe une valeur commune $\lambda \in \mathbf{R}$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \leqslant a, & f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + \varepsilon_g(x)\ (x-a) \\ \forall x \geqslant a, & f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + \varepsilon_d(x)\ (x-a) \end{cases}$$

On définit alors la fonction ε par $\varepsilon\ :\ x \mapsto \begin{cases} \varepsilon_g(x) & \text{si } x \leqslant a \\ \varepsilon_d(x) & \text{si } x > a \end{cases}$

Alors, $\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + \varepsilon(x)\ (x-a)$.

Ainsi, f admet un développement limité en a. Elle est donc dérivable en a est de dérivée $f'(a) = \lambda = f'_g(a) = f'_d(a)$.

■

On remarque que ce résultat est « plus fort » que son homologue avec les limites. En effet, dans le chapitre sur les limites, nous avions vu qu'il ne suffisait pas d'avoir une limite à gauche et une limite à droite (fussent-elles égales) pour avoir une limite au point (exemple de la fonction de Dirac).

Ici, la dérivée à gauche et la dérivée à droite sont suffisante pour obtenir la dérivée au point. Cela vient de ce que la notion de dérivée « s'appuie » toujours sur le point considéré alors que les limites à gauche et à droite l'ignorent totalement.

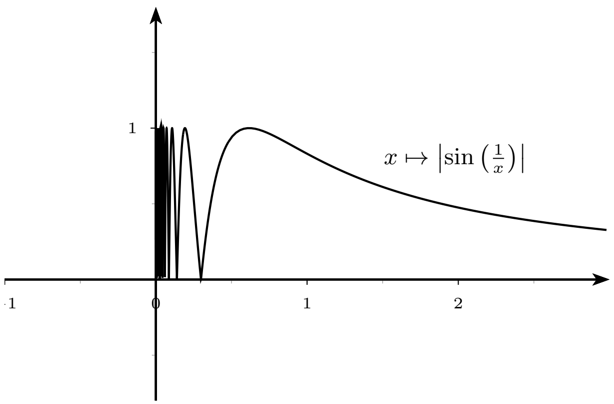
Exemple

Pour montrer que $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0, il suffit de montrer que sa dérivée à gauche et sa dérivée à droite existent et sont différentes.

Exemple

Donner une application définie sur $]0;1]$ admettant en tout point une dérivée à gauche et une dérivée à droite, mais telle qu'en une infinité de points, f ne soit pas dérivable.

Solution :



Définition 1.6 *(Dérivabilité sur un intervalle)*

On dit que f est dérivable sur un intervalle I si la restriction de f à I est dérivable en tout point de I.

On note $\mathscr{D}(I)$, $\mathscr{D}(I,\mathbf{R})$, $\mathscr{D}^1(I)$ ou $\mathscr{D}^1(I,\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.

Remarque : Comme la continuité, la dérivabilité n'est pas une notion globale. C'est une théorie pour les myopes : pour savoir si une courbe est dérivable, il faut la regarder d'infiniment près, point par point. Le nez collé contre la feuille, on suit la courbe point après point sans s'occuper de la forme générale de la courbe : c'est une notion **locale.**

Définition 1.7 *(Équation de la tangente en a)*

Si f est dérivable en a, alors la courbe de f admet une tangente au point $(a,\ f(a))$ d'équation

$$T(x) = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Explications

La tangente est la droite affine qui passe par le point de coordonnées $(a, f(a))$ et de pente, $f'(a)$.

On remarque qu'il existe une situation où la courbe admet une tangente sans que la fonction soit dérivable au point : lorsque la limite du taux d'accroissement est infinie. Auquel cas, la tangente est la droite verticale d'équation $x = f(a)$.

B Méthode de Newton

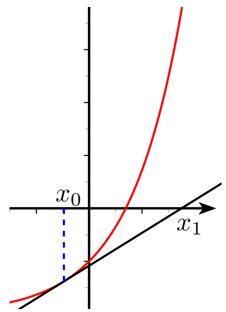
La méthode de Newton utilise la dérivée pour **trouver rapidement le zéro d'une application**. Cette méthode ne marche pas toujours[1], contrairement à la recherche dichotomique.

Elle est particulièrement efficace bien lorsque la fonction est monotone. Par contre si la dérivée s'annule, elle peut poser problème.

Étape 1 : On choisit un point x_0 et on trace la tangente à la courbe au point $(x_0, f(x_0))$.

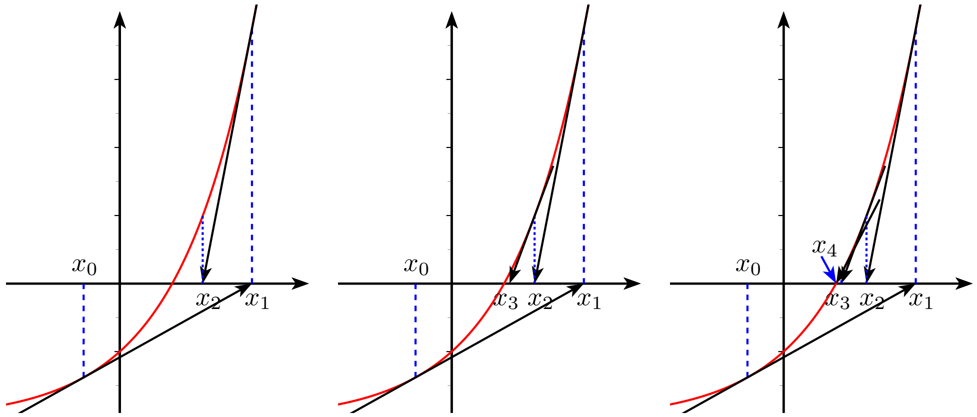
Cette tangente coupe l'axe des abscisses en x_1.

C'est cette condition qui n'est pas remplie lorsque la dérivée s'annule.



Pour les étapes suivantes, on réitère la méthode jusqu'à ce qu'on soit suffisamment proche du point d'annulation.

1. Il nous manque encore des notions avant de pouvoir donner des critères de convergence.



Étape 2 **Étape 3** **Étape 4...**

x_{n+1} s'obtient à partir de x_n lorsque la tangente à la courbe en x_n coupe l'axe des abscisses. La solution est donc

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Cet algorithme peut être implémenté très facilement sous Python par exemple.

Exemple *(Algorithme de Héron d'Alexandrie)*

Appliquer la méthode de Newton pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{a}$.

Solution :

On pose $f(x) = x^2 - a$ et on cherche le zéro de l'application.

$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = 2x,$

On trouve $\forall n \in \mathbf{N}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$

C Dérivabilité et continuité

Théorème 1.8

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
La réciproque est fausse en général.

Ce théorème est très rarement utilisé sous cette forme. En particulier, on ne justifie pas la continuité d'une fonction usuelle par sa dérivabilité (la continuité d'une fonction est beaucoup plus simple à montrer que la dérivabilité).
Par contre, ce théorème peut être utilisé dans certains exercices théoriques sous sa forme contraposée :

« Si f n'est pas continue en a, alors f n'est pas dérivable en a. »

Par exemple, on peut utiliser cet argument pour obtenir une contradiction dans un raisonnement par l'absurde.

Preuve

Écriture avec le développement limité d'ordre 1 : si f est dérivable en a, alors on a $f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \varepsilon_a(x)(x-a)$.
Or la limite en a de la partie droite est nulle. Donc f est continue en a. ■

Exemple

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0, mais pas dérivable en 0.

Théorème 1.9

Si f est dérivable à gauche de a, alors elle est continue à gauche.
Si f est dérivable à droite de a, alors elle est continue à droite.
Finalement, si f dérivable à la fois à gauche et à droite de a, alors f est continue en a.

Preuve

Immédiat avec les développements limités. ■

⚠ Le théorème ne suppose pas que la fonction est dérivable en a. Ainsi, la fonction est continue même si les dérivées à gauche et à droite sont différentes.

Exemple

$x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0, donc elle est continue en 0 (mais elle n'est pas dérivable en 0 car ses dérivées à gauche et à droite sont différentes).

Exemple *(Classique)*

Pour $n \in \mathbf{N}$, étude des fonctions $f_n : x \mapsto x^n \sin\frac{1}{x}$ au voisinage de 0.

Solution :

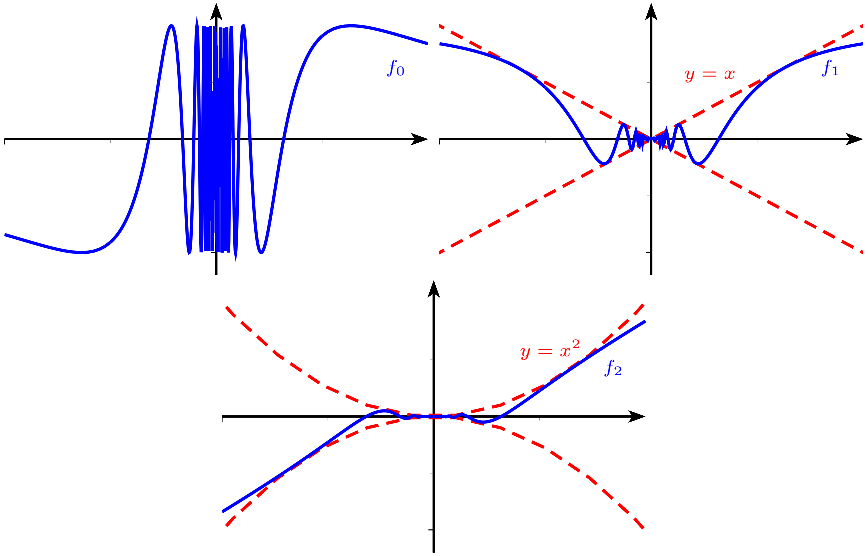
• Pour $n = 0$, f_0 n'admet pas de limite en 0. Comme démontré aux chapitre sur les limites, il suffit de prendre deux suites u et v qui tendent vers 0 et telles que $(f_0(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(f_0(v_n))_{n\in\mathbf{N}}$ tendent vers des limites différentes.
Par exemple $u_n = \frac{1}{(n+1)\pi}$ et $v_n = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\frac{1}{2}+2(n+1)}$ conviennent.

• Pour $n = 1$, f_1 tend vers 0 en 0. En effet $\forall x \neq 0$, $0 \leqslant \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|$ (car la fonction $|\sin|$ est majorée par 1). Donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 0$.
f_1 est prolongeable par continuité en 0 par $f_1(0) = 0$.
Le taux d'accroissement de la fonction prolongée en 0 est $\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \sin\frac{1}{x} = f_0(x)$.
On a vu que cette fonction n'admettait aucune limite en 0.
Donc f_1 (prolongée) n'est pas dérivable en 0.
Remarque : aucun autre prolongement ne peut donner la dérivabilité en 0, car si la fonction était dérivable, alors elle serait continue. Et on aurait donc nécessairement $f_1(0) = 0$.

• Pour $n = 2$, f_2 tend vers 0 en 0.
En effet $\forall x \neq 0$, $0 \leqslant \left|x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant x^2$ Donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 0$.
f_2 est donc prolongeable par continuité en 0 par $f_2(0) = 0$.
Le taux d'accroissement de la fonction prolongée en 0 est $\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = x\sin\frac{1}{x} = f_1(x)$.
D'après l'étude précédente, f_2 est prolongeable par continuité en 0 avec $f_1(0) = 0$.
Donc f_2 est dérivable en 0 de dérivée $f_2'(0) = 0$.

• Pour $n \geqslant 3$, on encadre de même $0 \leqslant f_n(x) \leqslant |x^n|$.

Donc f_n est prolongeable par continuité en 0 avec $f_n(0) = 0$.
Le taux d'accroissement en 0 de la fonction dérivée donne $f_{n-1}(x)$ qui est prolongeable par continuité en 0 (car $n-1 \geqslant 2$). Donc f_n est dérivable en 0 de dérivée $f'_{n-1}(0) = 0$.
Visuellement : la multiplication par les puissances de x « écrase » la courbe en 0 et la régularise.



Les repères ne sont pas orthonormés.

D Opérations sur les dérivées

Propriété 1.10

Soient f est g deux fonctions définies sur I, et $a \in I$.
Si f et g sont dérivables en a, alors

1. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2, \quad \lambda f + \mu g$ est dérivable en a et
$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$
$(\mathscr{D}(I, \mathbf{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
2. fg est dérivable en a et
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
3. si de plus, $g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}.$$
4. si de plus, $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Preuve

1. On fait simplement la combinaison linéaire des développements limités à l'ordre 1 de f et de g : il existe deux fonctions ε_1 et ε_2 définies sur I et de limite nulle en a telles que
$$\begin{cases} \forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)(x-a) \\ \forall x \in I, \quad g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \varepsilon_2(x)(x-a) \end{cases}.$$
Alors, $\forall x \in I$,
$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$
$= \lambda \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)(x-a)\right) + \mu \left(g(a) + g'(a)(x-a) + \varepsilon_2(x)(x-a)\right)$
$= \lambda f(a) + \mu g(a) + \left(\lambda f'(a) + \mu g'(a)\right)(x-a) + \left(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)\right)(x-a)$.
Avec $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ qui est une fonction définie sur I et de limite nulle en a (par somme de limites). Donc $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité à l'ordre 1 en a.
Ainsi $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.

2. On fait le produit des deux développements limités à l'ordre 1 ce qui donne un développement limité du produit. Avec les notations précédentes : $\forall x \in I$,

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= f(x)g(x)\\ &= \left(f(a)+f'(a)(x-a)+\varepsilon_1(x)(x-a)\right)\times\left(g(a)+g'(a)(x-a)+\varepsilon_2(x)(x-a)\right)\\ &= f(a)g(a)+\left(f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\right)(x-a)\\ &\quad+\left(\varepsilon_1(x)g(a)+\varepsilon_1(x)g'(a)+\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)(x-a)+\varepsilon_2(x)f(a)+\varepsilon_2(x)f'(a)\right)(x-a).\end{aligned}$$

Or, ce qui est dans la dernière parenthèse est une fonction qui tend vers 0 (par produit et somme). L'expression donne donc un développement limité à l'ordre 1 du produit, ce qui justifie la dérivabilité. Ainsi $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

3. On écrit le taux de variation (ici c'est plus simple qu'avec les développements limités) : On sait que g est continue en a (car dérivable en a) et $g(a) \neq 0$. Donc il existe un voisinage de a sur lequel g ne s'annule pas.
   Sur ce voisinage :
   $$\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{g(a)-g(x)}{g(a)g(x)(x-a)} = -\frac{1}{g(x)g(a)}\,\frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$
   Or $\lim\limits_{x\to a} -\frac{1}{g(x)g(a)} = -\frac{1}{(g(a))^2}$. Et l'autre quotient tend vers la dérivée de g en a.
   Donc $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$.
4. C'est simplement les deux points précédents mis ensemble.

■

Théorème 1.11 *(Dérivée d'une composée)*

Soient I, J deux « vrais » intervalles de $\mathbf{R}$ et $a \in I$
Soit u une fonction définie sur I et à valeurs dans J, et f une fonction définie sur J.
On suppose u dérivable en a et f dérivable en $u(a)$.
Alors $f \circ u$ est dérivable en a et
$$(f\circ u)'(a) = u'(a)f'(u(a)).$$

Preuve

f est dérivable en $u(a)$, donc admet un développement limité à l'ordre 1 en $u(a)$
$$f(u(x)) = f(u(a)) + f'(u(a))(u(x)-u(a)) + \varepsilon(u(x))(u(x)-u(a)).$$
Or u est dérivable en a, donc admet un développement limité à l'ordre 1 en a et
$$u(x) = u(a) + u'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)(x-a).$$
On remplace dans le développement limité de f
$$\begin{aligned}f(u(x)) = f(u(a)) + u'(a)f'(u(a))(x-a) &+ f'(u(a))\varepsilon_1(x)(x-a)\\ &+ \varepsilon(u(x))(u'(a)+\varepsilon_1(x))(x-a).\end{aligned}$$
Or $f'(u(a))\varepsilon_1(x)(x-a) + \varepsilon(u(x))(u'(a)+\varepsilon_1(x))(x-a)$ tend vers 0 quand x tend vers a (par composées, produits et somme).
$f\circ u$ admet un développement limité à l'ordre 1 en a, et $f\circ u$ est donc dérivable en a. Sa dérivée est $(f\circ u)'(a) = u'(a)f'(u(a))$. ■

Théorème 1.12

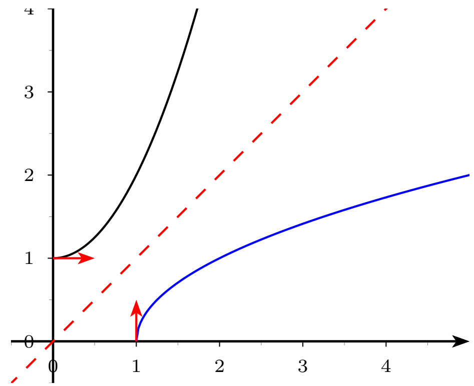
Si f est une bijection **continue** de I sur $J = f(I)$, dérivable en $a \in I$, alors f^{-1} est dérivable en $y = f(a) \in J$ si et seulement si f' ne s'annule pas en $f^{-1}(y) = a$, et dans ce cas
$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Preuve

Pour $z \in J\setminus\{y\}$, si on note $x = f^{-1}(z)$, alors on peut écrire :
$$\frac{z-y}{f^{-1}(z)-f^{-1}(y)} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$
($f^{-1}(z) \neq f^{-1}(y)$ par bijectivité de f^{-1})
Et par continuité de f^{-1} (cf chapitre sur la continuité), on trouve
$$\lim_{z\to y}\frac{z-y}{f^{-1}(z)-f^{-1}(y)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$
Donc par passage à l'inverse, f^{-1} est dérivable en y si et seulement si $f'(a)\neq 0$ et dans ce cas,
$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \lim_{z\to y}\frac{f^{-1}(z)-f^{-1}(y)}{z-y} = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$
■

Explications

La courbe de la réciproque est la symétrique de la courbe de la fonction par rapport à la première bissectrice $y = x$. Cela revient à échanger les rôles de x et y.
Si $f'(x) = 0$, alors la tangente est horizontale. Lorsque l'on effectue la symétrie, cela donne une tangente verticale, c'est-à-dire une pente infinie. On comprend donc la condition $f'(x) \neq 0$.



Remarque : On peut très facilement retrouver la formule précédente (ce n'est pas une preuve de la dérivabilité de f^{-1} en y), en dérivant $f\circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ comme une composée.

2 Théorème de Rolle et applications

A Théorème de Rolle

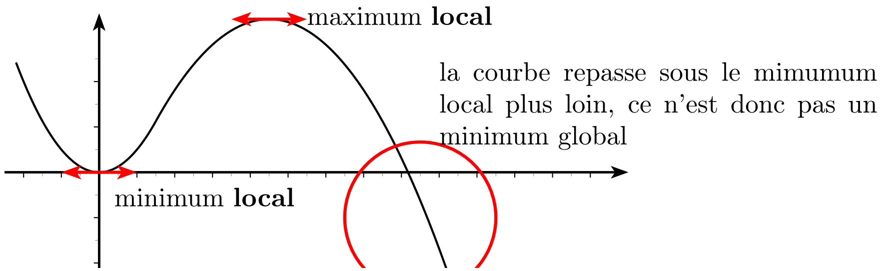
Théorème 2.1

Soit f définie sur I et dérivable en $a \in I$ **qui n'est pas une borne** de I.
Si f admet un extremum **local** en a, alors $f'(a) = 0$.

Méthode *(Trouver les extremums locaux)*

Pour trouver les extremums d'une fonction dérivable, on peut commencer par chercher ses points critiques (où la dérivée s'annule) puis chercher ceux parmi lesquels f est extrémal.

Remarque : L'extremum est *local*, cela veut dire que ce n'est un extremum qu'à proximité du point. Par contre, si on s'éloigne un peu trop, la courbe peut tout à fait dépasser cette valeur. Rappelez-vous que la notion de dérivée est une notion *locale*.

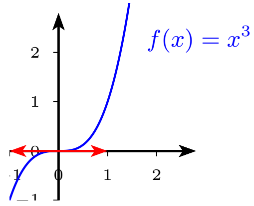


Preuve

Par exemple, si $f(a)$ est un maximum. On note τ le taux d'accroissement de f en a.
Par dérivabilité de f en a, τ admet une limite finie en a qui est $f'(a)$.
Comme a n'est pas une borne de l'intervalle, alors $f'(a)$ est à la fois la limite à gauche et la limite à droite.
Or pour $x \neq a$, $f(x) \leqslant f(a)$. Donc si $x < a$, par quotient de deux expressions négatives, on trouve : $\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$.
Et par passage de l'inégalité à la limite, $f'(a) \geqslant 0$.
De même, pour $x > a$, on trouve $\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$.
Et par passage à la limite, $f'(a) \leqslant 0$. Ainsi $f'(a)$ est à la fois positif et négatif, donc $f'(a) = 0$. ■

Exemple

⚠ La réciproque est fausse. Un point peut être critique sans correspondre à un extremum.
Donner un contre exemple.
Solution :



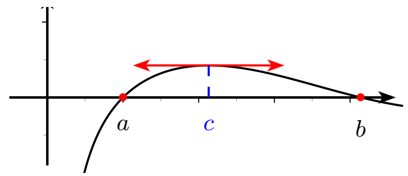
Théorème 2.2 *(Théorème de Rolle)*

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$.
Si f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque : c est dans l'intervalle **ouvert** $]a, b[$.

Preuve

Si f est constante sur $[a, b]$, alors n'importe quel point entre a et b convient.
Si f n'est pas constante, alors il existe x_0 tel que $f(x_0) > f(a)$ par exemple.
f est continue, donc d'après le théorème des bornes atteintes, $f([a, b])$ est un segment et on peut écrire $f([a, b]) = [m, M]$ avec $m < M$.
Comme $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M \geqslant f(x_0)$ (la dernière inégalité permet de vérifier que $c \neq a$ et $c \neq b$). Donc d'après le théorème précédent, $f'(c) = 0$.



■

B Accroissements finis

Théorème 2.3 *(Théorème des accroissements finis)*

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$.
Si f définie et continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$,
alors $\exists c \in]a, b[$ tel que

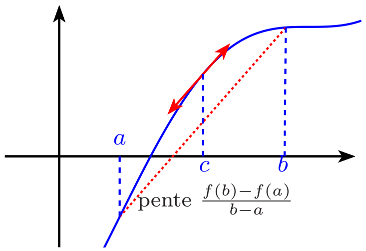
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

C'est une généralisation du théorème de Rolle pour $f(a) \neq f(b)$.

Preuve

Idée : La preuve utilise le théorème de Rolle. L'idée est de « redresser » f pour lui appliquer le théorème. Ceci s'obtient en soustrayant à f, la corde qui relie ses extrémités.
L'équation de la « corde » qui relie $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$ est

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$



On pose la fonction h définie sur $[a, b]$ par $h = f - g$.
h vérifie donc les hypothèses du théorème de Rolle, ainsi $\exists c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.
Donc $f'(c) = g'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Autre preuve :
On « libère » b : $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x - a)$.
On a $\varphi(a) = 0$, et on choisit λ tel que $\varphi(b) = 0$.
D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$, tel que $\varphi'(c) = 0$.
C'est-à-dire $\lambda = f'(c)$ (en dérivant φ). ∎

Explications

Cet énoncé n'est pas utilisable pour trouver la valeur de c et démontrer une égalité sur un exemple concret. En effet, on sait que c existe, et le théorème donne une idée de sa localisation. Mais la valeur exacte de c nous est inconnue.
C'est la raison pour laquelle, on peut, sous certaines conditions, s'affranchir de la valeur exacte de c et trouver une expression plus exploitable. C'est l'objet de l'inégalité des accroissements finis qui suit.

Théorème 2.4 *(Inégalité des accroissements finis)*

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$.
Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, on suppose

- f continue sur $[a, b]$,
- f dérivable sur $]a, b[$,
- $\exists m \leqslant M$ tels que $\forall x \in]a, b[$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$.

Alors, $\forall (x, y) \in ([a, b])^2$, tels que $x \leqslant y$,

$$m(y - x) \leqslant f(y) - f(x) \leqslant M(y - x).$$

En particulier $m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$.

On possède une autre formulation, plus simple et souvent largement suffisante dans laquelle on ne s'intéresse qu'à la pente maximale (en valeur absolue).
On ne fait plus la distinction entre la pente m de décroissance maximale et la pente M de croissance maximale pour ne considérer que la variation maximale, tous sens confondus.

Théorème 2.5 *(Inégalité des accroissements finis – bis)*

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$.
Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, on suppose

- f continue sur $[a, b]$,
- f dérivable sur $]a, b[$,
- $\exists k \geqslant 0$, tel que $\forall x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leqslant k$.

Alors, $\forall (x, y) \in ([a, b])^2$,

$$|f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|.$$

Preuve

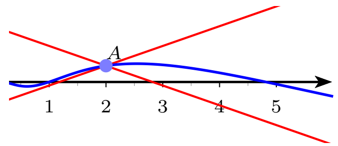
On utilise la formulation précédente avec $m = -k$ et $M = k$. ∎

Exemple

Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.
Solution :
sin est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$, $|\sin'(x)| = |\cos(x)| \leqslant 1$ donc par application de l'inégalité des accroissements finis $\forall x \in \mathbf{R}$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

Explications

L'intérêt de l'inégalité des accroissements finis par rapport à l'égalité est que le majorant ne dépend plus de x ni de y.
Géométriquement, cette inégalité s'interprète comme un contrôle des variations de la fonction entre deux droites. C'est ce que l'on appelle une fonction *lipschitzienne*.
Contrairement à celle de l'exponentielle sur $\mathbf{R}$, les variations d'une fonction lipschitzienne sont bornées : elle « n'explose pas ».
Ainsi, lorsqu'on connait la valeur de la fonction à un instant t, on sait qu'à l'instant $t + h$ cette fonction n'a pas varié de plus que $\widetilde{M}h$.
Un processus physique qui est lipschitzien est très appréciable : si on sait que l'on est suffisamment loin de la zone de danger, on peut estimer un temps minimal que mettrait le processus pour l'atteindre. Cela nous donne du temps pour réagir. C'est le contraire d'une explosion ou d'une réaction en chaîne où le système s'emballe et diverge de plus en plus rapidement : les variations sont alors fortes et imprévisibles.



Géométriquement : à partir du point A, la courbe reste confinée entre les deux droites de pente $\widetilde{M}$ et $-\widetilde{M}$

Définition 2.6 *(Fonction lipschitzienne)*

Pour $K \geqslant 0$, et f définie sur I.
f est dite K-lipschitzienne sur I si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(y) - f(x)| \leqslant K|y-x|.$$

Exemple

Montrer que si f est de classe $\mathscr{C}^1([a,b],\mathbf{R})$, alors f est lipschitzienne sur $[a,b]$.

Solution :

Si f est de classe $\mathscr{C}^1([a,b])$, alors f est dérivable sur le segment et sa fonction dérivée et continue sur ce segment.
D'après le théorème des bornes atteintes, f' est bornée sur $[a,b]$.
On note α un majorant de $|f'|$ sur $[a,b]$.
Pour $(x,y) \in [a,b]^2$, avec $x \leqslant y$ par exemple.
$[x,y] \subset [a,b]$, donc f est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$.
D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$.
Ainsi $|f(y) - f(x)| = |f'(c)(y-x)| = |f'(c)|\ |y-x| \leqslant \alpha\,|y-x|$.
Et par symétrie des rôles entre x et y l'inégalité est aussi vraie pour $x > y$.
(On remarque que α ne dépend ni de x, ni de y).
Donc f est lipschitzienne sur $[a,b]$.

Propriété 2.7

Si f est dérivable sur I et si $|f'|$ est majorée sur I par K, alors f est $K-$ lipschitzienne sur I.

Preuve

Comme dans l'exemple précédent à partir de l'inégalité des accroissements finis. ■

Exemple

1. Montrer qu'une fonction lipschitzienne est continue.
2. Montrer qu'une application lipschitzienne n'est pas nécessairement dérivable.

Solution :

1. Si f est $K-$lipschitzienne sur I et $a \in I$.
$$\forall x \in I,\ |f(x) - f(a)| \leqslant K\,|x-a|\,.$$
Or, $\lim\limits_{x \to a} K\,|x-a| = 0$, donc par encadrement $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, donc f est continue en a, donc f est continue sur I.
2. Contre-exemple : $f\ : x \mapsto |x|$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbf{R}$, mais pas dérivable en 0.

L'inégalité des accroissements finis sera très utile pour prouver des convergences de suites récurrentes $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ comme nous le verrons plus loin.

C Dérivée et variations

Théorème 2.8

Soit f dérivable sur un intervalle I, alors

- f croissante sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ sur I.
- f décroissante sur I si et seulement si $f' \leqslant 0$ sur I.
- f constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.

⚠ C'est faux si I n'est pas un intervalle. Par exemple $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de dérivée négative sur $\mathbf{R}^*$ mais n'est pas décroissante sur $\mathbf{R}^*$.

Preuve

Si f croissante alors $f' \geqslant 0$ sur I simplement d'après l'expression du taux de variation et le passage des inégalités aux limites.
Réciproquement, si $f' \geqslant 0$ sur I, alors pour tous $x_1 < x_2 \in I^2$, le théorème des accroissements finis donne l'existence de $c \in]x_1, x_2[$, tel que
$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$. Cette quantité est positive par hypothèse.
Donc $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ donc f croissante. On fait de même dans les deux autres cas. ■

Propriété 2.9

Si f est dérivable sur $]a,b[$,

- Si $f' \geqslant 0$ sur $]a,b[$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante sur $]a,b[$.
- Si $f' \leqslant 0$ sur $]a,b[$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante sur $]a,b[$.

Preuve

Pour le cas croissant (l'autre s'en déduit en prenant $-f$).
On suppose que $f'(x) > 0$ sur $]a,b[$ sauf en un nombre fini de points où elle est nulle.
Ainsi, d'après le théorème 2.8, la fonction est croissante (au sens large) sur $]a,b[$.
Soit $x \leqslant y$ deux points de $]a,b[$.
Il existe au plus un nombre fini de points où f' s'annule entre x et y. Nommons alors $x_1 < y_1$ deux points consécutifs parmi ceux-ci.
(s'il n'y en a pas, on prend $x_1 = x$ et $y_1 = y$, et s'il n'y en a qu'un seul, on le choisit par exemple pour x_1 et on prend $y_1 = y$).
Alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x_1, y_1[$ tel que $f(y_1) - f(x_1) = f'(c)(y_1 - x_1)$.
Or, d'après le choix de x_1 et y_1, $f'(c) \neq 0$: il n'y pas pas d'annulation de la dérivée dans $]x_1, y_1[$.
Donc $f(y_1) > f(x_1)$, et par croissance de f, $f(x) \leqslant f(x_1) < f(y_1) \leqslant f(y)$.
Donc $f(x) < f(y)$. Ainsi, f est strictement croissante. ■

Exemple

$x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ (même si $f'(0) = 0$).

La propriété précédente ne donne qu'une condition suffisante de stricte monotonie, en général, il n'en faut pas plus pour les exercices concrets.
On peut cependant aller plus loin et obtenir une caractérisation avec le théorème qui suit :

Théorème 2.10

Soit f dérivable sur I,
f est strictement croissante sur I, si et seulement si

1. $f' \geqslant 0$ sur I,
2. $\{x \in I, f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle ouvert de la forme $]a, b[$ avec $a < b$.

On a une propriété équivalente pour les fonctions strictement décroissantes.

Preuve

(sens direct) f croissante donc $f' \geqslant 0$.
On montre ensuite par contraposée le deuxième point.
(sens réciproque) f est croissante d'après le premier point. Si elle n'était pas strictement croissante, il existerait $a < b$ telle que $f(a) = f(b)$, donc f constante sur $[a, b]$, donc de dérivée nulle sur $]a, b[$. Absurde. ∎

Explications

La propriété 2.9 est un cas particulier du théorème.
En effet, si la dérivée ne s'annule qu'en un nombre fini de points, ceux-ci ne peuvent contenir d'intervalle ouvert non vide.
Par contre, la réciproque est fausse, car le théorème admet que la fonction s'annule une infinité de fois.
Le fait que la fonction puisse s'annuler en des points isolés permet l'existence de tangentes horizontales, tout en interdisant les « plateaux ».

D Prolongement des fonctions dérivables

Théorème 2.11 *(Limite de la dérivée)*

Soit f définie sur I et $a \in I$
On suppose

- f continue sur I,
- f dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

1. Si f' admet un limite finie ℓ en a alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
2. Si f' admet une limite infinie en a, alors f n'est pas dérivable en a, mais le taux d'accroissement tend vers cette limite (tangente verticale).
3. Si f' n'admet pas de limite en a, alors on ne peut pas conclure a priori.

Exemple

Un exemple pour chacun des points du théorème précédent :

1. $x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0
2. $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0
3. $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0.
   Les deux sont dérivables hors de 0 et leurs dérivées n'admettent pas de limite en 0. Cependant, la première est dérivable en 0, alors que la seconde ne l'est pas.

Preuve

Premier point : L'idée est de montrer que le taux de variation tend vers ℓ en utilisant le théorème des accroissements finis.
Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists \eta > 0$, tel que $\forall x \in I \setminus \{a\}, \quad |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f'(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$
Or f est continue sur $[a, x]$ et dérivable sur $]a, x[$ (en échangeant éventuellement x et a), donc d'après le théorème des accroissements finis, $\exists c_x \in]a; x[$ tel que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$.
Donc $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.
Le deuxième point se montre de la même manière. ∎

⚠ La continuité en a est nécessaire.
Par exemple, pour la fonction de Dirac en 0, la fonction est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et sa dérivée admet une limite nulle en 0.
Cependant cette fonction n'est pas dérivable en 0 (elle n'est même pas continue).

Explications

Le premier point du théorème demande des hypothèses trop fortes pour obtenir la seule dérivabilité en a (comme le montre le troisième point).
Mais il donne également un résultat en sus : dans le cas de la limite finie, non seulement la fonction est dérivable au point, mais sa dérivée y est également continue :

on voit alors que ce théorème donne une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction soit de classe $\mathscr{C}^1$ en a.
Par conséquent, si on ajoute aux hypothèses le caractère $\mathscr{C}^1$ sur I privé de a, alors, on obtient en conclusion que la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (avec une équivalence).
On pourrait alors reformuler ce théorème, sous le nom de « théorème de prolongement des applications de classe $\mathscr{C}^1$ ».

3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

A Définition

Définition 3.1 *(Dérivée k-ième)*

Soit f définie sur un « vrai » intervalle I (ou une réunion finie de vrais intervalles). Soient $a \in I$ et $k \in \mathbf{N}^*$.
f admet une **dérivée k-ième** en a, si f est dérivable $(k-1)$ fois sur un voisinage de a, et que la dérivée $(k-1)$-ième est elle-même dérivable en a.
On note $f^{(k)}(a)$ cette dérivée, et on pose $f^{(0)} = f$.

⚠ Il faut que f soit dérivable $k-1$ fois sur *un voisinage* de a. En effet, pour définir la dérivée k-ième, on utilise le taux d'accroissement de la dérivée $(k-1)$-ième. Cela suppose que cette dérivée ne soit pas seulement définie en a, mais sur un voisinage de a.

Définition 3.2

On dit que f est **dérivable k fois** sur I si f admet une dérivée k-ième en tout point de I.
On note $\mathscr{D}^k(I)$ ou $\mathscr{D}^k(I, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables k fois sur I.

Définition 3.3 *(Fonction de classe $\mathscr{C}^k$)*

Avec les hypothèses précédentes, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ en a, si f admet une dérivée k-ième sur un voisinage de a et si $f^{(k)}$ est continue en a.

Définition 3.4

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, si f est de classe $\mathscr{C}^k$ en tout point de I.
On note $\mathscr{C}^k(I)$ ou $\mathscr{C}^k(I, \mathbf{R})$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Propriété 3.5

Si $f \in \mathscr{C}^k(I, \mathbf{R})$, alors pour tout $p \leqslant k$, $f \in \mathscr{C}^p(I, \mathbf{R})$.

Preuve

Trivial. ■

Définition 3.6

f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en $a \in I$, si f est de classe $\mathscr{C}^k$ en a pour tout $k \in \mathbf{N}$.
f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I pour tout $k \in \mathbf{N}$.
On note $\mathscr{C}^\infty(I)$ ou $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbf{R})$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Vocabulaire : Dans un exercice, lorsque l'on demande la *régularité* d'une fonction sur un intervalle, on demande sa classe (avec le plus grand exposant possible).

B Opérations sur les fonctions

Théorème 3.7 *(Structure d'espace vectoriel.)*

1. Si f et g admettent une dérivée k-ième en a, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $f+g$ et λf admettent une dérivée k-ième en a, et
$$(f+g)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) + g^{(k)}(a) \qquad \text{et} \qquad (\lambda f)^{(k)}(a) = \lambda f^{(k)}(a)$$
2. Si $(f, g) \in \mathscr{C}^k(I, \mathbf{R})$, et $\lambda \in \mathbf{R}$ alors $f+g \in \mathscr{C}^k(I, \mathbf{R})$ et $\lambda f \in \mathscr{C}^k(I, \mathbf{R})$.

$\mathscr{C}^k(I, \mathbf{R})$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

Preuve

Par récurrence. ■

Théorème 3.8 *(Formule de Leibniz)*

1. Si f et g admettent une dérivée k-ième en a, alors fg admet une dérivée k-ième en a, et
$$(fg)^{(k)}(a) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)}(a) g^{(k-i)}(a).$$
2. Si $(f, g) \in \mathscr{C}^k(I, \mathbf{R})$ alors $fg \in \mathscr{C}^k(I, \mathbf{R})$.

On dit que $\mathscr{C}^k(I, \mathbf{R})$ est une $\mathbf{R}-$algèbre.

Preuve

Par récurrence, exactement comme celle du binôme de Newton ou la formule de Leibniz vus pour les polynômes. ■

Théorème 3.9

1. Si f et g admettent une dérivée k-ième en a et si g ne s'annule pas en a, alors $\dfrac{f}{g}$ admet une dérivée k-ième en a.
2. Si $(f, g) \in \mathscr{C}^k(I, \mathbf{R})$ et g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}^k(I, \mathbf{R})$.

Preuve

Par récurrence. ■

Théorème 3.10 *(Régularité des fonctions usuelles)*

1. Tout application polynomiale est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.
2. Tout application rationnelle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition.
3. ln est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
4. exp est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.
5. sin, cos sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.
6. tan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

Preuve

Avec les théorèmes précédents. ■

En particulier, ce théorème donne la continuité des fonctions considérées (qui n'est pas vu comme une conséquence de leur dérivabilité).

Théorème 3.11 *(Régularité d'une composée)*

- Si u est définie sur I à valeurs dans J et admet une dérivée k-ième en $a \in I$ (avec I et J de « vrais » intervalles),
- et si f est définie sur J et admet une dérivée k-ième en $u(a)$,

alors $f \circ u$ admet une dérivée k-ième en a.

Si $u \in \mathscr{C}^k(I,J)$ et $f \in \mathscr{C}^k(J,\mathbf{R})$, alors $f \circ u \in \mathscr{C}^k(I,\mathbf{R})$.

⚠ L'image de u doit être incluse dans de domaine de définition de f.

Preuve

Non exigible. Par récurrence. ■

Théorème 3.12 *(Régularité de la réciproque)*

Soit $k \geqslant 1$,

- Si f réalise une bijection de I dans J,
- et si $f \in \mathscr{C}^k(I,J)$,
- et si la dérivée de f ne s'annule pas sur I,

alors $f^{-1} \in \mathscr{C}^k(J,I)$.

Preuve

Non exigible. Par récurrence en utilisant la régularité de la composée. ■

Exemple *(Difféomorphisme)*

Si f est un homéomorphisme de I sur $J = f(I)$ (application continue bijective), et si f de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,
alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.
On dit alors que f est un $\mathscr{C}^k$-**difféomorphisme**.
Les difféomorphismes sont des cas particuliers d'homéomorphismes, encore plus réguliers. Ainsi, ils sont non seulement continus mais peuvent être également dérivés. Avec l'image de l'élastique du chapitre précédent, il faut imaginer qu'un difféomorphisme déforme un élastique sans le déchirer ou sans coller (homéomorphisme), mais également qu'il ne le plie pas.
Lorsque l'on regarde dans l'espace, une boule et un cube sont homéomorphes, mais ne sont pas difféomorphes car il faut des pliures pour passer de l'un à l'autre. En revanche, une demi-sphère est difféomorphe à un disque.

C Prolongement $\mathscr{C}^k$

Théorème 3.13

Soit f définie sur un intervalle I, $a \in I$ et f de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$.
Si, pour tout $i \in [\![0,k]\!]$, $f^{(i)}$ admet une limite finie en a, alors f admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Preuve

Par récurrence. ■

4 Extension aux fonctions complexes

Théorème 4.1

Soit f définie sur I à valeurs dans $\mathbf{C}$. Et soit $a \in I$.
f est dérivable en a si, et seulement si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont dérivables en a.
Dans ce cas, $f'(a) = (\mathfrak{Re}\ f)'(a) + i(\mathfrak{Im}\ f)'(a)$.

Preuve

Voir la preuve d'une limite d'une fonction complexe. ■

Théorème 4.2 *(Inégalité des accroissements finis)*

Soit $f \in \mathscr{D}(I,\mathbf{C})$. Si $|f'|$ majorée par $M \in \mathbf{R}$ sur I, alors f est $M-$lipschitzienne sur I.

Preuve

Pour $(x,y) \in I^2$, il existe $(r,\theta) \in \mathbf{R}^2$ tel que $f(x) - f(y) = re^{i\theta}$.

On étudie la fonction $\varphi = \mathfrak{Re}\left(e^{-i\theta} f\right)$ à valeurs réelles.
φ vérifie les hypothèses de l'inégalité des accroissements finis (réelle) :
$|\varphi'| = \left|\mathfrak{Re}\left(e^{-i\theta} f'\right)\right| \leqslant \left|e^{-i\theta} f'\right| \leqslant |f'| \leqslant M$.
Donc $|f(x) - f(y)| = \left|\mathfrak{Re}\left(e^{-i\theta}\left(f(x) - f(y)\right)\right)\right| = |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant M|x - y|$. ∎

⚠ L'égalité des accroissements finis n'est **pas** valable sur $\mathbf{C}$.
Par exemple $f : t \to \mathrm{e}^{it}$ sur $[0; 2\pi]$.

Théorème 4.3

Soit $f \in \mathscr{D}(I, \mathbf{C})$,
f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

⚠ Les notions de croissance ou de décroissance de la fonction n'ont pas de sens dans $\mathbf{C}$.