Déterminants

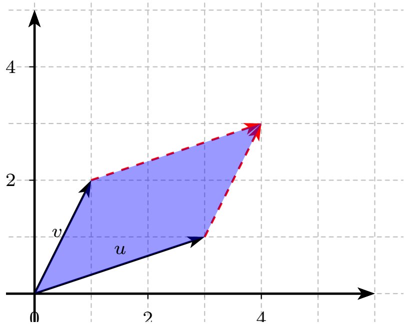
Le déterminant est une façon de généraliser la notion de longueur, d'aire ou de volume qui existent naturellement sur $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$ et de l'appliquer à tous les espaces vectoriels de dimension finie.
Comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois cette année, nous partons d'une notion intuitive (aire d'une figure) pour construire des outils mathématiques rigoureux qui rendent compte de cette intuition.
Le prix à payer est la manipulation d'objets abstraits, mais en récompense, on arrive à des résultats beaucoup plus généraux.

Notation : $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1 Motivation

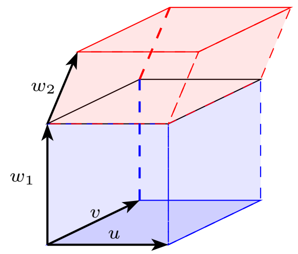
Comme cela a été énoncé plus haut, on s'intéresse à la généralisation des calculs d'aires et de volumes orientés en dimension finie n.
Nous allons donc chercher à déterminer les propriétés essentielles qui permettent de caractériser les aires et les utiliser ensuite comme définition.

- **Quelles surfaces calculer ?**
  On cherche à calculer des aires dans le cadre d'espaces vectoriels.
  La notion d'aire s'appuie donc naturellement sur le choix d'une famille de vecteurs qui délimite une surface dans l'espace vectoriel E.
  En dimension 2, par exemple, le choix de deux vecteurs forme un parallélogramme[1]. En dimension supérieure, cela représente alors un parallélépipède.



  On souhaite que l'aire soit un nombre réel. La fonction sera donc une application $f\ : E^n \to \mathbf{R}$.

- **Additivité des aires.**
  Les aires s'ajoutent entre elles.



  Cette contrainte impose que l'aire soit une application linéaire par rapport à chacune de ses coordonnées. Si on multiplie un côté de la figure par λ, alors toute la surface est multipliée par λ.
  Il en est de même si on additionne deux vecteurs colonne w_1 et w_2.
  On dira que l'application f est n**-linéaire.**

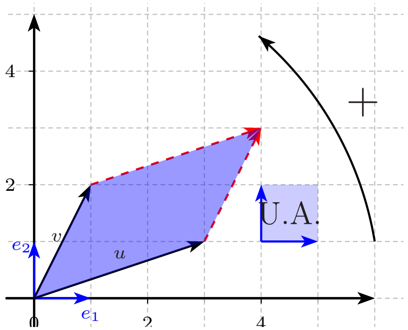
1. On pourrait prendre le triangle, mais cela revient à changer l'aire d'un simple facteur multiplicatif, c'est-à-dire à changer d'unité d'aire comme cela est vu un peu plus loin.

- **Aire algébrique, ou orientée.**
  On souhaite également avoir une aire orientée : positive dans un sens et négative dans l'autre.
  En dimension 2, si on échange l'ordre entre les deux vecteurs, alors l'aire est changée en son opposée. On garde ce principe de retournement en dimension supérieure.
  L'application sera dite **antisymétrique.**

- **Surface aplatie.**
  Pour une surface « aplatie », on veut que l'aire soit nulle.
  En dimension 2, lorsque les deux vecteurs sont colinéaires, l'aire délimitée est nulle. De par le caractère n-linéaire (additivité), il suffira de l'imposer pour le cas des vecteurs égaux.
  On le généralise en dimension supérieure, avec une aire nulle lorsque deux vecteurs sont égaux.
  L'application sera dite **alternée.**

- **Unité d'aire.**
  Enfin, pour calculer une surface, il convient d'avoir au préalable un « mètre étalon », qui définisse une surface unitaire. Cela revient à choisir une unité de mesure. Ainsi, une surface n'aura pas la même valeur numérique selon que l'on mesure en pieds, en centimètres, en mètres...
  De plus, comme on souhaite une surface orientée, il faut définir une orientation de référence qui donne le signe positif.
  On voit que ces deux éléments sont définis par une base de l'espace.
  Notre fonction de surface sera donc définie de telle sorte que la surface déterminée par la base donne 1.
  Tout autre choix de surface lui sera proportionnel.
  En dimension 2, on a par exemple :

  (e_1, e_2) une base **fixée** de E.
  $(u, v) \in E^2$ un couple de vecteurs.
  La surface délimitée par le couple (u, v), correspond à l'aire algébrique de la surface du parallélogramme formé par (u, v).
  La surface de référence est celle du parallélogramme (ici carré) formé par (e_1, e_2).



Maintenant, formalisons ces concepts.

2 Formes multilinéaires

Prenons successivement les différentes conditions que l'on a distingué pour obtenir un calcul d'aire (ou de volume).

A Additivité des aires

Définition 2.1 *(Forme n-linéaire)*

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.
Soit $f : E^n \to \mathbf{K}$, on dit que f est une **forme n-linéaire** sur E si f est linéaire par rapport à chacune de ses variables :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \forall (x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n) \in E^{n-1},$$

$$\boldsymbol{x} \mapsto f(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, \boldsymbol{x}, x_{k+1}, \cdots, x_n) \quad \text{est linéaire.}$$

Lorsque $n = 2$, on dit que la forme est **bilinéaire**.

⚠ Pour $n \geqslant 2$, une forme $n-$linéaire n'est en général **pas linéaire** pour E^n.

On remarque qu'on parle d'une forme n-linéaire sur E, alors que l'espace de départ est E^n.

Exemple

Soit $n \geqslant 2$, et E un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$.
Soit f une forme n-linéaire sur E.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour qu'elle soit une forme linéaire de E^n.

Solution :

Soit $M = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E^n$.

$$\begin{aligned} 2f(M) &= f(2x) \quad \text{forme linéaire} \\ &= f(2x_1, 2x_2, \cdots, 2x_n) \\ &= 2f(x_1, 2x_2, \cdots, 2x_n) \quad \text{linéaire par rapport à } x_1 \\ &= \cdots \\ &= 2^n f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 2^n f(M). \end{aligned}$$

Or $n \geqslant 2$, donc $\forall M \in E^n$, $f(M) = 0$.
Il est donc nécessaire que f soit nulle. Cette condition est suffisante.

B Aire algébrique

Définition 2.2 *(Forme antisymétrique)*

Soit $f : E^n \to \mathbf{K}$.
f est dite **antisymétrique** si
$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in E^n$, $\forall i < j \in [\![1, n]\!]^2$,

$$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j \cdots, x_n) = -f(x_1, \cdots, x_{\boldsymbol{j}}, \cdots, x_{\boldsymbol{i}} \cdots, x_n).$$

(Le signe de f est changé lorsque l'on permute deux vecteurs).

Cette propriété permet la construction d'une aire « algébrique » : positive ou négative selon l'ordre des vecteurs.
Lorsqu'on échange deux vecteurs, la surface est remplacée par son opposée.
C'est cette propriété qui nous avait guidé, dans l'étude du groupe symétrique, pour introduire la **signature** d'une permutation. Il est donc naturel de la revoir apparaître ici.

Propriété 2.3

Soit $f : E^n \to \mathbf{K}$ une application antisymétrique, et τ une transposition.
$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in E^n$,

$$f(x_{\tau(1)}, \cdots, x_{\tau(n)}) = -f\left(x_1, \cdots, x_n\right).$$

Preuve

C'est la réécriture formelle de la définition avec $\tau = (i, j)$ suivant les mêmes notations. ■

Corollaire 2.4 *(Effet d'une permutation)*

Soit $f : E^n \to \mathbf{K}$ une application antisymétrique, et $\sigma \in S_n$.
$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in E^n$,

$$f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f\left(x_1, \cdots, x_n\right).$$

Preuve

On décompose σ en produit de permutations

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_p.$$

On rappelle que ce produit correspond à une composition, et qu'il est non commutatif en général car les permutations n'ont aucune raison d'être à support disjoint.
Par récurrence sur p, on obtient le résultat :
Initialisation : pour $p = 0$, $\sigma = \mathrm{Id}$ et $\varepsilon(\sigma) = 1$, d'où :

$$f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = f\left(x_1, \cdots, x_n\right) = \varepsilon(\sigma) f\left(x_1, \cdots, x_n\right).$$

Hérédité : on le suppose au rang $p \in \mathbf{N}$, et on suppose une permutation qui s'écrit $\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_p \tau_{p+1} = \sigma' \tau_{p+1}$. avec $\forall i \in [\![1, p+1]\!]$, τ_i une permutation.
On applique l'hypothèse de récurrence à $\sigma' = \tau_1 \cdots \tau_p$ ce qui donne

$$\begin{aligned} f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) &= f(x_{\sigma'(\tau_{p+1}(1))}, \cdots, x_{\sigma'(\tau_{p+1}(n))}) \\ &= \varepsilon(\sigma') f\left(x_{\tau_{p+1}(1)}, \cdots, x_{\tau_{p+1}(n)}\right) \quad \text{hypothèse de récurrence} \\ &= \varepsilon(\sigma')\varepsilon(\tau_{p+1}) f\left(x_1, \cdots, x_n\right) \quad \text{antisymétrie} \\ &= \varepsilon(\sigma'\tau_{p+1}) f\left(x_1, \cdots, x_n\right) \quad \text{définition de la signature} \\ &= \varepsilon(\sigma) f\left(x_1, \cdots, x_n\right). \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien prouvé le résultat pour toute permutation $\sigma \in S_n$. ■

C Volume « aplati »

Définition 2.5 *(Forme alternée)*

Soit $f : E^n \to \mathbf{K}$ une application définie sur E.
f est dite **alternée**, si f s'annule lorsque deux vecteurs sont égaux :
$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in E^n$,

$$\left(\exists i < j \in [\![1, n]\!]^2, x_i = x_j\right) \Rightarrow f(x_1, \cdots, x_n) = 0.$$

La propriété suivante donne l'interprétation géométrique dans sa généralité : si une famille est liée, alors c'est qu'un des vecteurs fait partie de l'espace engendré par les autres : cela traduit bien l'idée d'un aplatissement de la figure (ne pas hésiter à se le représenter en dimensions 2 et 3).

Propriété 2.6 *(Image des familles liées)*

Soit f une forme $n-$linéaire alternée sur E.
Si $(x_1, \cdots, x_n)$ est une famille liée, alors

$$f\left(x_1, \cdots, x_n\right) = 0.$$

Preuve

On écrit un des vecteurs comme combinaison linéaire des autres : $x_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i x_i$ et on utilise le caractère n-linéaire.

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_n) &= f\left(x_1, \cdots, \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i x_i, \cdots x_n\right) \\ &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i f(x_1, \cdots, x_i, \cdots x_n) \quad \text{(forme } n\text{-linéaire)} \\ &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i \times 0 \quad \text{(forme alternée)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

D Aplati ou signé : même combat

Propriété 2.7

Soit f une forme n-linéaire sur E.

f est antisymétrique si, et seulement si elle est alternée.

Preuve

(*sens direct*) On suppose f antisymétrique.
Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$ tel que $x_i = x_j$ pour $i < j \in [\![1, n]\!]^2$.
Lorsqu'on échange i et j, la famille ne change pas et pourtant l'image par f passe à l'opposé (car f est antisymétrique).
Donc $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ ce qui prouve que f est alternée.
(*sens réciproque*) On suppose f alternée.
Soient $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$ et $i < j \in [\![1, n]\!]^2$.
$f(x_1, x_2, \cdots, x_i + x_j, .., x_i + x_j, \cdots, x_n) = 0$ car f est alternée.
Comme la forme est n-linéaire, on a alors :

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_1, x_2, \cdots, x_i, .., x_i, \cdots, x_n) + f(x_1, x_2, \cdots, x_i, .., x_j, \cdots, x_n) \\ &\qquad + f(x_1, x_2, \cdots, x_j, .., x_i, \cdots, x_n) + f(x_1, x_2, \cdots, x_j, .., x_j, \cdots, x_n) \\ &= f(x_1, x_2, \cdots, x_i, .., x_j, \cdots, x_n) + f(x_1, x_2, \cdots, x_j, .., x_i, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

Donc

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_i, .., x_j, \cdots, x_n) = -f(x_1, x_2, \cdots, x_j, .., x_i, \cdots, x_n).$$

Donc la forme est antisymétrique. ■

3 Déterminant

A Définition

Maintenant que les définitions liées aux propriétés d'une surface sont en place, il reste à construire la fonction qui en permettra le calcul. On l'appelle le déterminant.
La propriété qui suit justifie l'existence d'une telle fonction et montre même qu'il n'en existe qu'une seule : une fois choisie une unité d'aire, il n'y a bien qu'un seul calcul de surface possible, ce qui est plutôt rassurant.
Nous allons même avoir une formule explicite pour calculer cette surface, mais attention, bien qu'on ne parle que de parallélépipèdes... ça pique un peu plus les yeux que la formule du collège.

Théorème 3.1

- Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n.
  L'ensemble les formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 1.
- Pour $e = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, il existe une unique forme n-linéaire alternée $\det_e : E^n \to \mathbf{K}$ vérifiant $\det_e(e) = 1$.
- Pour toute famille $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$,

$$\det{}_e(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{i,\sigma(i)}.$$

  On a noté pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} e_j$.

On obtient donc

Définition 3.2 *(Déterminant)*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $e = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.
On définit le **déterminant** suivant la base e par

$$\det{}_e : \left\{ \begin{array}{ccc} E^n & \to & \mathbf{K} \\ M = (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{i,\sigma(i)}. \end{array} \right.$$

- ⚠ Ici, la dimension de l'espace correspond exactement au nombre d'arguments de la forme n-linéaire.
  C'est-à-dire que les n vecteurs $(x_1, \cdots, x_n)$ ont tous exactement n coordonnées dans la base e. Dans la partie précédente, aucune hypothèse n'était faite quant à la dimension de E. On n'a plus l'unicité si on étudie les formes p-linéaires sur un espace de dimension n avec $p < n$.
- Le fait que l'ensemble des formes n-linéaires alternées constitue un $\mathbf{K}$-espace vec-

toriel de dimension 1 indique qu'elles sont toutes proportionnelles entre elles.

- La formule explicite du déterminant n'est pas utilisée dans les calculs ; elle ne sert que très rarement, et uniquement dans les exercices théoriques.
  On remarquera que la somme contient $n!$ termes, ça fait... beaucoup dès que n augmente un peu !

Preuve

Raisonnons par analyse-synthèse.

- *Analyse :*
  Soit f une telle forme n-linéaire alternée et $M = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.
  Remarque : on utilise la notation M car on voit que cet objet peut s'écrire comme une matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
  Par $n-$linéarité :

$$f(M) = f\left(\sum_{k_1=1}^{n} x_{1,k_1}e_{k_1}, \cdots, \sum_{k_n=1}^{n} x_{n,k_n}e_{k_n}\right)$$
$$= \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} x_{1,k_1}\cdots x_{n,k_n} f\left(e_{k_1}, \cdots, e_{k_n}\right).$$

  Or s'il existe $i \neq j$ tel que $k_i = k_j$ alors d'après le caractère alterné de f, on obtient $f\left(e_{k_1}, \cdots, e_{k_n}\right) = 0$.
  Ainsi, dans la somme multiple, ne restent que les termes pour lesquels $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ sont deux à deux distincts.
  $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ correspond donc à une permutation de $(1, 2, \cdots, n)$.
  La somme multiple se résume donc à une *simple* somme sur l'ensemble des permutation de $[\![1, n]\!]$.

$$f(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} x_{i,\sigma(i)} f\left(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}\right).$$

  Or, f est alternée donc antisymétrique, donc $f\left(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma_n}\right) = \varepsilon(\sigma) f(e_1, \cdots, e_n)$.
  On peut donc factoriser dans la somme

$$f(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{i,\sigma(i)} f\left(e_1, \cdots, e_n\right).$$

  On note alors

$$\det{}_e : \left\{ \begin{array}{ccc} E^n & \to & \mathbf{K} \\ M & \mapsto & \sum\limits_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{n} x_{i,\sigma(i)}. \end{array} \right.$$

  On voit que $\det_e$ ne dépend pas de f et on obtient que toute forme n-linéaire alternée sur E s'écrit $f = \lambda \det_e$ avec $\lambda = f(e_1, \cdots, e_n) \in \mathbf{K}$. Ainsi $f \in \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(\det_e)$.

- *Synthèse :* Pour $\lambda \in \mathbf{K}$, avec $\det_e$ défini comme à l'analyse et on pose

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E^n & \to & \mathbf{K} \\ M & \mapsto & \lambda \det{}_e(M). \end{array} \right.$$

  Montrons que f est une forme n-linéaire alternée.
  Le caractère n-linéaire s'obtient aisément.
  Par exemple, pour x_1,

$$\begin{aligned}
&f(x_1 + \mu x_1', x_2, \cdots, x_n) \\
&= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(x_{1,\sigma(1)} + \mu x'_{1,\sigma(1)}\right) x_{2,\sigma(2)} \cdots x_{n,\sigma(n)} \\
&= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \cdots x_{n,\sigma(n)} + \mu x'_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \cdots x_{n,\sigma(n)}\right) \\
&= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \cdots x_{n,\sigma(n)} + \mu\lambda \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x'_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \cdots x_{n,\sigma(n)} \\
&= \lambda \det{}_e(x_1, \cdots, x_n) + \mu\lambda \det{}_e(x_1', x_2, \cdots, x_n) \\
&= f(x_1, \cdots, x_n) + \mu f(x_1', \cdots, x_n).
\end{aligned}$$

  Il en est de même suivant les autres coordonnées.
  Montrons que la forme est alternée et supposons donc pour $a < b$ que $x_a = x_b$.
  On note $\tau = (a, b)$ la transposition qui échange a et b.
  On remarque par bijectivité de τ que $\{\tau\sigma, \sigma \in S_n\} = S_n$.
  En effet, l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} S_n & \to & S_n \\ \sigma & \mapsto & \tau\sigma \end{array} \right.$ admet une réciproque (elle-même). Donc faire une somme sur $\sigma \in S_n$ ou sur $\tau\sigma$ revient au même à l'ordre près.
  Ainsi

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{i,\sigma(i)} \\
&= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\tau\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{i,\tau\sigma(i)}.
\end{aligned}$$

  Or, $\prod\limits_{i=1}^{n} x_{i,\tau\sigma(i)} = \prod\limits_{i=1}^{n} x_{i,\sigma(i)}$ car seuls a et b ont été échangés et $x_a = x_b$. Donc

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= -\lambda \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{i,\tau\sigma(i)} \\
&= -\lambda \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{i,\sigma(i)} \\
&= -f(x_1, \cdots, x_n).
\end{aligned}$$

  Donc $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$. Ce qui montre bien que la forme est alternée. ■

On choisit de prendre $\lambda = 1$ pour que la surface de l'unité d'aire soit bien 1.

B Application aux petites dimensions

Propriété 3.3 *(Déterminant en taille 2)*

Si $\overrightarrow{u} = (x, y)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y')$, alors

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$$

Explications

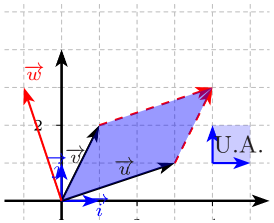
On écrit les vecteurs sous forme de colonne et on réalise une forme de « produit en croix ».

$$\begin{vmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{c} \\ \mathrm{b} & \mathrm{d} \end{vmatrix} \qquad \to \quad a \times d - b \times c$$

On retrouve ce que vous aviez vu au collège : si les lignes (ou les colonnes) du tableau sont proportionnelles, alors on peut appliquer la règle du produit en croix : $ad = bc$, c'est-à-dire $ad - bc = 0$. Dans ce cas, les vecteurs sont colinéaires (proportionnels) et l'aire qu'ils délimitent est nulle.
Le déterminant en dimension 2 permet donc de savoir si des vecteurs sont colinéaires ou non.

Preuve *(Géométrique)*

La preuve dans le cas général pour les déterminants de taille n suffit, mais celle-ci est mise à titre de complément pour mettre en valeur l'aspect réellement géométrique de la notion.
On introduit $\overrightarrow{w} = (-y, x)$ qui est orthogonal à $\overrightarrow{u}$.
L'aire d'un parallélogramme est égale à la longueur d'un côté multipliée par la hauteur.



- longueur d'un côté : $\|\overrightarrow{u}\|$.
- pour calculer la longueur, on projette $\overrightarrow{v}$ sur le vecteur $\overrightarrow{w}$, et on obtient le vecteur :

$$\frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|^2} \overrightarrow{w}.$$

La longueur est donc égale à la norme :

$$\frac{|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}|}{\|\overrightarrow{w}\|}.$$

Or, le signe de l'aire algébrique est donné par le signe du produit scalaire : l'aire est positive si $\overrightarrow{v}$ est du « même côté » que $\overrightarrow{w}$ par rapport à $\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire si l'angle entre les deux est aigu : le produit scalaire est positif.
A contrario, l'aire est négative lorsque le produit scalaire est négatif.
Ainsi, on enlève les valeurs absolues dans le calcul du produit scalaire et on trouve

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\| \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}.$$

Or $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{w}\|$, donc

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = x'w_1 + y'w_2 = xy' - x'y.$$

■

Exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 5 \times 2 = -7.$$

Méthode *(Règle de Sarrus)*

Pour calculer un déterminant 3×3.
On place un voile pudique sur cette formule, que les étudiants ont tendance à trop apprécier, alors qu'elle est d'un intérêt très limité (et donc hors programme).

C Effets sur les bases

Théorème 3.4 *(Changement de base)*

Soient e et e' deux bases de E.

$$\det{}_{e'} = \det{}_{e'}(e) \det{}_{e}.$$

Preuve

D'après la proportionnalité des formes $n-$linéaires alternées entre elles, il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $\det_{e'} = \lambda \det_e$. En évaluant en e, comme $\det_e(e) = 1$, on trouve le résultat cherché. ■

Théorème 3.5 *(Caractérisation des bases)*

Soit e une base de E.
$b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ est une base de E
si, et seulement si $\det_e(b) = \det_e(b_1, b_2, \cdots, b_n) \neq 0$.

Preuve

Si la famille n'est pas une base, alors elle est liée et son déterminant est nul (forme alternée).
Si la famille est une base, alors d'après la formule du théorème précédent, $\det_e(b_1, \cdots, b_n) \det_{b_1, \cdots, b_n} = \det_e$.
En évaluant en e, on trouve donc

$$\det{}_e(b_1, \cdots, b_n) \det{}_{b_1, \cdots, b_n}(e) = \det{}_e(e) = 1,$$

donc $\det_e(b_1, \cdots, b_n) \neq 0$. ■

Définition 3.6 *(Orientation des bases)*

Pour $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ uniquement.

Deux bases e et e' ont **la même orientation** si $\det_e(e')>0$.
On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E : « avoir la même orientation ».
Si $e=(e_1,\cdots,e_n)$ est une base fixée définissant l'orientation de E (par exemple, la base canonique), alors

- toute base ayant même orientation sera dite **directe,**
- toute autre base sera dite **indirecte,**

Ces deux situations correspondent aux classes d'équivalence de la relation donnée plus haut.

Explications

Cette notion est liée à la qualité *algébrique* de l'aire.
En effet, on souhaitait que changer l'orientation du repère change le signe de la surface.

Preuve

Montrons que la relation est une relation d'équivalence.

- Pour e une base de E : $\det_e(e)=1>0,$ donc la relation est réflexive.
- Pour e et e' deux bases de E, telles que $\det_e(e')>0$. D'après la formule du changement de base
$$1=\det_{e'}(e')=\det_{e'}(e)\det_e(e').$$
Donc $\det_{e'}(e)=\frac{1}{\det_e(e')}>0$. Donc la relation est bien symétrique.
- Pour e, e' et e'' trois bases de E, telles que $\det_e(e')>0$ et $\det_{e'}(e'')>0$, alors par la formule du changement de bases :
$$\det_e(e'')=\det_e(e')\det_{e'}(e'')>0.$$
La relation est donc bien réflexive.

■

Exemple

Montrer qu'échanger deux vecteurs d'une base change son orientation.
Plus généralement, si on effectue une permutation σ sur les vecteurs de la base, comment son orientation est-elle changée en fonction de σ ?
Solution :
On a vu que $\det(x_{\sigma}(i))=\varepsilon(\sigma)\det(x_i)$, donc pour une transposition, $\varepsilon(\sigma)=-1$ et l'orientation est changée.
De manière générale, si $\varepsilon(\sigma)=1$, alors la base est directe et sinon, elle est indirecte.

4 Déterminant d'un endomorphisme

Définition 4.1 *(Déterminant d'un endomorphisme)*

Soit $u\in\mathscr{L}(E)$.
Pour $(e_1,\cdots,e_n)$ une base de E, on définit le déterminant de u par
$$\det u=\det{}_{(e_1,e_2,\ldots,e_n)}\left(u(e_1),u(e_2),\cdots,u(e_n)\right).$$
Ce *déterminant est indépendant de la base choisie.*

Dans ce cours, pour alléger les notations, on écrira parfois $u(e)$ pour $(u(e_1),\cdots,u(e_n))$.

Preuve

On considère deux bases e et e' de E.
$(x_1,\cdots,x_n)\mapsto\det_{e'}(u(x_1),\cdots,u(x_n))$ est une forme $n-$linéaire alternée (immédiat), donc, il existe $\lambda\in\mathbf{K}$ tel que
$$\forall(x_1,\cdots,x_n),\ \det_{e'}(u(x_1),\cdots,u(x_n))=\lambda\det_e(x_1,\cdots,x_n).$$
Si on évalue en $e_1,\cdots,e_n$ on trouve $\lambda=\det_{e'}(u(e))$.
Or, en appliquant la formule de changement de base, on a également
$$\det_{e'}(u(e))=\det_{e'}(e)\times\det_e(u(e)).$$
Ainsi
$$\forall(x_1,\cdots,x_n),\ \det_{e'}(u(x_1),\cdots,u(x_n))=\det_{e'}(e)\times\det_e(u(e))\det_e(x_1,\cdots,x_n).$$
Et si on évalue en $(e'_1,\cdots,e'_n)$, on obtient finalement :
$$\det_{e'}(u(e'))=\det_{e'}(e)\times\det_e(u(e))\det_e(e')=\det{}_e\left(u(e)\right).$$
En effet par changement de base : $1=\det_e(e)=\det_e(e')\times\det_{e'}(e)$. ■

Théorème 4.2 *(Caractérisation des automorphismes)*

$u\in\mathscr{L}(E)$ est un isomorphisme si, et seulement si son déterminant est non nul.

Preuve

Cela vient simplement du fait qu'un isomorphisme transforme une base en une autre.
■

Propriété 4.3 *(Déterminant de l'identité)*

$$\det(\mathrm{Id}_E)=1.$$

Preuve

$\det(\mathrm{Id}_E)=\det_e(\mathrm{Id}_E(e))=\det_e(e)=1.$ ■

Théorème 4.4 *(Déterminant d'une composée)*

Soient u et v deux endomorphismes de E.

$$\det(v\circ u)=\det(v)\times\det(u).$$

Preuve

Si u n'est pas un automorphisme, les deux quantités sont nulles.
Sinon, on considère une base $e=(e_1,\cdots,e_n)$.
Alors on réalise la formule de changement de base vers la base $(u(e_1),\cdots,u(e_n))$.

$$\det(v\circ u)=\det{}_e(v\circ u)=\det{}_e(u(e))\det{}_{u(e)}(v\circ u(e))=\det(u)\times\det(v).$$

■

Théorème 4.5 *(Déterminant d'un inverse)*

Si $u\in\mathrm{GL}(E)$, alors

$$\det\left(u^{-1}\right)=\frac{1}{\det(u)}.$$

Preuve

$1=\det\mathrm{Id}_E=\det(u^{-1}u)=\det\left(u^{-1}\right)\det(u)$.
Or $u\in\mathrm{GL}(E)$, $\det(u)\neq 0$, donc on trouve la formule voulue. ■

Propriété 4.6

Soit e une base de E. Soit u un endomorphisme de E et $(x_1,\cdots,x_n)\in E^n$.

$$\det{}_e(u(x_1),\cdots,u(x_n))=\det(u)\times\det{}_e(x_1,\cdots,x_n).$$

Preuve

On peut simplement considérer $v\ :e_i\mapsto x_i$.
La formule de composition donne donc immédiatement le résultat. ■

Propriété 4.7

Soit $u\in\mathscr{L}(E)$, $\lambda\in\mathbf{K}$.

$$\det(\lambda u)=\lambda^n\det(u).$$

⚠ On rappelle que le déterminant n'est pas linéaire pour $n\geqslant 2$, donc $\det(\lambda u)\neq\lambda\det(u)$ en général.

Preuve

Immédiat par n-linéarité. ■

5 Déterminant d'une matrice carrée

A Définition

Définition 5.1 *(Déterminant d'une matrice carrée)*

Le **déterminant** d'une matrice carrée est égal au déterminant de la famille de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$.
Pour $M=(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, on note

$$\det M=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Propriété 5.2

Le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de son endomorphisme associé dans n'importe quelle base.

Preuve

Pour $e=(e_1,\cdots,e_n)$ une base de E de dimension n.
On peut interpréter M comme la matrice d'un endomorphisme u de E dans cette base.
Les vecteurs colonne de la matrice sont alors les images $u(e_1),\cdots,u(e_n)$ exprimées dans cette même base.
On a donc $\det(M)=\det{}_e(u(e_1),\cdots,u(e_n))=\det(u)$. ■

B Opérations sur les matrices

Théorème 5.3 *(Déterminant de la transposée)*

Pour toute matrice $M\in\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$,

$$\det M=\det\left(M^T\right).$$

Preuve

$\sigma\in S_n$ étant une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même, alors $\{\sigma(i),\,i\in[\![1,n]\!]\}=[\![1,n]\!]$.
Donc

$$\begin{aligned}\det(M)&=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n x_{\sigma(i),\,i}\\&=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n x_{,\sigma(i),\,\sigma^{-1}(\sigma(i))}\\&=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n x_{i,\,\sigma^{-1}(i)}.\end{aligned}$$

Or $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$, donc $\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{i=1}^{n} x_{i,\,\sigma^{-1}(i)}$.
De plus, $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection de S_n dans lui-même, donc

$$\det(M) = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{i=1}^{n} x_{i,\,\sigma^{-1}(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{i,\,\sigma(i)} = \det(M^T).$$

Remarque :ici le numéro de colonne (donc du vecteur) est le deuxième indice ce qui explique que dans l'expression initale les indices sont échangés par rapport à la définition initiale du déterminant. ■

Théorème 5.4 *(Déterminant d'un produit, inverse)*

$$\det(I_n) = 1.$$

$\forall (A,\, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbf{K}))^2$,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

$\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Preuve

C'est la transcription matricielle des propriétés sur les endomorphismes. ■

Propriété 5.5 *(Effet des opérations élémentaires)*

- Une transposition de deux lignes ou deux colonnes de la matrice multiplie le déterminant par -1.
  Une permutation σ des lignes ou des colonnes de la matrice, multiplie le déterminant par $\varepsilon(\sigma)$.
- Une transvection sur les lignes ne modifie pas le déterminant.
- Une dilatation d'une ligne ou colonne par λ, multiplie le déterminant par λ.

Preuve

Les opérations sur les lignes et colonne correspondent aux mêmes opérations sur la matrice ou la transposée (qui ont même déterminant).

1. vient du caractère antisymétrique.
2. vient du caractère alterné.
3. vient de la multilinéarité.

■

Exemple *(Formule de Cramer)*

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, $B \in \mathbf{K}^n$ et X l'unique solution de $AX = B$.
Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note A_i la matrice A dans laquelle la i-ème colonne a été remplacée par B.
Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$ avec x_i la i-ème coordonnée de X.
Solution :
On note C_i les colonnes de A, alors $\det(A) = \det(C_1, \cdots, C_n)$.
Or, $AX = B$, donc $\sum_{k=1}^{n} x_i C_i = B$.
Ainsi, en utilisant le caractère linéaire par rapport à la i-ème variable $x_i \times \det(A) = \det(C_1, \cdots, x_i C_i, C_n)$.
Et d'après le caractère altéré du déterminant,

$$x_i \times \det(A) = \det\left(C_1, \cdots, \sum_{k=1}^{n} x_k C_k, \cdots, C_n\right) = \det(C_1, \cdots, B, \cdots C_n).$$

Reste à diviser par $\det(A) \neq 0$.

La méthode de l'exemple précédent est utile pour les systèmes 2×2, sinon, c'est souvent beaucoup trop lourd.

Exemple

Résoudre $\begin{cases} \sqrt{5}\lambda + 2\mu = 0 \\ -\lambda + \sqrt{3}\mu = 2 \end{cases}$.

Solution :

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & \sqrt{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{5} & 2 \\ -1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}} = \frac{-4}{\sqrt{15}+2} \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{5} & 2 \\ -1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{15}+2}.$$

Propriété 5.6 *(Déterminant d'une matrice triangulaire)*

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.
En particulier

$$\det(\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)) = \lambda_1 \cdots \lambda_n \quad \text{et} \quad \det(\lambda I_n) = \lambda^n.$$

Preuve

On peut l'obtenir par opérations élémentaires pour se ramener à l'identité, sinon on observe que la formule du déterminant avec la somme sur les permutations ne conserve que le terme pour $\sigma = \mathrm{Id}$. ■

Exemple

On pose $P_0 = 1$, $P_1 = 1 - X$ et $P_2 = 1 + X - X^2$.
Quelle est l'orientation de la base $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$?
Solution :

La matrice de la base $\mathscr{B}$ dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Son déterminant est donc 1. La base est orientée dans le sens direct (on peut le visualiser avec la « règle des trois doigts »).

C Résumé des propriétés

Propriété 5.7 *(Résumé des propriétés)*

1. Si deux colonnes (ou deux lignes) sont égales, le déterminant est nul.
2. Si une colonne (ou une ligne) est nulle, le déterminant est nul.
3. Si une colonne (ou ligne) est combinaison linéaire des autres, le déterminant est nul.
4. Le déterminant est non nul si et seulement si
   (a) A est inversible,
   (b) *ou* les colonnes de A forment une base de $\mathbf{K}^n$,
   (c) *ou* les colonnes de A forment une famille libre,
   (d) *ou* les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathbf{K}^n$.
5. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
6. $\det(AB) = (\det A)(\det B) = \det(BA)$.
7. $\det\left(A^T\right) = \det(A)$.

D Vue comparée matrices-endomorphismes

Matrice	Endomorphisme
Une colonne de A est nulle $\Rightarrow \det A = 0$	u n'est pas injective $\Rightarrow \det u = 0$.
Une colonne (ligne) est combinaison linéaire des autres $\Rightarrow \det A = 0$	L'image d'une base par u n'est pas libre : u n'est pas injective $\Rightarrow \det u = 0$.
A inversible $\iff \det A \neq 0$	u automorphisme $\iff \det u \neq 0$.
Si A inversible, alors $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$	Si u est un automorphisme, alors $\det u^{-1} = \dfrac{1}{\det u}$.
⚠ $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$	⚠ $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$.
$\det(AB) = (\det A)(\det B) = \det(BA)$	$\det(u \circ v) = (\det u)(\det v) = \det(v \circ u)$.

6 Calculs explicites de déterminants

A Par Gauss-Jordan

Théorème 6.1 *(Matrices élémentaires)*

1. $\det T_{i,j}(\lambda) = 1$.
2. $\det P_{i,j} = -1$.
3. $\det D_i(\lambda) = \lambda$.

Preuve

1. Cela revient à remplacer la colonne j par elle-même plus λ fois la colonne i dans la matrice identité. Comme le déterminant est une forme alternée sa valeur n'est pas modifiée.
2. Car on échange deux colonnes et que le déterminant est une forme alternée.
3. Car on multiplie la colonne i par λ pour la matrice identité, ce qui revient à multiplier $\det I_n = 1$ par λ (car le déterminant est n-linéaire).

■

Méthode *(Utilisation de la méthode de Gauss-Jordan)*

Pour calculer le déterminant d'une matrice, on peut appliquer la méthode de Gauss-Jordan.
Si on aboutit à l'identité, alors le déterminant correspond à l'inverse du produit des déterminants élémentaires,
Sinon, le déterminant est nul.

Exemple

En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

B Passer par les applications linéaires

Méthode *(Calcul du déterminant d'un endomorphisme)*

Pour calculer le déterminant d'une matrice, on peut interpréter cette matrice comme un endomorphisme dans une base particulière, puis exprimer cette endomorphisme dans une autre base où il s'exprimer plus simplement (par exemple par une matrice triangulaire ou diagonale).

⚠ Il faut la même base de départ et d'arrivée pour exprimer la matrice de l'endomorphisme, sinon le déterminant n'est plus égal.

C Mineur et comatrice

Définition 6.2 *(Mineur d'une matrice)*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, le **mineur d'indice** i, j de la matrice A est de déterminant de la matrice $\Delta_{i,j}$ obtenue à partir de A en retirant la i-ème ligne et la j-ème colonne. On le notera $A^{i,j}$ dans les énoncés suivants.

Théorème 6.3 *(Développement suivant les lignes ou les colonnes.)*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

1. *développement suivant la i_0-ème ligne.*
   Pour i_0 fixé dans $[\![1, n]\!]$,
   $$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0,j} A^{i_0,j}.$$
2. *développement suivant la j_0-ème colonne.*
   Pour j_0 fixé dans $[\![1, n]\!]$,
   $$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} a_{i,j_0} A^{i,j_0}.$$

Explications

Pour visualiser les signes à appliquer, il faut garder en tête ce schéma :

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots & \\ - & + & - & + & \cdots & \\ + & - & + & - & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \ddots & - & + & - \\ & & \cdots & + & - & + \end{pmatrix}$$

Si on développe suivant une ligne par exemple, on parcourt la ligne en multipliant chaque coefficient de la ligne par le signe et le mineur correspondants (c'est-à-dire le déterminant de la matrice en enlevant la ligne et la colonne qui contient ce coefficient).

Quand utiliser ce théorème ? *Avec parcimonie.*

1. Lorsque la matrice contient beaucoup de zéros,
2. Pour réaliser un raisonnement par récurrence sur la taille de la matrice (exercices théoriques ou matrices de taille n quelconque.)

Dans le cas général, pour un calcul *pratique* du déterminant, il est souvent préférable d'utiliser la méthode de Gauss-Jordan.

Preuve

On veut calculer le déterminant D en développant suivant la ligne i_0.

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

On place la ligne i_0 en dernière position à l'aide de la permutation de colonnes donnée par le cycle $\gamma = (n\; n-1\; \cdots\; i_0+1\; i_0)$.
La signature du cycle est $(-1)^{n-i_0}$ et le déterminant est donc multiplié d'autant.
Avec la multilinéarité, on trouve alors

$$D = (-1)^{n-i_0} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \\ a_{i_0,1} & \cdots & \cdots & a_{i_0,n} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-i_0} a_{i_0,j} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & & \cdots & a_{n,n} \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}}_{D_j}$$

où D_j désigne le déterminant avec en dernière ligne des 0 partout, sauf un 1 à la colonne j.
Reste à calculer D_j à j fixé.
Pour cela on realise une permutation sur les colonnes $(n\; n-1\; \cdots\; j+1\; j)$ de signature $(-1)^{n-j}$.
On trouve alors

$$D_j = (-1)^{n-j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,j} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} & a_{n,j} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Or, dans le calcul de D_j avec la somme sur les permutations, seules les permutations σ telles que $\sigma(n) = n$ donnent un terme non nul.
En effet, si $\sigma(n) \leqslant n-1$, alors en notant $a'_{i,j}$ les coefficients de la matrice, le produit $\prod_{k=1}^{n} a'_{i,\sigma(i)}$ contient le facteur $a'_{n,\sigma(n)}$ qui est nul.
Ainsi

$$D_j = (-1)^{n-j} \sum_{\sigma \in S_n,\, \sigma(n)=n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a'_{i,\sigma(i)} = (-1)^{n-j} \sum_{\sigma \in S_n,\, \sigma(n)=n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n-1} a'_{i,\sigma(i)}$$

car $a'_{n,\sigma(n)} = 1$.
En notant σ' la restriction de σ à $[\![1, n-1]\!]$ on obtient alors

$$D_j = (-1)^{n-j} \sum_{\sigma' \in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma') \prod_{i=1}^{n-1} a'_{i,\sigma'(i)} = (-1)^{n-j} A^{i,j}.$$

Ainsi, en remettant tout ensemble, on a bien

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} (-1)^{i_0+j} A_{i_0,j}.$$

Formulation directe avec les permutations :
On peut rédiger la preuve un peu différemment, même si l'idée est la même.
On commence par la multilinéarité :

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i,\,\sigma(i)}\\ &= \sum_{j_0=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n,\,\sigma(i_0)=j_0}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i,\,\sigma(i)}\end{aligned}$$

On a vu avec nos opérations sur les colonnes que l'on a construit une matrice $A'=(a'_{i,\,j})$ qui est égale à A sauf que la i_0-ème ligne est placée à la dernière (en remontant les suivantes d'un rang) et de même pour la colonne j_0 placée en dernier.
La correspondance entre les deux matrices peut donc s'écrire

$$\forall(i,\,j)\in[\![1,\,n]\!]^2,\ a_{i,\,j}=a'_{\gamma(i),\,\gamma'(j)}$$

avec γ le cycle qui envoie la i_0-ème ligne à la fin, et γ' qui envoie la j_0-ème colonne à la fin :

$$\gamma=(n,\,n-1,\,\cdots,\,i_0)\text{ et }\gamma'=(n,\,n-1,\,\cdots,\,j_0).$$

Ainsi pour retrouver le coefficient $(i,\,j)$ dans la matrice A', il faut aller au coefficient $(\gamma(i),\,\gamma'(j))$.
Avec la formule du déterminant, cela donne donc pour toute permutation $\sigma\in S_n$, $a_{i,\,\sigma(i)}=a'_{\gamma(i),\,\gamma'(\sigma(i))}$.
Si, au lieu de faire la somme sur les $i\in[\![1,\,n]\!]$, on fait la somme sur $\gamma(i)$, alors dans la somme, la signature de γ intervient, et cela donne

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{j_0=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n,\,\sigma(i_0)=j_0}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i,\,\sigma(i)}\\ &= \sum_{j_0=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n,\,\sigma(i_0)=j_0}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a'_{\gamma(i),\,\gamma'\circ\sigma(i)}\\ &= \sum_{j_0=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n,\,\sigma(i_0)=j_0}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a'_{i,\,\gamma'\circ\sigma\circ\gamma^{-1}(i)}\end{aligned}$$

On note alors $\sigma'=\gamma'\circ\sigma\circ\gamma^{-1}$ et pour $\sigma(i_0)=j_0$, on trouve $\sigma'(n)=n$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{j_0=1}^{n}\sum_{\sigma'\in S_n,\,\sigma'(n)=n}\varepsilon(\gamma'^{-1}\circ\sigma'\circ\gamma)\prod_{i=1}^{n}a'_{i,\,\sigma'(i)}\\ &= \sum_{j_0=1}^{n}\sum_{\sigma'\in S_n,\,\sigma'(n)=n}(-1)^{i_0+j_0}\varepsilon(\sigma')\prod_{i=1}^{n}a'_{i,\,\sigma'(i)}\end{aligned}$$

Comme dans le produit, pour $i=n$, on obtient $a'_{n,\sigma'(n)}=1$, alors on peut considérer la restriction a la matrice d'ordre $n-1$ ce qui donne donc

$$\det A=\sum_{j_0=1}^{n}a_{i_0,\,j_0}\sum_{\sigma'\in S_{n-1}}(-1)^{i_0+j_0}\varepsilon(\sigma')\prod_{i=1}^{n-1}a'_{i,\,\sigma'(i)}=\sum_{j_0=1}^{n}a_{i_0,\,j_0}(-1)^{i_0+j_0}A_{i_0,\,j_0}.$$

■

Définition 6.4 *(Cofacteur et comatrice)*

Pour $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, pour $(i,\,j)\in[\![1,\,n]\!]^2$,

- le **cofacteur** de A d'indices $(i,\,j)$ est le coefficient $(-1)^{i+j}A^{i,\,j}$.
- la **comatrice** de A, notée $\mathrm{Com}(A)$ est la matrice des cofacteurs.

Théorème 6.5

Pour toute matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$

$$A\,(\mathrm{Com}(A))^T=(\mathrm{Com}(A))^T\,A=(\det A)\,I_n.$$

En particulier, si $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$,

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}(\mathrm{Com}(A))^T.$$

Explications

Cette formule ne sert que dans les exercices théoriques car la comatrice est beaucoup trop difficile à calculer explicitement.
Pour les calculs pratiques d'inverse, on utilisera plutôt les méthodes vues lors du calcul matriciel (polynôme annulateur, Gauss-Jordan) ou l'interprétation avec les endomorphismes dans certaines bases.

Preuve

Le coefficient $i,\,j$ de $A\,(\mathrm{Com}(A))^T$ est $\sum_{k=1}^{n}a_{i,\,k}(-1)^{k+j}A^{j,\,k}$.

Montrons qu'il vaut $\det A=\delta_{i,\,j}$.

- Pour $i=j$, on reconnaît un calcul de développement suivant la i-ème ligne

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{i,\,k}A^{i,\,k}=\det A.$$

- Pour $i\neq j$, $\sum_{k=1}^{n}a_{i,\,k}(-1)^{k+j}A^{j,\,k}$.

  Si on remplace dans A la j-ième ligne par la i-ème, alors on obtient une matrice B non inversible (deux colonnes égales) telle que $\forall k\in[\![1,\,n]\!]$, $B^{i,\,k}=A_{j,\,k}$ et $b_{j,\,k}=a_{i,\,k}$. Le calcul précédent est donc le développement suivant la j-ème ligne de B et il est nul par non inversibilité de B.

■

7 Déterminant de Vandermonde

Théorème 7.1 *(Déterminant de Vandermonde)*

Soient $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ Le **déterminant de Vandermonde** est défini par

$$V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

On trouve

$$V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$

Ainsi, le déterminant est nul si, et seulement s'il existe $i \neq j$ tel que $x_i = x_j$.

Preuve *(À connaître)*

Pour tout polynôme $P \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$ de degré $n-1$ et **unitaire**, on obtient par transvections successives sur les colonnes

$$V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & P(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & P(x_2) \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & P(x_n) \end{vmatrix}.$$

En particulier, on peut choisir P unitaire tel que $\forall i \in [\![1, n-1]\!], P(x_i) = 0$.

On trouve alors $P = \prod_{i=1}^{n-1}(X - x_i)$ et le déterminant s'écrit

$$V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & P(x_n) \end{vmatrix}.$$

En développant suivant la dernière colonne, on obtient alors

$$V_n(x_1, \cdots, x_n) = V_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1})P(x_n) = V_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i).$$

De plus $V_1(x_1) = 1$, donc par récurrence immédiate

$$V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$

En particulier, le déterminant est nul si, et seulement s'il existe $i \neq j$ tel que $x_i = x_j$. ■

Exemple *(Interprétation géométrique du Vandermonde)*

Soient $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ deux à deux distincts.

On considère l'application linéaire

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \to & \mathbf{K}^n \\ P & \mapsto & (P(a_0), P(a_1), \cdots, P(a_n)). \end{array} \right.$$

1. u est bien linéaire, montrons que c'est un isomorphisme.
   Soit $P \in \ker(u)$, alors $P(a_0) = P(a_1) = \cdots = P(a_n)$ donc P admet au moins $n+1$ racines et P est de degré $\leqslant n$, donc $P = 0$.
   Ainsi u est injective.
   Or $\dim(\mathbf{K}_n[X]) = \dim\left(\mathbf{K}^{n+1}\right)$, donc u est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. Déterminons la matrice de u entre les bases canoniques de $\mathbf{K}_n[X]$: $\mathscr{C}_X$ et celle de $\mathbf{K}^n$: $\mathscr{C}_1$.
$$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}_X, \mathscr{C}_1}(u) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$
3. Déterminer une base de $\mathbf{K}_n[X]$: $\mathscr{B}$ telle que $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}, \mathscr{C}_1}(u) = I_{n+1}$.
   On prend la base des polynômes interpolateurs de Lagrange, ce qui revient à prendre la base des $\left(u^{-1}(e_i)\right)_{0 \leqslant i \leqslant n}$

8 Matrices triangulaires par blocs

Théorème 8.1 *(Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs)*

Pour A_1, A_2, .., A_p des matrices carrées,

$$\begin{vmatrix} A_1 & & \times \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{p} \det(A_i).$$

Preuve

On réalise une preuve par récurrence sur le nombre de blocs.
Initialisation : pour un seul bloc, il n'y a rien à faire.
Hérédité : on suppose la formule valable pour p blocs.
On considère le déterminant avec $p+1$ blocs que l'on écrit

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & & \times \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & A_{p+1} \end{pmatrix}.$$

On note $B \in \mathscr{M}_{n_1}(\mathbf{K})$ et $A_p \in \mathscr{M}_{n_2}(\mathbf{K})$.
Montrons que $\det(M) = \det(A_{p+1})\det(B)$.

- Si A_{p+1} n'est pas inversible, alors une de ses lignes peut s'écrire comme combinaison des autres et il en est de même pour M.
  On trouve donc bien $\det M = 0 = 0 \times \det B = \det A_{p+1} \det B$.
- Sinon, on écrit

$$M \times M' = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & A_{p+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & A_{p+1}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & CA_{p+1}^{-1} \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}.$$

  Par développements successifs sur les dernières lignes de MM' on trouve bien $\det(MM') = \det(B)$.
  De même, par développements suivant les premières lignes, on obtient $\det M' = \begin{vmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & A_{p+1}^{-1} \end{vmatrix} = \det A_{p+1}^{-1} = \dfrac{1}{\det A_{p+1}}$.
  Ainsi $\det M \times \frac{1}{\det A_{p+1}} = \det M \times \det M' = \det(MM') = \det B$.
  Donc $\det M = \det B \times \det A_{p+1}$.

Or, par hypothèse de récurrence, $\det(B) = \prod\limits_{i=1}^{p} \det(A_i)$, donc $\det M = \prod\limits_{i=1}^{p} \det(A_i)$ ce qui termine la récurrence. ■