Fonctions usuelles

Jésus s'adressa à ses disciples :
— « $y = x^2$. »

Pierre prit alors la parole :
— « Rabbi, tes paroles sont souvent énigmatiques, mais cette fois-ci, nous sommes complètement perdus. »

Jésus de rétorquer : « C'est normal, c'est une parabole... »

Le but de ce chapitre est de revoir précisément comment étudier une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ou $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ et d'énoncer les principaux théorèmes.
Il faut donc lire ce chapitre comme une sorte de « *boîte à outils* » qui liste les notions indispensables pour mener à bien une étude de fonction en prépa.
Il sera fait abstraction de tous les aspects théoriques pour se concentrer sur l'étude *pratique* et concrète des fonctions.

Les approfondissements nécessaires à certaines notions théoriques sont réalisés dans d'autres chapitres. Il ne faut donc pas être surpris si ce chapitre ne contient presque pas de preuves.

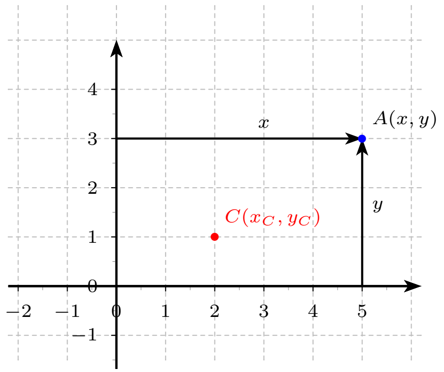
Notation : Dans la suite I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$, a est un point de I et f est une application $I \to \mathbf{R}$.

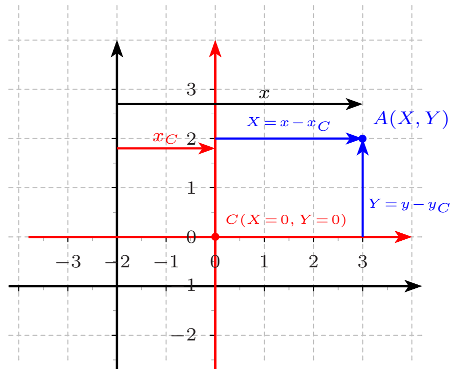
1 Propriétés globales

A Rappels sur le repérage dans le plan

Changement d'origine :
Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on définit $C(x_C, y_C)$.
Soit $A(x, y)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Dans le repère *translaté* d'origine C, les coordonnées de A sont

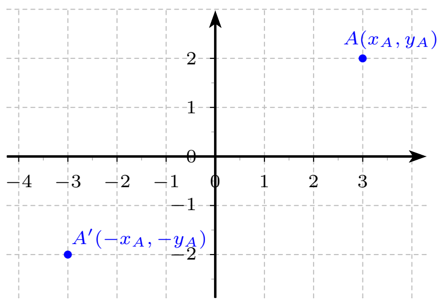
$$X = x - x_C \text{ et } Y = y - y_C$$



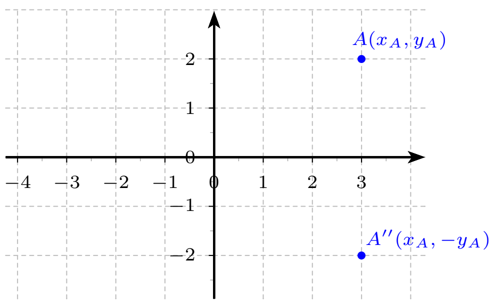


Remarque : On vérifie que dans le nouveau repère, les coordonnées de l'origine C sont $X = x_C - x_C = 0$ et $Y = y_C - y_C = 0$.

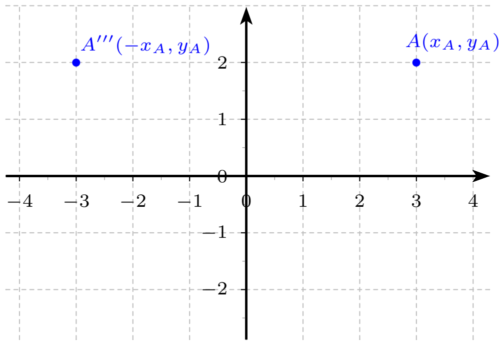
Symétries liées à l'origine



Symétrie par rapport à l'origine

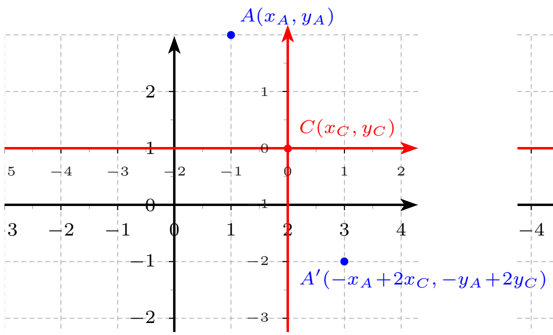


Symétrie par rapport à l'axe des abcisses

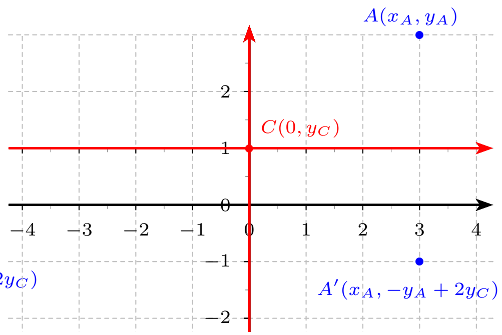


Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

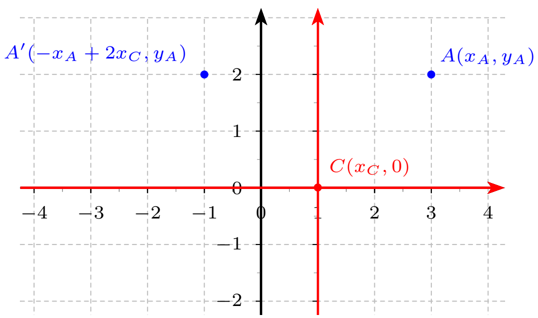
Symétries liées à un point quelconque



Symétrie par rapport à un point



Symétrie par rapport à une droite horizontale



Symétrie par rapport à une droite verticale

Preuve

On ne présente que la preuve pour la symétrie par rapport à un point, les autres sont simplement des cas particuliers.

On note en minuscule les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et en majuscules dans le repère $(C, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Dans le nouveau repère, les coordonnées de A sont $(X_A, Y_A) = (x_A - x_C, y_A - y_C)$.
2. Symétrie par rapport à l'origine C :
   Les coordonnées du symétrique sont
   $(-X_A, -Y_A) = (-(x_A - x_C), -(y_A - y_C)) = (-x_A + x_C, -y_A + y_C)$.
3. Dans le repère d'origine, cette fois-ci on rajoute les coordonnées de C et on obtient bien la bonne formule :

$$A'(-X_A + x_C, -Y_A + y_C) = A'(-x_A + 2x_C, -y_A + 2y_C).$$

On donnera lors de l'explication de la propriété 1.7 d'autres façons de retrouver ces relations géométriques. ■

B Translation et dilatation du graphe d'une fonction

Propriété 1.1 *(Translation d'une courbe)*

Soit $f : I \to \mathbf{R}$, soit $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$,

- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x - x_0)$ est la translatée de la courbe de f de vecteur $+x_0\,\vec{i}$ suivant l'axe des abscisses.
- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x) + y_0$ est la translatée de la courbe de f de vecteur $+y_0\,\vec{j}$ suivant l'axe des ordonnées.

Preuve

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
On considère la courbe $\mathscr{C}'$ translatée de $\mathscr{C}$ selon le vecteur (x_0, y_0).
On note donc $y = f(x)$ pour tous les points (x, y) de $\mathscr{C}$ et on cherche g tel que $y = g(x)$, pour tous les points (x, y) de $\mathscr{C}'$.
Or, $(x, y) \in \mathscr{C} \iff (x + x_0, y + y_0) \in \mathscr{C}'$ ou, de façon équivalente,

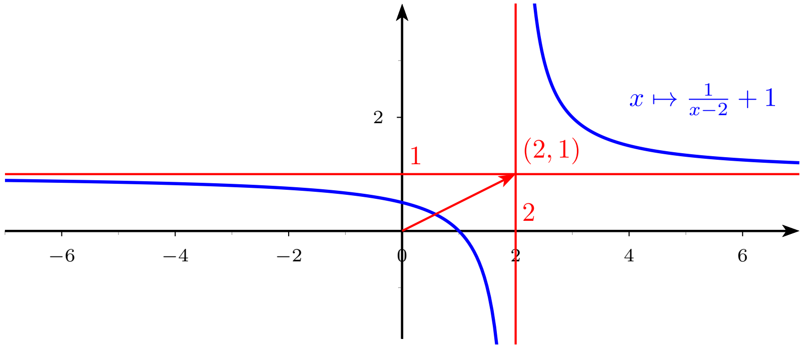
$$(x, y) \in \mathscr{C}' \iff (x - x_0, y - y_0) \in \mathscr{C}.$$

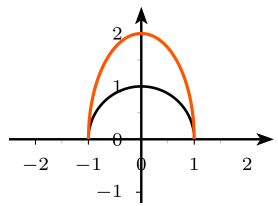
Ainsi, on peut décrire les points de $\mathscr{C}'$ par la relation

$$y = g(x) \iff y - y_0 = f(x - x_0) \iff y = f(x - x_0) + y_0.$$

■

Exemple





$2\sqrt{1-x^2}$: demi-ellipse

Propriété 1.2 *(Dilatation d'une courbe suivant une direction)*

Soit $f : I \to \mathbf{R}$, soit $(x_0, y_0) \in (\mathbf{R}^*)^2$,

- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(\frac{x}{x_0})$ est la dilatée de la courbe de f de rapport x_0 suivant l'axe des abscisses.
- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto y_0 f(x)$ est la dilatée de la courbe de f de vecteur y_0 suivant l'axe des ordonnées.

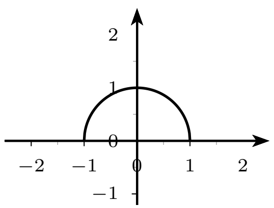
Explications

Pour la dilatation suivant l'axe des abscisses, si on pose $X = \frac{x}{x_0}$.
X augmente de 1 lorsque x augmente de x_0 : il y a un rapport de proportionnalité x_0 entre x et X. De façon imagée, $X = \frac{x}{x_0}$ avance x_0 fois moins vite que x.
Pour y, c'est la même manipulation : $\frac{y}{y_0} = f(x) \iff y = y_0 f(x)$.

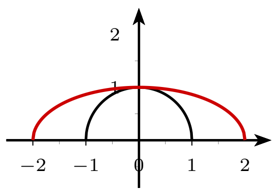
Preuve

C'est la même preuve que pour la translation, mais on remplace l'addition par la multiplication. ■

Exemple



$\sqrt{1-x^2}$: demi-cercle



$\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$: demi-ellipse

C Symétries du graphe d'une fonction

Définition 1.3 *(Fonction paire)*

f est une fonction **paire** si

- *(parité du domaine)* $\forall x \in I,\ -x \in I$,
- *(symétrie de la fonction)* $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$.

Propriété 1.4 *(Symétrie d'une fonction paire)*

Une fonction est paire si, et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

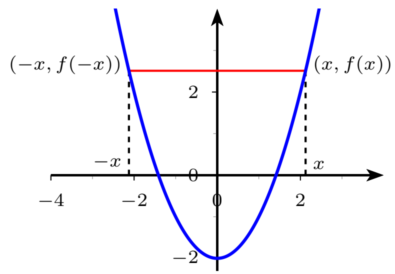
Preuve

- *Sens direct* : Si f est paire, alors pour tout $x \in I, -x \in I$ et $f(-x) = f(x)$.
  Donc si $M(x, f(x))$ est sur la courbe représentative de f, alors son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $M'(-x, f(x))$ est aussi sur la courbe.
  La courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- *Sens réciproque* : Si la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, alors pour tout $M(x, y)$ sur la courbe, le point $M'(-x, y)$ est aussi sur la courbe.
  Donc si $x \in I$, alors $-x \in I$ et si $y = f(x)$, alors $y = f(-x)$, donc $f(-x) = f(x)$.
  Ainsi la fonction est paire.

■

Exemple

Les fonctions constantes sont paires,
La fonction $x \mapsto x^2$ est paire,
La fonction $x \mapsto \cos x$ est paire...



Définition 1.5 *(Fonction impaire)*

f est une fonction **impaire** si

- *(parité du domaine)* $\forall x \in I,\ -x \in I$,
- *(symétrie de la fonction)* $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$.

Propriété 1.6 *(Symétrie d'une fonction impaire)*

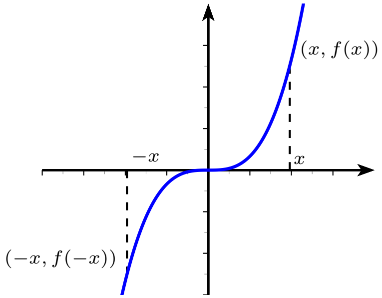
Une fonction est impaire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine.

Preuve

En exercice, c'est identique à celle pour la fonction paire. ■

Exemple

Les fonctions linéaires sont impaires,
La fonction $x \mapsto x^3$ est impaire,
La fonction $x \mapsto \sin x$ est impaire...



Propriété 1.7 *(Symétrie par rapport à un axe vertical)*

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et $x_0 \in \mathbf{R}$. La courbe représentative de f est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = x_0$
si, et seulement si

$$\forall x \in I, \quad -x + 2x_0 \in I \quad \text{et} \quad f(x) = f(-x + 2x_0).$$

si, et seulement si

$$\forall x + x_0 \in I, \quad -x + x_0 \in I \quad \text{et} \quad f(x + x_0) = f(-x + x_0).$$

Explications

Ces relations sont de simples conséquences des symétries vues pour les points du plan. Les précédentes figures permettent de l'illustrer.

- Le premier cas de la propriété 1.7 correspond à la figure ci-dessous.

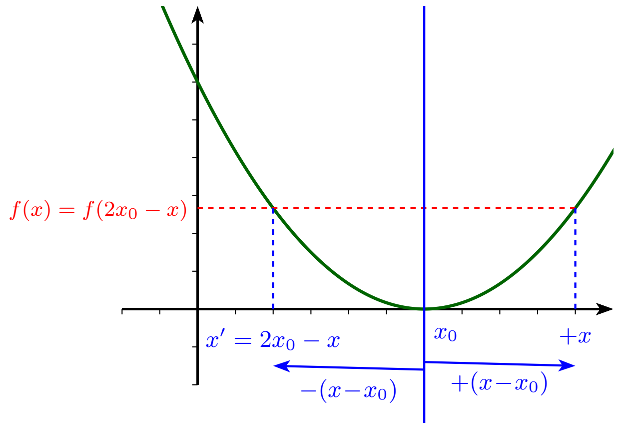
  Si x' est le symétrique de x par rapport à x_0, alors $f(x') = f(x)$.

  Voici trois façons différentes de trouver la valeur de x' par plusieurs raisonnements équivalents :

  – On voit que pour avancer de x_0 vers x, il faut ajouter la quantité $x - x_0$. Pour aller de x_0, vers x', il faut donc reculer de cette même valeur, c'est-à-dire avancer de $-(x - x_0)$. Donc $x' = x_0 - (x - x_0) = 2x_0 - x$.

  – On cherche x' tel que x_0 soit le milieu de $[x', x]$. C'est-à-dire que l'on résout $x_0 = \frac{x+x'}{2}$, et on trouve la valeur $x' = 2x_0 - x$.

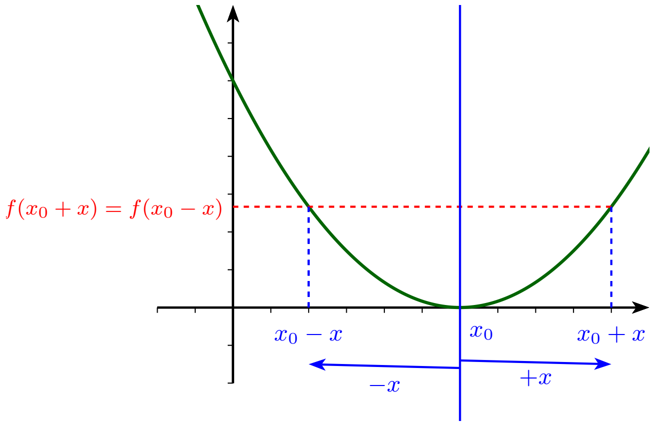
  – Ou on utilise simplement la propriété de la symétrie par rapport à un point quelconque vue en début du cours.



- La deuxième relation est illustrée par la figure qui suit.
  Si on avance de la quantité x par rapport à x_0, alors on obtient $x_0 + x$.
  Et l'image doit être la même que si on recule de la même quantité x par rapport à x_0, c'est-à-dire pour $x_0 - x$.

  Ainsi, les deux images doivent être égales : $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$.

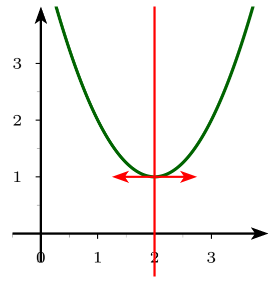
  Cette deuxième relation est sans doute plus visuelle, mais souvent plus difficile à utiliser concrètement. En effet, dans la permière relation, il n'y avait qu'une expression à calculer $f(2x_0 - x)$ pour essayer de retrouver $f(x)$.
  Avec cette deuxième relation, il faut calculer deux relations $f(x - x_0)$ et $f(x + x_0)$ et montrer qu'elles sont égales.



Exemple

Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ avec $a \neq 0$. On considère $f\ : x \mapsto ax^2 + bx + c$ définie sur $\mathbf{R}$.
Montrer que f possède un axe de symétrie.

Solution :
On voit que la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe vertical qui passe par son sommet.
Ce point peut être obtenu par l'annulation de la dérivée (f est bien dérivable sur $\mathbf{R}$).
On trouve pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 2ax + b$, donc $f'(x) = 0 \iff x = -\frac{b}{2a}$ (car $a \neq 0$).
On montre donc que la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe vertical $x = -\frac{b}{2a}$. $\forall x \in \mathbf{R}$, $-x + 2 \times \left(-\frac{b}{2a}\right) = -x - \frac{b}{a} \in \mathbf{R}$ et

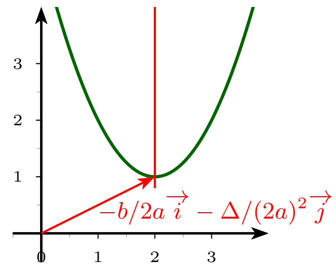


$$
\begin{aligned}
f\left(-x - \frac{b}{a}\right) &= a\left(-x - \frac{b}{a}\right)^2 + b\left(-x - \frac{b}{a}\right) + c \\
&= \frac{b^2}{a} + ax^2 + 2bx - bx - \frac{b^2}{a} + c \\
&= ax^2 + bx + c = f(x).
\end{aligned}
$$

La courbe est donc bien symétrique par rapport à l'axe $x = -\frac{b}{2a}$.

Une autre façon de voir est d'interpréter la forme canonique : $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right].
\end{aligned}
$$



Ainsi, on obtient la courbe de f par translation horizontale de $-\frac{b}{2a}$ (d'où l'axe de symétrie), et verticale de $-\frac{\delta}{(2a)^2}$, puis dilatation suivant (Oy) de rapport a.

Propriété 1.8 *(Symétrie par rapport à un point)*

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$.
La courbe représentative de f est symétrique par rapport au point (x_0, y_0) si, et seulement si

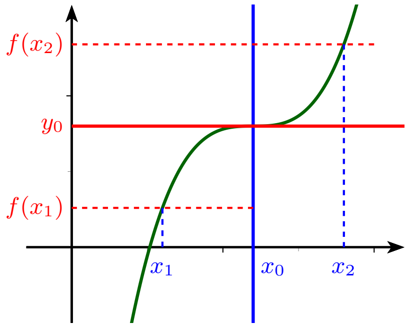
$$\forall x \in I, \quad -x + 2x_0 \in I \quad \text{et} \quad f(-x + 2x_0) = -f(x) + 2y_0.$$

si, et seulement si

$$\forall x + x_0 \in I, \quad -x + x_0 \in I \quad \text{et} \quad f(x + x_0) + f(-x + x_0) = 2y_0.$$

Explications

Si x_1 et x_2 sont symétriques par rapport à x_0, alors $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont symétriques par rapport à y_0.
C'est-à-dire que y_0 est le milieu de $[f(x_1), f(x_2)]$.
Donc
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = y_0.$$
Ce qui donne immédiatement la formulation de la propriété 1.8.
Il suffit de remplacer x_1 et x_2 par deux points symétriques l'un de l'autre par rapport à x_0.
Comme pour la propriété 1.7 de symétrie par rapport à un axe, on peut prendre $x_1 = x$ et $x_2 = 2x_0 - x$, ou prendre $x_1 = x + x_0$ et $x_2 = x - x_0$.



Propriété 1.9 *(Symétrie par rapport à la première bissectrice)*

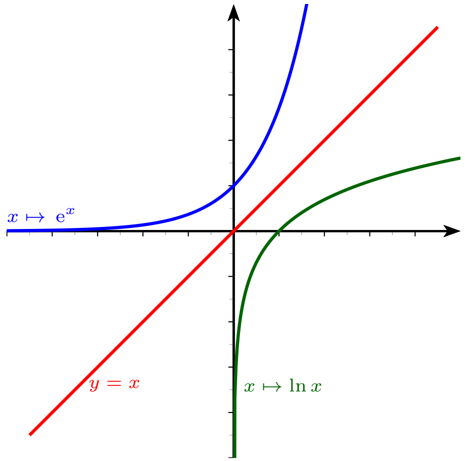
Deux courbes sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ si et seulement si elles représentent des applications réciproques l'une de l'autre.

Preuve

f et g ont leur courbes symétriques,
$\iff$ $M(x, f(x))$ est sur la courbe de f si et seulement si $M'(f(x), x)$ est sur celle de g.
$\iff$ $\forall x \in I$, $g(f(x)) = x$ (sens direct) et pour tout $y = f(x) \in f(I)$, $f(g(y)) = y$.
$\iff$ f et g sont réciproques l'une de l'autre. ■

Exemple

exp et ln (voir ci-contre),
$x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$
$x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \sqrt[3]{x}$



Exponentielle et logarithme.

Définition 1.10 *(Périodicité)*

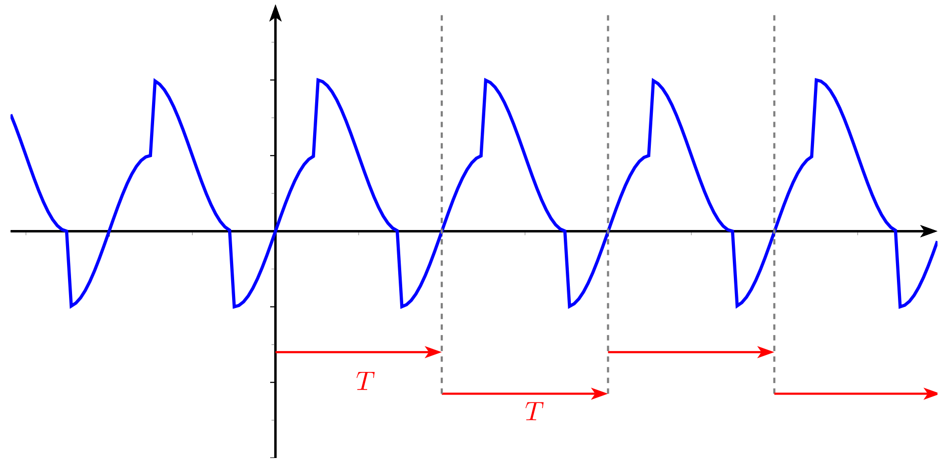
Une fonction f est dite périodique de période $T > 0$, si
$$\forall x \in \mathbf{R},\ x \in I \iff x + T \in I \text{ et } f(x+T) = f(x).$$

Propriété 1.11

Une fonction f est périodique de période $T > 0$ si et seulement si sa courbe représentative est invariante par la translation horizontale de vecteur $T\vec{i}$.

Exemple

$x \mapsto \sin x$ est 2π-périodique, mais aussi 4π-périodique. En général, on cherchera la plus petite période possible.
$x \mapsto \tan x$ est π-périodique.



Fonctions numériques : Courbe d'une fonction T-périodique

Exemple

Soit f définie sur une partie $\mathscr{D}$ non vide de $\mathbf{R}$. Montrer que si $\forall T > 0$, f est $T-$ périodique, alors f est définie sur $\mathbf{R}$ et constante.

Solution :

Soit $x \in \mathscr{D}$, alors $\forall y \in \mathbf{R}$, si $y > x$, on peut écrire $y = x + (y - x) = x + T$ avec $T = y - x > 0$.
Donc T est une période, ainsi $y \in \mathscr{D}$ et $f(y) = f(x+T) = f(x)$.
De même si $y < x$ en écrivant $y = x - T$.
Ainsi $\forall y \in \mathbf{R}$, $y \in \mathscr{D}$, et $f(y) = f(x)$.
Donc f est définie sur $\mathbf{R}$ et constante.

Exemple

Soit $x \in \mathbf{R}$, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor .$$

Solution :

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ fixé, on pose $f \ : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor - \lfloor nx \rfloor$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbf{R},\ f\left(x + \frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} + \frac{1}{n} \right\rfloor - \left\lfloor n\left(x + \frac{1}{n}\right)\right\rfloor \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k+1}{n} \right\rfloor - \lfloor nx + 1 \rfloor \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor - 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{n}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor - 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + 1 - \lfloor nx \rfloor - 1 \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Donc f est $\frac{1}{n}$ périodique et il suffit donc de l'étudier sur un intervalle de longueur $\frac{1}{n}$.
Soit $x \in [0,\ \frac{1}{n}[$, alors pour tout $k \in [\![0,\ n-1]\!]$, $x + \frac{k}{n} \in [0,\ 1[$, donc $\lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = 0$.

Ainsi $\sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = 0$.

De plus $nx \in [0,\ 1[$, donc $\lfloor nx \rfloor = 0$, ainsi f est nulle sur $\left[0,\ \frac{1}{n}\right[$ et par périodicité, elle est nulle sur $\mathbf{R}$.

Donc

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor .$$

D Majorants-minorants

Définition 1.12

- On dit que f est **majorée sur** I, s'il existe un majorant $M \in \mathbf{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant M.$$

Définition équivalente : f majorée sur I si $f(I)$ est une partie majorée de $\mathbf{R}$.

- On dit que f est **minorée sur** I, s'il existe un minorant $m \in \mathbf{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geqslant m.$$

Définition équivalente : f majorée sur I si $f(I)$ est une partie minorée de $\mathbf{R}$.

- On dit que f est **bornée sur** I, si elle est à la fois majorée et minorée.
Définition équivalente : f bornée sur I si $f(I)$ est une partie bornée de $\mathbf{R}$.

Propriété 1.13

f est bornée sur I si, et seulement si $|f|$ est majorée sur I.

Preuve

(sens direct) Si f est bornée sur I, alors il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in I,\ m \leqslant f(x) \leqslant M$.
Donc $\forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant \max(M,\ -m)$.
Donc, $|f|$ est majorée.
(sens réciproque) Si $|f|$ est majorée sur I, alors il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant M$.
Donc $\forall x \in I,\ -M \leqslant f(x) \leqslant M$, donc f est bornée sur I. ∎

Définition 1.14 *(Maximum, minimum, extremum)*

On dit que f **admet un maximum sur** I **en** a si

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant f(a).$$

On dit que f **admet un minimum sur** I **en** a si

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geqslant f(a).$$

On appelle **extremum**, un maximum ou un minimum.

⚠ En général, pour une fonction majorée, la borne supérieure n'est pas atteinte et la fonction n'admet pas de maximum.
De même, une fonction minorée n'admet pas toujours de minimum.
Dans la définition précédente, l'écriture $f(a)$ suppose que la valeur est atteinte en a : il s'agit donc nécessairement d'un maximum (ou minimum).

Exemple

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ définie sur $\mathbf{R}^*$.

f est-elle majorée ? minorée ? admet-elle un maximum ? un minimum ?

Solution :

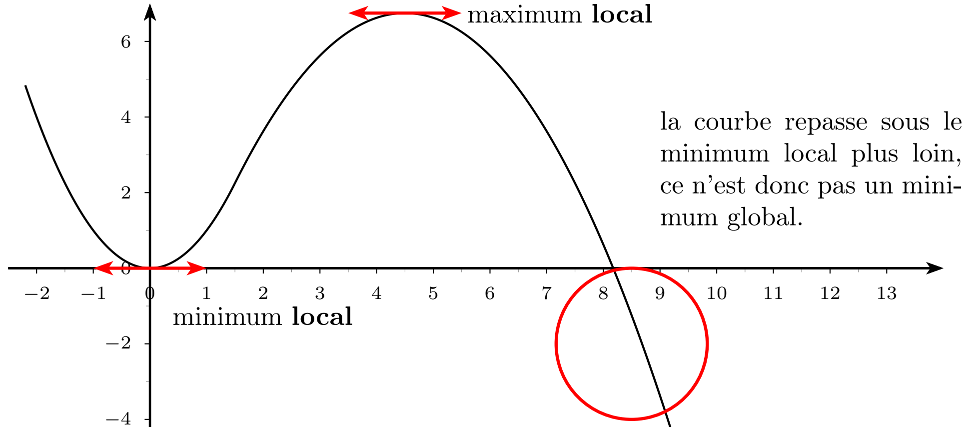
f n'est pas majorée.
En effet, pour tout $M \in \mathbf{R}_+$, on peut poser $x = \frac{1}{M+1}$ et alors $f(x) = M+1 > M$.
(si $M < 0$, alors n'importe quel x convient).
Elle n'admet donc pas non plus de maximum.
$\forall x \in \mathbf{R}^*$, $f(x) > 0$, donc f est minorée par 0. Montrons que c'est sa borne inférieure.
Soit $\alpha > 0$, si on pose $x = \frac{2}{\alpha} > 0$, alors $f(x) = \frac{\alpha}{2} < \alpha$, donc α, n'est pas un minorant de f. Ainsi 0 est un minorant de f mais il n'est pas atteint (ce n'est pas un minimum).

Définition 1.15 *(Extremum local)*

On dit que f admet un extremum **local** sur I en a, s'il existe un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ qui contient a tel que la restriction de f à $I \cap]\alpha, \beta[$ admette un extremum en a.

Explications

Cela veut dire que l'extremum n'est valable que dans une proximité immédiate de a. On dit « *au voisinage*[1] *de a* ».



2 Continuité

A Rappel sur la continuité

Sans entrer dans les détails...

Définition 2.1 *(Fonction continue)*

f est continue en $a \in I$ si $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
f est continue sur I, si f est continue en tout point de I.

1. On peut se représenter un *voisinage* de a comme une petite bulle qui contient a.

Explications

Une fonction est continue en a si on peut « faire rentrer » la limite dedans :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f\left(\lim_{x \to a} x\right) = f(a).$$

C'est ce qui caractérise les fonctions continues. Ce n'est donc pas vrai pour n'importe quelle fonction.
Avec les mains : une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue lorsque l'on peut tracer sa courbe « sans lever le crayon ».

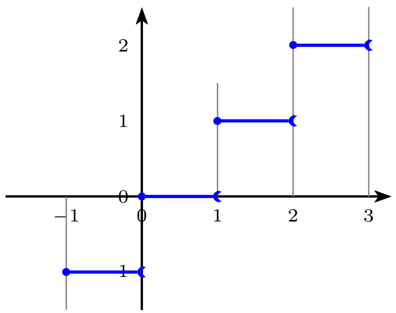
Notion locale vs globale :

Local : La continuité est une notion locale, c'est une théorie pour les myopes : pour savoir si une courbe est continue, il faut la regarder d'infiniment près, point par point. Le nez collé contre la feuille, on suit la courbe point après point sans s'occuper de la forme générale de la courbe : c'est une notion locale.

Global : A contrario, le caractère borné d'une fonction peut-être considéré comme une notion globale. En effet, pour savoir si une fonction est bornée, je dois prendre un peu de distance. Une fonction continue est toujours bornée au voisinage de chacun de ses points. Si je reste collé à la feuille, je ne pourrais donc rien en conclure. En revanche, c'est la forme générale de la courbe qui me donne l'information.

Exemple

La plupart des applications usuelles sont continues sur leur domaine de définition.
Par contre, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est discontinue en tout point de $\mathbf{Z}$. En effet selon que l'on s'approche par la gauche (valeurs inférieures) ou par la droite (valeurs supérieures) d'un nombre entier la limite de la fonction n'est pas la même.
Cela se traduit par des ruptures dans le graphe de la courbe.



B Prolongement par continuité

Définition 2.2 *(Prolongement par continuité)*

On considère une fonction f et a un point en lequel f **n'est pas** définie.
On dit que f admet un **prolongement par continuité** en a s'il existe une fonction prolongée $\tilde{f}$ telle que $\tilde{f}$ soit continue en a.

Théorème 2.3

f est prolongeable par continuité en a si, et seulement si

- f n'est pas définie en a,
- f admet une limite finie en a.

Auquel cas, le seul prolongement possible défini par $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Exemple

Soit $f\ : x \mapsto x \ln(x)$.
Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et donner la valeur du prolongement.

Solution :

f est définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par produit (en particulier f n'est pas définie en 0).
Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.
Donc f est prolongeable par continuité en 0 par $f(0) = 0$.

C Théorèmes liés à la continuité

LES THÉORÈMES QUI SUIVENT SONT FONDAMENTAUX

Théorème 2.4 *(Théorème des valeurs intermédiaires)*

Si f est continue sur un intervalle I contenant $[a, b]$.
Alors f prend toutes les valeurs situées entre $f(a)$ et $f(b)$.

Autre formulation : L'image d'un intervalle par une application continue (à valeurs réelles) est un intervalle.

Corollaire 2.5 *(Utilisation pour l'annulation d'une fonction)*

Si f est continue sur un intervalle I telle qu'il existe $(a, b) \in I^2$, avec $f(a)f(b) \leqslant 0$ (de signes contraires), alors f s'annule entre a et b.

Corollaire 2.6

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$, Si f est continue sur $]a, b[$, et admet des limites en a et en b avec

$$\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to b} f(x)\right) < 0.$$

Alors, $\exists x \in]a, b[,\ f(x) = 0$.

Remarque : Ce corollaire est vrai si a, ou b, ou les limites sont infinies.
Contrairement au corollaire précédent, comme a et b n'appartiennent pas à l'intervalle, il faut que l'inégalité soit stricte (aucune des deux limites n'est nulle).

Théorème 2.7 *(**Corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires)*

Soit $c \in \mathbf{R}$,

- si f est continue sur un intervalle I contenant $[a, b]$,
- si $f(a) \leqslant c \leqslant f(b)$ (ou $f(a) \geqslant c \geqslant f(b)$),
- si f est strictement monotone sur $[a,\ b]$,

alors $f(x) = c$ admet une *unique* solution sur $[a,\ b]$.

Dans ce théorème, on a rajouté un argument de *stricte* monotonie qui donne l'injectivité. Le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'une solution, la stricte monotonie permet d'affirmer son unicité (sur l'intervalle considéré).
On peut bien sûr avoir les mêmes résultats en considérant les limites aux bornes et non nécessairement des valeurs atteintes (comme pour le théorème des valeurs intermédiaires).
⚠ Invoquer ce théorème sous le nom de **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires, sinon, cela sera compté comme faux.

Corollaire 2.8

Si f est continue et strictement monotone sur $]a, b[$, avec

$$\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to b} f(x)\right) < 0,$$

alors, $f(x) = 0$ admet une **unique** solution sur $]a, b[$.

Remarque : Ici, la monotonie de f permet de prouver l'existence des limites a priori (contrairement au cas du théorème des valeurs intermédiaires où c'est une hypothèse supplémentaire). Nous verrons ce résultat plus tard dans l'année (théorème de la limite monotone).
Dans l'énoncé, a, b et les limites peuvent être infinis.

Le théorème suivant est un prolongement du corollaire.
Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer existence et unicité de l'antécédent : la bijectivité de la fonction.
Le théorème de la bijection continue (qui suit), donne également des informations sur l'application réciproque.

Théorème 2.9 *(Théorème de la bijection continue)*

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors

- $f(I)$ est un intervalle,
- f est bijective de I dans $f(I)$.

De plus, f^{-1} est elle-même continue, strictement monotone et de même monotonie que f.

Exercice
Montrer que sous les hypothèses du théorème de la bijection continue, f^{-1} est strictement monotone et de même monotonie que f.

Théorème 2.10 *(Théorème des bornes atteintes)*

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes : elle possède un maximum et un minimum.
Autre formulation : L'image d'un segment par une application continue est un segment.

3 Dérivabilité

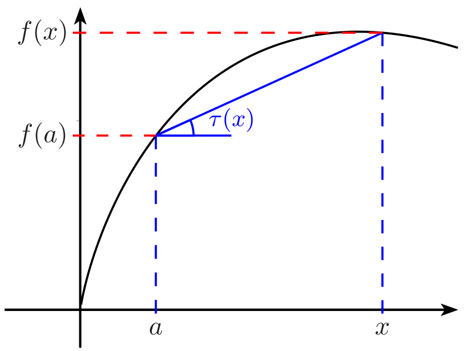
A Dérivabilité d'une fonction

Définition 3.1 *(Taux d'accroissement)*

On appelle **taux d'accroissement** de f en a la fonction définie sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\tau(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Explications
Cela correspond à la pente de la corde qui relie les deux points de la courbe $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$.



Interprétation physique : Lorsque la courbe représente le temps en abscisse et la position en ordonnée, alors le taux de variation donne la vitesse moyenne entre deux points. Dans ce cas, on remplace souvent la variable x par t pour bien indiquer qu'il s'agit d'un temps.
Si on note $d = f(t)$ la distance parcourue à l'instant t, on retrouve bien la forme *classique* de la vitesse :

$$v_{\text{moy}} = \frac{\Delta d}{\Delta t}.$$

Histoire des mathématiques : La notion de dérivée marque la découverte du calcul infinitésimal. Auparavant, la question de l'infini était déjà présente grâce aux suites, mais il s'agissait uniquement d'infiniment grand et non d'infiniment petit. La notion est apparue au XVII$^{\text{ème}}$ siècle avec **Fermat et Newton** (qui se disputent son origine). Mais ce n'est qu'au XIX$^{\text{ème}}$ siècle qu'elle est clairement définie et adoptée grâce aux concepts de limite et de continuité donnés par Cauchy et Weiestrass.
Cette notion était très déconcertante dans les premiers temps et Newton désignait la dérivée comme une grandeur « *évanescente* », c'est-à-dire qu'elle disparaîtrait au moment même où nous devrions l'atteindre : le taux n'est plus défini pour $x = a$. La division par une quantité nulle a longtemps posé problème et Newton lui-même sera embarrassé par ces « *fantômes* ».
Dans son approche, Fermat était également contraint à se débarrasser de termes « *infiniment petits* » pour déterminer des tangentes. Il n'est donc pas étonnant que ces notions aient été très controversées au début.
Cependant, l'audace paya et la puissance calculatoire de la dérivée l'imposa avant même qu'elle fut formellement acceptée.

Définition 3.2 *(Dérivée)*

f est **dérivable** en a si son taux d'accroissement admet une limite finie en a.
On appelle **dérivée de f en** a et on note $f'(a)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ cette limite.

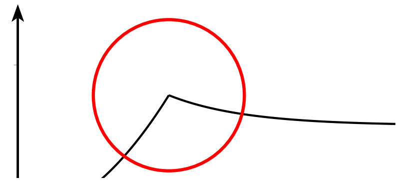
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

⚠ La continuité n'implique pas la dérivabilité.

Explications
La dérivée correspond à la pente limite lorsque les deux points de la corde se rapprochent infiniment.
En physique, la dérivée représente la vitesse instantanée. En général, il n'y a pas de problème d'existence de dérivée en physique car les phénomènes possèdent une certaine régularité. Cela peut cependant arriver lors du rebond d'un objet par exemple, que la vitesse varie trop brusquement pour que l'on puisse définir la vitesse instantanée.
En mathématiques, les situations où la dérivée n'existe pas sont fréquentes et se présentent dès que la fonction varie trop brusquement.

Exemple

Au point *singulier* (pointu) de la courbe, la pente n'est pas définie. On ne peut pas parler de dérivée. On dit que la fonction n'est pas dérivable en ce point.



Méthode *(Étude de la dérivabilité en un point particulier)*

En un point où les théorèmes généraux ne s'appliquent pas, il faut revenir à la définition de la dérivée : limite du taux d'accroissement.

- Si le taux d'accroissement admet une limite finie alors, la fonction est dérivable et sa dérivée vaut cette limite.
- Si le taux d'accroissement admet une limite infinie alors, la fonction n'est pas dérivable mais admet une tangente verticale au point.
- Si le taux d'accroissement n'admet pas de limite alors, la fonction n'est pas dérivable et n'admet pas de tangente au point.

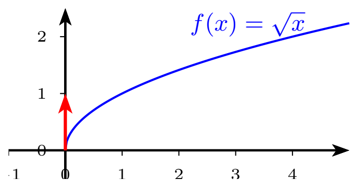
Remarque : Parfois, si on a une limite du taux d'accroissement à gauche et à droite qui sont différentes, alors la fonction n'est pas dérivable au point, mais admet deux demi tangentes (par exemple la fonction valeur absolue en 0).

Exemple

Étude en 0 de $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

Solution :

f est définie et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
Pour $x > 0$, sa dérivée en vaut $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (on ne le redémontre pas ici, voir le cours de première).
Par contre, f n'est pas dérivable en 0 mais admet une tangente verticale en 0, d'équation $x = 0$. On la désigne par une flèche verticale sur le graphique.



Exemple

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbf{R}_+ \setminus \{1\} & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue et dérivable sur son domaine de définition.

Solution :

La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$ est bien définie lorsque $x > 0$ et $x \neq 1$ (le logarithme au dénominateur ne doit pas s'annuler). Donc f est bien définie sur $\mathbf{R}_+ \setminus \{1\} = [0,1[\cup]1,+\infty[$.
D'après les théorèmes généraux sur les fonctions usuelles, l'application est continue sur $]0;1[\cup]1,+\infty[$ et dérivable sur ce même intervalle (comme quotient).

Étude de la continuité en 0 :

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, donc par quotient : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = f(0)$.
Donc f est continue en 0.

Étude de la dérivabilité en 0 :

Le taux d'accroissement en 0 est $\tau(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{\ln x}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+} \tau(x) = 0$.

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ (tangente horizontale en 0).
Remarque : On n'étudie la limite qu'en 0^+ et pas en 0^- car la fonction f n'est pas définie pour $x < 0$.

Définition 3.3 *(Dérivabilité sur un intervalle)*

f est **dérivable sur un intervalle** I si f est dérivable en tout point de I.
On note $\mathscr{D}(I)$, $\mathscr{D}(I,\mathbf{R})$, $\mathscr{D}^1(I)$ ou $\mathscr{D}^1(I,\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.

Remarque : Comme la continuité, la dérivabilité n'est pas une notion globale.

Théorème 3.4 *(Dérivabilité et continuité)*

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
La réciproque est fausse en général.

La continuité est donc une condition *nécessaire* mais *pas suffisante* à la dérivabilité.

Exemple

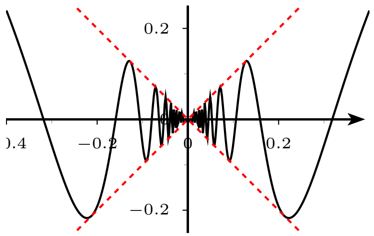
Les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont continues en 0, mais pas dérivables en 0.

Exemple

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est définie et continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Solution :
$\forall x \in \mathbf{R}^*$, $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leqslant 1$, donc $\left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leqslant |x|$.
Or $\lim_{x\to 0} |x| = 0$,
Donc par comparaison,

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0).$$



Ainsi f est continue en 0.
Le taux d'accroissement en 0 est

$$\tau(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \sin \frac{1}{x}.$$

Or $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0 (oscille entre 0 et 1, on le montrera plus proprement lors du chapitre sur les limites et la continuité).
Donc le taux d'accroissement n'admet pas de limite en 0, ainsi f n'est pas dérivable en 0.

Explications de la courbe : La composition par l'application inverse « ramène » l'infini en 0.
Comme l'application sinus possède une infinité de « vagues » lorsque l'on s'approche de l'infini, toutes ces vagues sont ramenée en 0 et sont comprimées de plus en plus à mesure que l'on s'approche de l'origine.
La multiplication par x « tasse » suffisamment la courbe vers 0 pour assurer sa continuité, mais pas assez pour régulariser ses variations et permettre à la dérivée d'exister. Il faudrait multiplier par x^2 pour cela.

B Opérations sur les dérivées

Propriété 3.5

Soient u est v deux fonctions définies sur I, et $a \in I$.
Si u et v sont dérivables en a, alors

1. (*linéarité*) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, $\quad \lambda u + \mu v$ est dérivable en a et
$$(\lambda u + \mu v)'(a) = \lambda u'(a) + \mu v'(a).$$
2. (*produit*) uv est dérivable en a et
$$(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a).$$
3. (*inverse*) si de plus, $v(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{v}$ est dérivable en a et
$$\left(\frac{1}{v}\right)'(a) = -\frac{v'(a)}{(v(a))^2}.$$
4. (*quotient*) si de plus, $v(a) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable en a et
$$\left(\frac{u}{v}\right)'(a) = \frac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{(v(a))^2}.$$

Théorème 3.6 *(Dérivée d'une composée)*

Soient I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$ (avec au moins deux points), et $a \in I$.
Soient $u : I \to J$ et $f : J \to \mathbf{R}$.

Si on suppose que u dérivable en a et que f est dérivable en $u(a)$.
Alors $f \circ u$ est dérivable en a et

$$(f \circ u)'(a) = u'(a) f'(u(a)).$$

⚠ N'apprenez pas seulement le résultat, mais aussi les hypothèses de ce théorème. Cela ne sert à rien de connaître le résultat si vous ne savez pas dans quelles conditions vous pouvez l'utiliser.

⚠ Dans la formule, on prend la dérivée de f au point $u(a)$ et non en a.

⚠ Il ne faut pas confondre $f'(u(a))$ et $(f \circ u)'(a)$.

Dans le premier cas, c'est la fonction f que l'on dérive (et on calcule cette dérivée au point $b = u(a)$). Dans le deuxième cas, c'est la fonction $f \circ u$ que l'on dérive (au point a).
Dans la première situation, $u(a)$ est considéré comme fixe : on ne considère pas les variations de u.
Il ne faut **jamais écrire** $f(u(a))'$ par exemple. Car $f(u(a))$ est un nombre et non

une fonction, et il ne peut donc pas être dérivé.

Preuve

Soit $a \in I$ tel que u dérivable en a et f dérivable en $u(a) = b$.
Pour $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$, on note les taux d'accroissements suivants :

$$\tau(h) = \frac{f(u(a+h)) - f(u(a))}{h},$$
$$\tau_u(h) = \frac{u(a+h) - u(a)}{h}.$$

D'après la dérivabilité de u en a, on peut prolonger τ_u par continuité en 0, en posant $\tau_u(0) = u'(a)$.
Et pour $H \neq 0$ tel que $u(a) + H \in J$, on note

$$\tau_f(H) = \frac{f(u(a)+H) - f(u(a))}{H}.$$

On observe également que τ_f est prolongeable par continuité en 0 avec $\tau_f(0) = f'(u(a))$.
Ainsi, on obtient (également valable pour $h = H = 0$) :

$$u(a+h) = u(a) + h\tau_u(h),$$
$$f(b+H) = f(b) + H\tau_f(H),$$

Pour h tel que $a + h \in I$, on a donc

$$\tau(h) = \frac{f(u(a) + h\tau_u(h)) - f(u(a))}{h}.$$

On pose alors $H = h\tau_u(h)$ et on remarque que $u(a) + H \in J$, ainsi

$$\tau(h) = \frac{f(u(a)+H) - f(u(a))}{h} = \frac{H\tau_f(H)}{h} = \tau_u(h)\tau_f(H).$$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \tau_u(h) = u'(a)$,
et $\lim\limits_{h\to 0} H = 0$, donc par composition $\lim\limits_{h\to 0} \tau_f(H) = f'(u(a))$.
On obtient finalement par produit :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \tau(h) = u'(a)f'(u(a)).$$

■

Exemple

Calculer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto (2x^2 - 3)^4$.
Solution :
Si on pose $u : x \mapsto 2x^2 - 3$ et $f : y \mapsto y^4$, alors $g = f \circ u$.

$$\forall y \in \mathbf{R}, \quad f'(y) = 4y^3 \qquad \text{donc} \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(u(x)) = 4(2x^2 - 3)^3.$$

(on remplace y par $u(x) = 2x^2 - 3$).

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad u'(x) = 2 \times 2x = 4x.$$

Donc $\forall x \in \mathbf{R}$, $\big(f \circ u\big)'(x) = u'(x) \times f'\big(u(x)\big) = 4x \times 4(2x^2 - 3)^3 = 16x(2x^2 - 3)^3$.

Explications

Dans l'exemple précédent, pour contruire g, on commence par faire $x \mapsto 2x^2 - 3$, puis on met le tout à la puissance 4.
Le théorème énonce que la vitesse de variation des deux actions « enchaînées[2] » correspond au produit de leurs vitesses prises individuellement.
D'un point de vue imagé, on peut se figurer un mouvement d'engrenages, dont l'un tourne à la vitesse $u'(a)$ et l'autre f, démultiplie la vitesse par $f'(u(a))$.
La vitesse à l'arrivée correspond donc au produit des deux vitesses.

Exemple

Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 8x + 6}$ là où elle est définie.
Solution :
On pose $g : x \mapsto \sqrt{x}$ et $u : x \mapsto 2x^2 - 8x + 6$.
Domaine de définition :
La fonction racine g est définie uniquement sur $\mathbf{R}_+$ et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
On étudie donc pour quelles valeurs de x, on a $u(x)$ défini et (strictement) positif.
Pour cela, on cherche les solutions de l'équation $2x^2 - 8x + 6 = 0$.

$$\Delta = -b^2 - 4ac = 64 - 4 \times 2 \times 6 = 64 - 48 = 16 > 0$$

Donc l'équation a deux solutions distinctes :

$$X_1 = \frac{8-4}{4} = 1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{8+4}{4} = 3.$$

Comme le coefficient dominant est positif (2>0), alors la fonction polynomiale est négative entre les deux solutions.
Donc $f = g \circ u$ est définie sur $]-\infty, 1] \cup [3; +\infty[$ et dérivable sur $I =]-\infty, 1[\cup]3; +\infty[$.
Calcul :
$\forall x \in I, \quad u'(x) = 2 \times 2x - 8 = 4x - 8.$
$\forall X \in u(I) = \mathbf{R}_+^*, \quad g'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}.$
Donc

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = u'(x)g'\big(u(x) = X\big) = (4x - 8) \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{4x - 8}{2\sqrt{2x^2 - 8x + 6}}.$$

2. Cet enchaînement ne correspond pas à des actions qui se suivent dans le temps, mais plutôt à un emboîtement d'actions les unes dans les autres.

Théorème 3.7 *(Dérivée d'une fonction réciproque)*

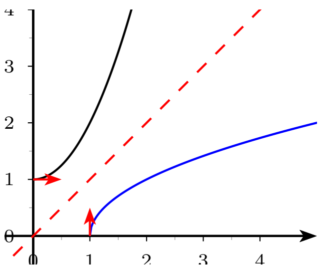
Si f est une bijection de I sur $J = f(I)$, dérivable en $a \in I$, alors f^{-1} est dérivable en $y = f(a) \in J$ si et seulement si f' ne s'annule pas en $a = f^{-1}(y)$, et dans ce cas

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

On admet la dérivabilité pour le moment.
Pour se rappeler de la formule, il suffit de dériver $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ comme une fonction composée.

Explications

La courbe de la réciproque d'une application, correspond à la symétrique par rapport à la première bissectrice $y = x$. Cela revient à échanger les rôles de x et y.
Si $f'(x) = 0$, alors la tangente est horizontale. Lorsque l'on effectue la symétrie, cela donne une tangente verticale, c'est-à-dire une pente infinie. On comprend donc la condition $f'(x) \neq 0$.



C Dérivée et variations

Théorème 3.8

Soit f dérivable sur un **intervalle** I, alors

- f croissante sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ sur I.
- f décroissante sur I si et seulement si $f' \leqslant 0$ sur I.
- f constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.

Exemple

Donner un contre-exemple dans le cas où I n'est pas un intervalle.
Solution :
C'est faux si I n'est pas un intervalle. Par exemple $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Propriété 3.9

Si f est dérivable sur $]a, b[$,

- Si $f' > 0$ sur $]a, b[$ alors f est strictement croissante.
- Si $f' < 0$ sur $]a, b[$ alors f est strictement décroissante.

La réciproque est fausse.

Exemple

Donner un contre-exemple à la réciproque de la propriété précédente.
Solution :
$x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$, mais $f'(0) = 0$.

Propriété 3.10 *(« Réciproque »)*

Soit f dérivable sur I, f est strictement croissante sur I, si et seulement si $f' \geqslant 0$ sur I et f' ne s'annule sur aucun sous-intervalle ouvert de I.

On a une propriété équivalente pour strictement décroissante.

Définition 3.11 *(Point critique)*

On appelle **point critique** de f un point $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) = 0$.

Exemple

0 est un point critique de $x \mapsto x^2$, de $x \mapsto x^3$...
$\frac{\pi}{2}$ est un point critique de $x \mapsto \sin x$.

Théorème 3.12 *(Extremum et point critique)*

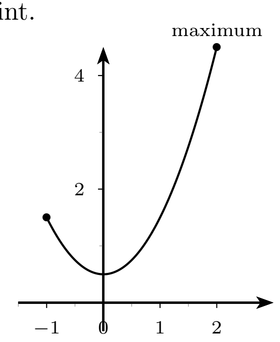
Soit f une fonction dérivable sur I, et $a \in I$ qui n'est pas une borne de I.
Si f admet un extremum *local* en a, **alors**, a est un point critique de f.

Preuve

(*idée de la preuve*) Si a correspond à un maximum ou minimum local de f, alors f est à la fois croissante et décroissante en a, donc $f'(a) \geqslant 0$ et $f'(a) \leqslant 0$.
Donc $f'(a) = 0$. ■

⚠ Une lecture très rigoureuse du théorème est importante :

1. C'est une implication et en général, la réciproque est fausse.
   Par exemple $x \mapsto x^3$ admet un point critique en 0, mais 0 n'est pas un extremum local.
2. L'extremum **local** suffit. La dérivation est une notion locale qui ne donne d'information que dans le voisinage immédiat du point.
3. Dans le théorème, a est supposé ne pas être une borne de I, sinon, c'est faux.
   Par exemple pour la fonction
   $$x \mapsto x^2 + \frac{1}{2} \text{ sur } I = [-1, 2].$$
   -1 et 2 sont des points d'extremums locaux et pourtant la dérivée ne s'annule pas en ces points (voir la figure ci-contre).



D Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Définition 3.13 *(Dérivée k-ième)*

Soit f définie sur un intervalle I (contenant au moins deux points) et $a \in I$.
On définit les dérivées successives de f (sous réserve d'existence) par récurrence :
Initialisation : Par convention, on pose $f^{(0)} = f$.
Hérédité : Soit $k \in \mathbf{N}^*$,

- si f admet une dérivée $(k-1)$-ième sur un voisinage de a,
- et si la dérivée $(k-1)$-ième est dérivable en a,

alors f admet une dérivée k-ième en a, que l'on note $f^{(k)}(a)$.

Explications

Il faut que f soit dérivable $(k-1)$ fois sur **un voisinage** de a, c'est-à-dire sur un petit intervalle ouvert qui contient a (« un peu autour de a »). En effet, pour définir la dérivée k-ième, on utilise le taux d'accroissement de la dérivée $(k-1)$-ième. Cela suppose que cette dérivée ne soit pas seulement définie en a, mais sur un voisinage de a. La notion de dérivée est une notion qui « s'étale » un peu autour du point.

Définition 3.14

f est dérivable k fois sur I si f admet une dérivée k-ième en tout point de I.
On note $\mathscr{D}^k(I)$ ou $\mathscr{D}^k(I, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables k fois sur I.

Définition 3.15 *(Fonction de classe $\mathscr{C}^k$)*

Pour $k \in \mathbf{N}$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ en a,
si f admet une dérivée k-ième sur un voisinage de a et si $f^{(k)}$ est **continue** en a.

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, si f est de classe $\mathscr{C}^k$ en tout point de I.
On note $\mathscr{C}^k(I)$ ou $\mathscr{C}^k(I, \mathbf{R})$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Remarque : Si $f \in \mathscr{C}^k(I, \mathbf{R})$, alors pour tout $p \leqslant k$, $f \in \mathscr{C}^p(I, \mathbf{R})$

Définition 3.16

f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en $a \in I$, si $\forall k \in \mathbf{N}$, f est de classe $\mathscr{C}^k$ en a.

f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, si $\forall k \in \mathbf{N}$, $\quad f \in \mathscr{C}^k(I)$.
On note $\mathscr{C}^\infty(I)$ ou $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbf{R})$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Exemple

Les fonctions usuelles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de dérivabilité.

E Convexité

Définition 3.17 *(Fonction convexe)*

Soit f une fonction définie et dérivable deux fois sur un intervalle I.
f est dite **convexe** sur I, si, et seulement si
$$\forall x \in I,\ f''(x) \geqslant 0.$$
f est dite **concave** sur I, si, et seulement si
$$\forall x \in I,\ f''(x) \leqslant 0.$$

Remarque : Une fonction peut être concave ou convexe sans être deux fois dérivables, mais il faut alors une autre définition qui sera vue plus tard dans l'année.
Ici, n'est traité qu'un cas particulier.

Exemple

Déterminer l'ensemble des fonctions deux fois dérivables qui sont à la fois convexe et concaves.

Solution :
Si f est deux fois dérivable et à la fois concave et convexe, alors sa dérivée seconde est nulle.
Or I est un intervalle, donc sa dérivée première est constante.
Ainsi, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in I,\ f'(x) = a$.
En intégrant, on trouve alors que f est une fonction affine.
La réciproque est évidente.

Exemple

Déterminer la convexité/concavité (ou rien), des fonctions suivantes sur $\mathbf{R}$.

1. $x \mapsto \mathrm{e}^x$.
2. $x \mapsto \ln(x)$.
3. $x \mapsto \sin(x)$.
4. $x \mapsto x^2$.
5. $x \mapsto \sqrt{x}$.

Solution :

1. $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est une fonction convexe.
2. $x \mapsto \ln(x)$ est une fonction concave.
3. $x \mapsto \sin(x)$ n'est ni convexe, ni concave sur $\mathbf{R}$.
4. $x \mapsto x^2$ est une fonction convexe.
5. $x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction concave.

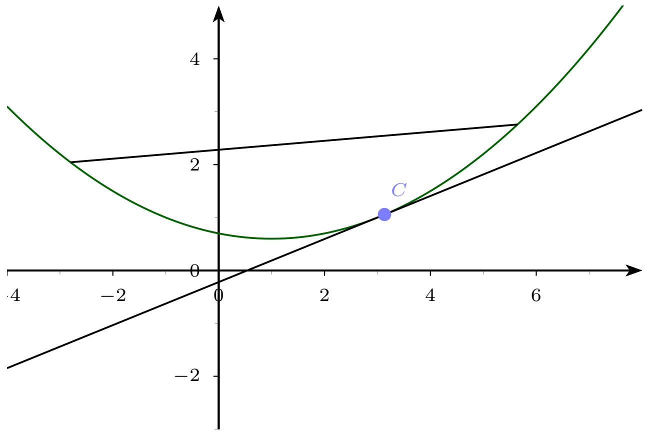
Théorème 3.18 *(Passage à l'opposé)*

Si f est deux fois dérivable sur un intervalle I, alors si f est convexe, $-f$ est concave, et réciproquement.

Preuve
Il suffit de dériver deux fois et on obtient l'opposé de la dérivée seconde. ■

Propriété 3.19 *(Inégalité de convexité)*

Si f est une fonction convexe, elle est au dessus de chacune de ses tangentes et en dessous de chacune de ses cordes.



Preuve
Dériver deux fois la différence, et utiliser le point en lequel les courbes sont confondues. ■

Définition 3.20 *(Point d'inflexion)*

Si f est une fonction définie sur I, et a un point de I (qui n'est pas un bord).
a est un **point d'inflexion** pour f, si f change de concavité en a.
Si f est deux fois dérivable sur I, alors un point d'inflexion correspond au changement de signe de la dérivée.

Propriété 3.21 *(Condition nécessaire pour un point d'inflexion)*

Si f est deux fois dérivable sur I, et $a \in I$ un point d'inflexion de f, alors $f''(a) = 0$.

Preuve
$x \mapsto x^3$ contient-elle un point d'inflexion sur $\mathbf{R}$? $x \mapsto \tan(x)$ contient-elle un point d'inflexion sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$? ■

F Dérivées partielles

Petite introduction aux dérivées partielles sans le moindre formalisme. Un chapitre en fin d'année reprendra ces notions.

Définition 3.22 *(Dérivée partielle)*

Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbf{R}^2$.
Soit $f\ :\ (x,y)\mapsto f(x,y)$ définie pour tout $(x,\,y)\in I\times J$.
Pour $(x,y)\in I\times J$, on définit les **dérivées partielles** de f (lorsqu'elles existent) par :

- La dérivée partielle de f par rapport à x en (x,y) est la dérivée de l'application partielle $f_y=f(\cdot,y)=(x\mapsto f(x,\,y))$.
  Elle se note
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=f_y'(x,y).$$
- La dérivée partielle de f par rapport à y en (x,y) est la dérivée de l'application partielle $f_x=f(x,\cdot)=(y\mapsto f(x,\,y))$.
  Elle se note
  $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f_x'(x,y).$$

Remarque : On peut généraliser sans difficultés à davantages de variables.

Remarque : Les dérivées partielles sont des fonctions réelles de deux variables.

Exemple

Soit $A:(x,\,y)\mapsto xy$ la fonction qui donne la surface d'un rectangle en fonction des longueurs de ses côtés.
La fonction est définie sur $\mathbf{R}^2$, et ses deux applications partielles sont dérivables pour tout $(x,\,y)\in\mathbf{R}^2$.
La dérivée de l'application partielle $A_y=A(\cdot,y)$ par rapport à x se note alors

$$\frac{\partial A}{\partial x}(x,y)=A_y'(x)=y.$$

Cela veut dire qu'à y fixé, la fonction a une pente constante, cette pente dépend de y. Plus on éloigne le plan de de l'origine, plus la pente est importante. Ainsi, pour un rectangle de longueur y fixée, un petit accroissement de la longueur x, augmentera d'autant plus la surface que y est grand (et ce, de façon proportionnelle).

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par $\forall\,(r,\theta)\in\mathbf{R}^2,\ f(r,\theta)=r\cos\theta$.
Étudier la dérivabilité des fonctions partielles et calculer les dérivées partielles si elles existent.
Solution :
Les deux fonctions partielles sont dérivables sur $\mathbf{R}$, et $\forall\,(r,\theta)\in\mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)=\cos(\theta)\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial\theta}(r,\theta)=-r\sin(\theta)\,.$$

Exemple

Dérivée partielle de la norme euclidienne $f\ :(x,y)\mapsto\sqrt{x^2+y^2}$ par rapport à une variable.
Solution :
La fonction est définie sur $\mathbf{R}^2$. Pour $y\neq0$, la fonction partielle suivant x est dérivable sur $\mathbf{R}$ et sa dérivée vaut :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
Par contre, pour $y=0$, la fonction n'est dérivable que sur $\mathbf{R}^*$ et la formule précédente reste valable.
De même par symétrie pour y.

Propriété 3.23

Soit f une fonction de deux variables définie sur une partie $A\subset\mathbf{R}^2$.
On suppose que f admet des dérivées partielles en tout point de A.
Soit $(x,\,y)\in A$ qui n'est pas sur un bord de A.

Si f admet un extremum local en A, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,\,y)=0$.

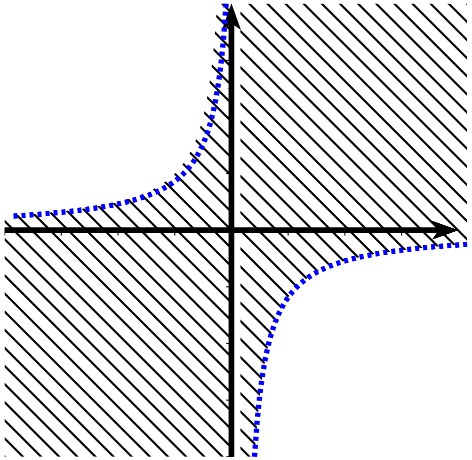
En général, la réciproque est fausse.

Exemple

Soit $f\ :(x,\,y)\mapsto\ln(1+xy)\,.$

1. Rercherche du domaine de définition.
   $f(x,\,y)$ est définie si, et seulement si $1+xy>0$, c'est-à-dire $xy>-1$.
   - Si $x<0$, alors $xy>-1\iff y<-\frac{1}{x}$.
   - Si $x=0$, alors $xy=0>-1$.
   - Si $x>0$, alors $xy>-1\iff y>-\frac{1}{x}$.

   On en déduit le domaine de définition :



2. Recherche d'un éventuel extremum.
   $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{1+xy}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{1+xy}$.
   donc f admet un unique point critique en $(0, 0)$.
   Montrons que ce n'est pas un extremum local.
   On considère $x > 0$ et on calcule $f(x, x) = \ln\left(1 + x^2\right) > 0 = f(0, 0)$.
   Donc si $(0, 0)$ était un extremum local, ce serait un minimum.
   Or pour $x > 0$ et $y = -x$ on trouve $f(x, -x) = \ln\left(1 - x^2\right) < 0 = f(0, 0)$ ce qui contredit la minimalité.
   Donc $(0, 0)$ n'est pas un extremum local (c'est un point col).
   Ainsi f n'admet pas d'extremum (ni local, ni global) sur son domaine de définition.

4 Éléments remarquables pour tracer la courbe

A Tangentes

Propriété 4.1 *(Tangente à une courbe)*

La courbe de f admet une tangente en a si et seulement si f est dérivable en a.
Dans ce cas, l'équation de la tangente est

$$T \,:\, y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Explications
La tangente est une droite affine qui a la même pente que la courbe au point a : $f'(a)$.
Elle passe par le point $(a, f(a))$, d'où l'expression voulue.

Les tangentes remarquables doivent apparaître sur la représentation graphique de la courbe (sous forme de flèches).

Par exemple, il est souvent important d'indiquer les tangentes horizontales, la tangente en 0, ou lorsque la courbe croise l'axe des abscisses...

B Asymptotes

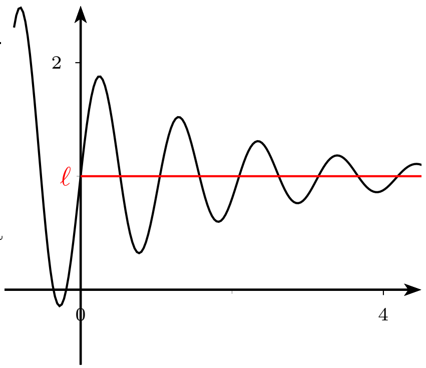
Définition 4.2 *(Asymptote horizontale à l'infini)*

La courbe de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$,
si f admet une limite finie en $+\infty$:

$$\exists \ell \in \mathbf{R}, \text{ tel que } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

La droite horizontale $y = \ell$ est l'asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

On a la même définition en $-\infty$.



Exemple

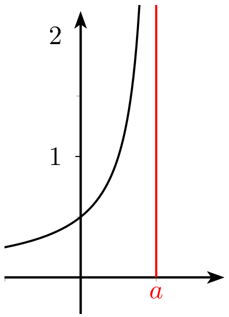
La droite $y = 0$ est asymptote à la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ à la fois en $+\infty$ et en $-\infty$.
La droite $y = 1$ est asymptote à courbe de $x \mapsto \frac{1}{x} + 1$ à la fois en $+\infty$ et en $-\infty$.
La courbe de la fonction $x \mapsto \sin x$ n'admet pas d'asymptotes horizontales.

Définition 4.3 *(Asymptote verticale en un point)*

La courbe de f admet une asymptote verticale en a,
si f admet une limite infinie en a :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty.$$

La droite verticale $x = a$ est l'asymptote à la courbe de f en a.

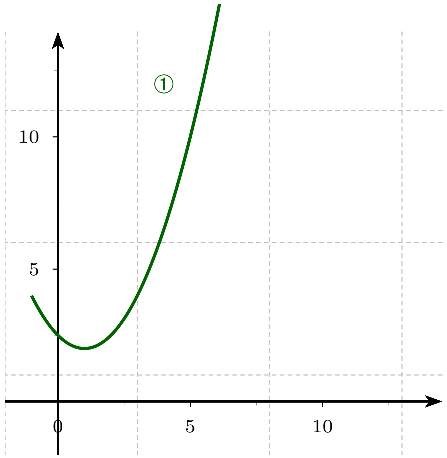


Exemple

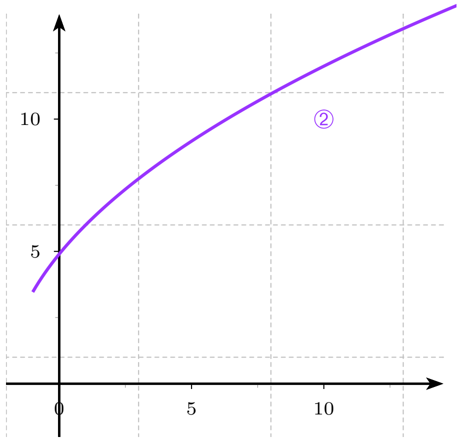
La droite $x = 0$ est asymptote verticale à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ en 0.
La droite $x = 1$ est asymptote verticale à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ en 1.

C Étude des branches infinies

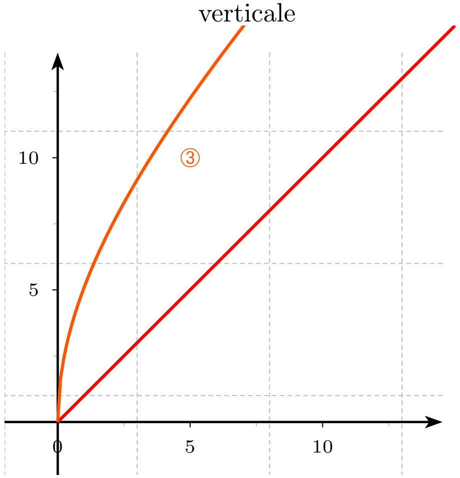
L'étude des branches infinies permet d'aller plus loin que le seul calcul des limites et donne l'idée de la forme de la courbe. Nous n'allons énoncer les résultats que pour $x \to +\infty$. Cela se généralise aisément pour $x \to -\infty$.
Lorsque la limite est finie, nous avons déjà vu que nous avons une asymptote horizontale : c'est facile. Lorsque la limite est infinie, nous souhaiterions savoir de quelle façon $f(x)$ tend vers l'infini.
Voici un certain nombre de situations possibles. Ce ne sont pas les seules, mais celles que vous devrez savoir identifier.



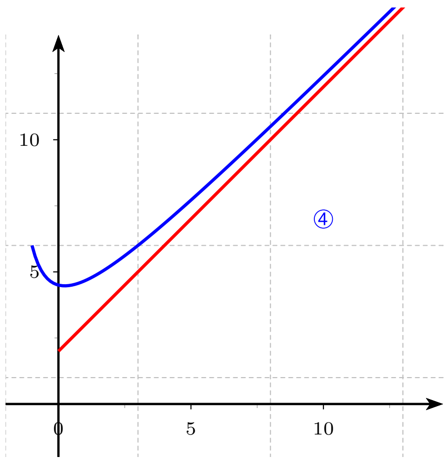
branche parabolique de direction verticale



branche parabolique de direction horizontale



branche parabolique de direction $y = ax$



asymptote oblique d'équation $y = ax + b$

- Le cas ① correspond à une courbe de type $x \mapsto x^2$, c'est-à-dire une parabole « tournée vers le haut ».
  On parle de *branche parabolique de direction Oy, ou verticale.*
- Le cas ② correspond à une courbe de type $x \mapsto \sqrt{x}$, c'est-à-dire une parabole « couchée ». On parle de *branche parabolique de direction Ox, ou horizontale.*
- Le cas ③ correspond à une courbe du type (du type $x \mapsto \sqrt{x} + ax$), c'est-à-dire une parabole « inclinée ». On parle de *branche parabolique de direction $y = ax$.*
- Le cas ④ correspond à une courbe de type $x \mapsto ax + b$.
  On parle de *droite asymptote d'équation $y = ax + b$.*

Nature des branches en $+\infty$

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

- si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$, alors $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale $y = \ell$ au voisinage de $+\infty$.
- si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$,
  - ① si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
  - ② si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
  - si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}^*$,
    - ③ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, alors $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $y = ax$.
    - ④ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = b \in \mathbf{R}$, alors $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

On peut définir de même les branches en $-\infty$.

Exemple

Donner les natures des branches infinies de $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto x(2 + \mathrm{e}^{-x})$.

Solution :

$x \mapsto x^2$ admet des branches paraboliques de direction (Oy) en $+\infty$ et en $-\infty$.
$x \mapsto \sqrt{x}$ admet une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.
$x \mapsto \mathrm{e}^x$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$ et une asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$.
$x \mapsto x(2 + \mathrm{e}^{-x})$ admet $y = 2x$ comme asymptote oblique en $+\infty$ et une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

Méthode *(Position par rapport à une asymptote)*

Lorsque la courbe admet une asymptote horizontale ou oblique, on peut déterminer la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'asymptote $y = ax + b$ en étudiant le signe de la différence.

Exemple

Étude de la branche en $+\infty$ de la courbe de

$$f : x \mapsto \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{x^2 - 4}.$$

Solution :
La courbe est définie pour $x \notin \{-2, 2\}$.
Si on factorise par $3x^3$ au numérateur et x^2 au dénominateur, on trouve

$$\forall x > 4, \quad f(x) = 3x \frac{1 - \frac{5}{3x} + \frac{2}{3x^3}}{1 - \frac{4}{x}}.$$

En $+\infty$, le quotient tend vers 3, et par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$.
Donc la courbe de f admet $y = 3x$ comme *direction* asymptotique en $+\infty$.
(Cela se voyait directement par la factorisation des termes dominants).

$$\forall x > 2,\ f(x) - 3x = \frac{3x^3 - 5x^2 + 2 - 3x(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = \frac{-5x^2 + 12x + 2}{x^2 - 4} = -5 \frac{1 - \frac{12}{5x} - \frac{2}{5x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}}.$$

La limite s'en déduit directement : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 3x = -5$.

Donc $y = 3x - 5$ est *asymptote oblique* à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Position par rapport à la courbe :

$$\forall x > 2,\ f(x) - (3x - 5) = \frac{3x^3 - 5x^2 + 2 - (3x - 5)(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = \frac{12x - 18}{x^2 - 4} = \frac{12}{x} \frac{1 - \frac{18}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}}.$$

La deuxième fraction tend vers 1 quand $x \to +\infty$, et elle est donc positive à partir d'une certaine valeur.
Ainsi $f(x) - (3x - 5)$ est du signe de $\frac{12}{x}$ pour x suffisamment grand,
donc $f(x) - (3x - 5)$ est positive au voisinage de $+\infty$.
Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Il faut bien distinguer une situation avec une asymptote, d'une situation avec branche parabolique.
Dans le cas d'une asymptote, horizontale, verticale ou oblique, la courbe s'approche infiniment de la droite asymptote. En revanche, pour une branche parabolique, la *direction* de la courbe tend à s'approcher de la direction asymptotique, mais la courbe s'éloigne inexorablement d'une quelconque droite ayant cette direction.
Par exemple, $x \mapsto \sqrt{x}$ a une pente qui se rapproche de plus en plus de l'horizontale : elle a donc une direction asymptotique horizontale. Par contre, elle s'éloignera infiniment de n'importe quelle droite d'équation $y = a$ (pour n'importe quel a, aussi grand soit-il).

5 Schéma d'étude d'une fonction

Méthode

Lorsque l'on étudie une fonction, on répond aux questions (dans l'ordre) :

1. **Domaine de définition** de la fonction, éventuellement domaine de continuité, dérivabilité...
2. **Domaine d'étude :**
   A priori, il faut étudier la fonction sur tout son domaine de définition, mais parfois, on peut réduire le domaine d'étude.
   - Si la fonction est T périodique, alors il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle (semi-ouvert) de longueur T, puis raisonner par translation.
   - Si la fonction est paire ou impaire, on peut diviser par deux le domaine d'étude puis raisonner par symétrie.
3. **Variations :**
   On étudie les variations de la fonction, on repère les éventuelles tangentes horizontales.
   On calcule les valeurs de f aux points remarquables.
4. **Limites, asymptotes, branches infinies :**
   On étudie les limites sur les points de discontinuité ou aux bords du domaine de définition.
   On repère les asymptotes verticales, horizontales, obliques ou les directions asymptotiques.
5. **Tracer le graphe**
   Lorsque c'est possible, tracer le graphe de la fonction : on a besoin de visualiser.
   Placer les asymptotes, points et tangentes remarquables...

Exemple

Étudier l'application : $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x}$.

Solution :
f est définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbf{R} \setminus \{-1; 0\}$.
Elle est continue et dérivable sur son domaine de définition.
On peut simplifier son expression : $\forall x \in \mathscr{D}_f$,

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x} = \frac{x^2 + x}{x^2 + x} + \frac{x^2 - 1}{x(x + 1)} = 1 + \frac{(x - 1)(x + 1)}{x(x + 1)} = 1 + \frac{x - 1}{x} = 2 - \frac{1}{x}$$

La courbe de f est simplement une hyperbole d'équation $x \mapsto \frac{1}{x}$ dont on a fait la symétrie par rapport à l'axe des abscisses (multiplication par -1) et translatée de 2 suivant l'axe des ordonnées.
Même si elle n'est pas définie en -1 d'après l'expression initiale, elle admet une limite finie en -1. On peut la *prolonger par continuité* en $x = -1$.

Exemple

Étudier l'application : $f : x \mapsto \frac{1}{2}\cos 2x - \cos x$.

Solution :

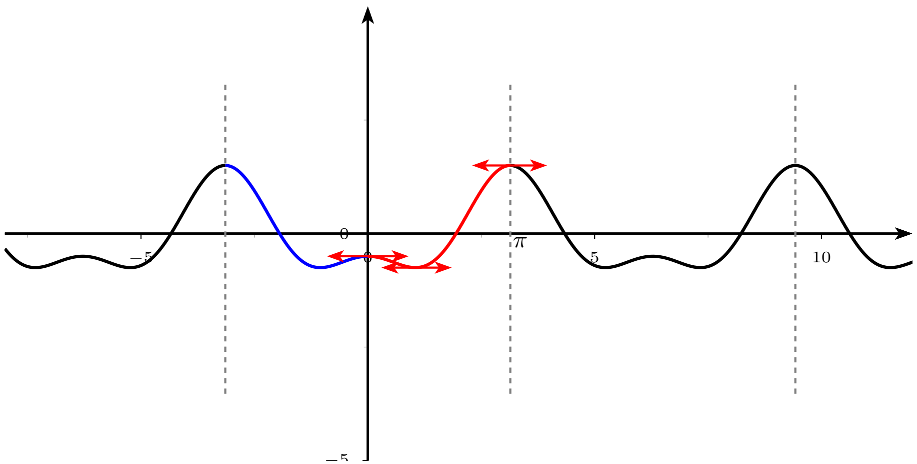
Domaine de définition : f est définie sur $\mathbf{R}$.
Elle est continue et dérivable sur son domaine de définition.
Réduction du domaine d'étude : f est 2π-périodique, donc il suffit de l'étudier sur un intervalle (semi-ouvert) de longueur 2π : $]-\pi, \pi]$. Or f est paire, donc symétrique par rapport à l'origine, il suffit donc de l'étudier sur $[0, \pi]$.
Variations :

$$\forall x \in [0,\pi], \qquad f'(x) = -\sin 2x + \sin x = -2\sin x\cos x + \sin x = \sin x(1 - 2\cos x).$$

$1 - 2\cos x \geqslant 0 \iff \cos x \leqslant \frac{1}{2} \iff x \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$ à l'intérieur du domaine d'étude.

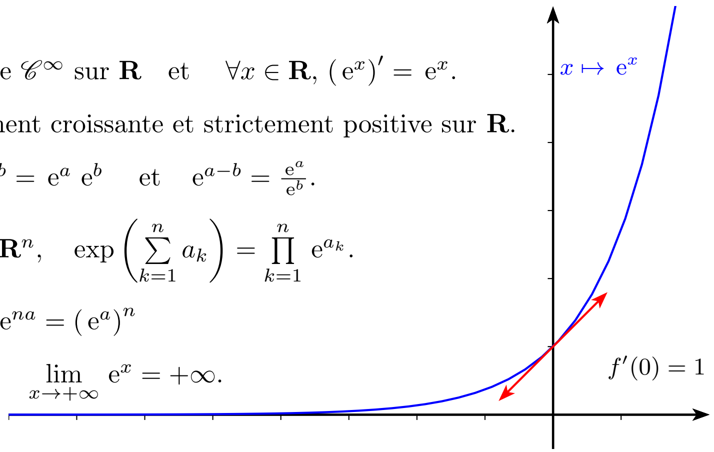
x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\sin x$	0	$+$	$\vert$	$+$	0
$1 - 2\cos x$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
f	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

Limites et asymptotes : sans objet.
Tracer la courbe : On trace sur $[0, \pi]$, on effectue une symétrie par rapport à l'axe des abscisses (parité), puis on translate (périodicité).



6 Applications usuelles

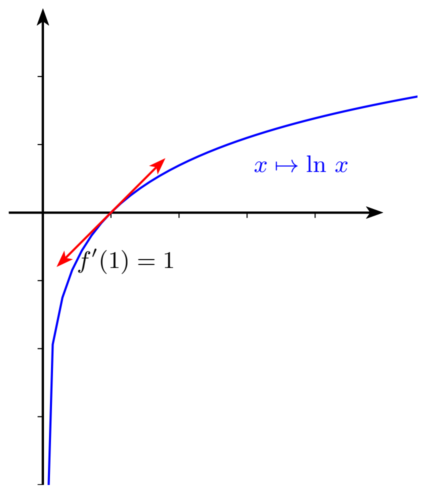
A Exponentielle



- $e^0 = 1$
- $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$, $(e^x)' = e^x$.
- $x \mapsto e^x$ est strictement croissante et strictement positive sur $\mathbf{R}$.
- $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2$, $\quad e^{a+b} = e^a\, e^b \quad$ et $\quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.
- $\forall (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $\quad \exp\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \prod_{k=1}^{n} e^{a_k}$.
- $\forall a \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{Z}$, $\quad e^{na} = (e^a)^n$
- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\quad$ et $\quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

B Logarithme

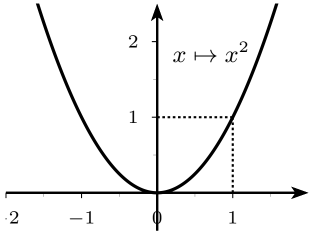
C'est l'application réciproque de l'exponentielle.

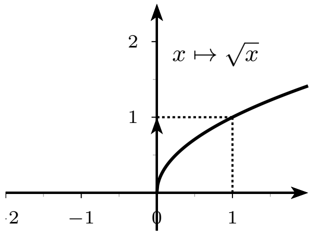


- $x \mapsto \ln x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
- $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.
- $\forall (a,b) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
- $\forall (a,b) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^2$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\forall (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^n$,
$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln a_k.$$
- $\forall a \in \mathbf{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbf{Z}$ $\quad \ln(a^n) = n \ln a$.
- $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$ $\quad$ et $\quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

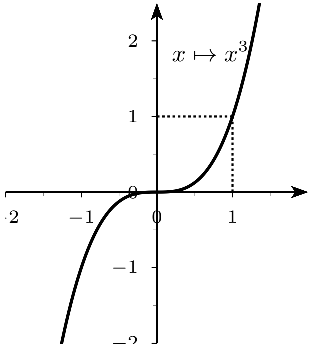
C Puissances et racines usuelles

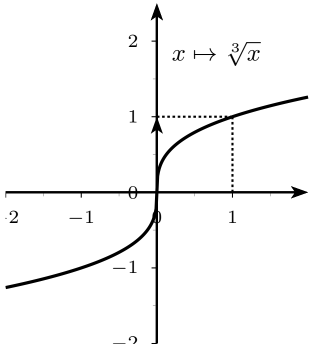
$x \mapsto x^2$ est une fonction paire de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.
Elle induit une bijection de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$. La réciproque est la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$.
$x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
La fonction racine n'est pas dérivable en 0.





$x \mapsto x^3$ est une fonction impaire de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.
Elle réalise une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. La réciproque est la fonction racine cubique $x \mapsto \sqrt[3]{x}$.
$x \mapsto x^3$ est continue sur $\mathbf{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^*$.
La fonction racine cubique n'est pas dérivable en 0.





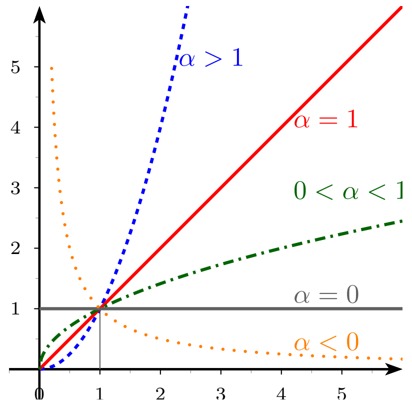
D Fonctions puissances

Les puissances entières ont déjà été vues dans les chapitre sur les nombres réels. On s'intéresse ici à l'étude des courbes des puissances à exposant réel quelconque, (ce qui implique des restrictions sur le domaine de définition).
Pour $\alpha \in \mathbf{R}$, on définit la puissance d'exposant α par

$$p_\alpha : \begin{cases} \mathbf{R}_+^* & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}. \end{cases}$$

⚠ Les fonctions sont définies pour $x > 0$ sinon le logarithme n'a pas de sens.
Ne **jamais** écrire $\cancel{(-1)^x}$.

- La fonction puissance est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$,
- La fonction puissance est strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$,
- $\forall x > 0, \quad p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$,
- - si $\alpha > 0$, stricte croissance sur $\mathbf{R}_+^*$,
  - si $\alpha < 0$, stricte décroissance sur $\mathbf{R}_+^*$,
  - si $\alpha = 0$, constante égale à 1 sur $\mathbf{R}_+^*$.
- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2, \quad \forall (a, b) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^2,$
  $$(ab)^\alpha = a^\alpha\, b^\alpha \quad \text{et} \quad a^{\alpha+\beta} = a^\alpha\, a^\beta.$$



Remarque : Pour $\alpha > 0$, on peut prolonger la fonction par continuité avec $p_\alpha(0) = 0$.
Pour $\alpha = 0$, on peut prolonger la fonction par continuité avec $p_\alpha(0) = 1$.

Pour se souvenir des formes des courbes :

- Pour $\alpha > 1$, prendre la fonction $x \mapsto x^2$ comme modèle,
- Pour $\alpha = 1$, c'est la fonction identité $x \mapsto x$,
- Pour $1 > \alpha > 0$, prendre la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ comme modèle,
- Pour $\alpha = 0$, c'est la fonction constante $x \mapsto 1$,
- Pour $\alpha < 0$, prendre la fonction $x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x}$ comme modèle.

⚠ *(puissance entière $\geqslant 0$)* Pour $n \in \mathbf{N}$, $x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbf{R}$.
(puissance entière < 0) Pour $n \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$, $x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbf{R}^*$.
(racine paire) Pour $p \in \mathbf{N}$, $x \mapsto \sqrt[2p]{x} = x^{\frac{1}{2p}}$ est définie sur $\mathbf{R}_+$.
(racine impaire) Pour $p \in \mathbf{N}$, $x \mapsto \sqrt[2p+1]{x} = x^{\frac{1}{2p+1}}$ est définie sur $\mathbf{R}_+$.
(quelconque) Pour $\alpha \in \mathbf{R}$ quelconque, en général, $x \mapsto x^\alpha$ définie sur $\mathbf{R}_+^*$
(éventuellement prolongeable par continuité en 0 si $\alpha \geqslant 0$).

E Exponentielle et logarithme en base a

Définition 6.1

Pour tout $a > 0$, on définit l'exponentielle de base a par $x \mapsto a^x$.

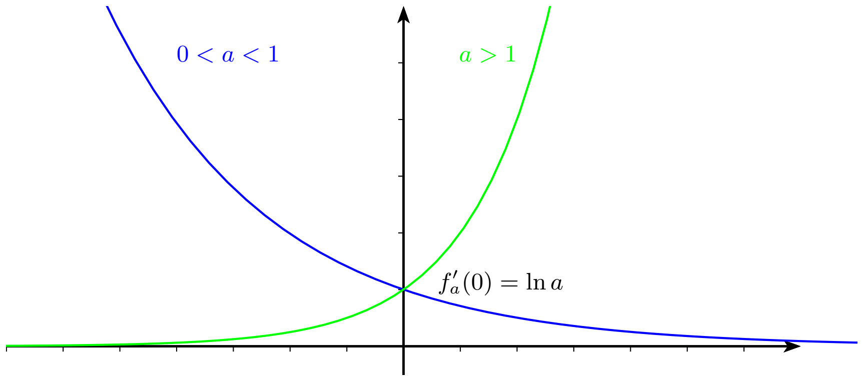
L'exponentielle vue plus haut, correspond à l'exponentielle en base e. On rappelle que $e \approx 2,71$, et que $e \notin \mathbf{Q}$.

Propriété 6.2

L'application $f_a \;:\; x \mapsto a^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad f_a'(x) = (\ln a)\, a^x.$$

- si $a > 1$, $\quad x \mapsto a^x$ est strictement croissante et strictement positive sur $\mathbf{R}$,
- si $0 < a < 1$, $\quad x \mapsto a^x$ est strictement décroissante et strictement positive sur $\mathbf{R}$.



Définition 6.3

Si $a \neq 1$, le logarithme en base a est l'application réciproque de l'exponentielle en base a. Il est défini par

$$\forall x > 0, \quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Le logarithme népérien est le logarithme en base e.

Exemple

Logarithme en base 10 en physique, logarithme en base 2 en informatique...

F Croissances comparées

Propriété 6.4

- *la puissance l'emporte sur le logarithme*

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2,\ \beta > 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} x^\beta \left|\ln x\right|^\alpha = 0.$$

- *l'exponentielle l'emporte sur la puissance « fixe »*

$$\forall a > 1,\ \forall \alpha \in \mathbf{R}, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x |x|^\alpha = 0.$$

Preuve

Cette preuve peut être sautée en première lecture.

- Logarithme :

$\star$ On va montrer la croissance comparée pour le logarithme en $+\infty$ avec $\alpha = 1$ et $\beta > 0$. Nous verrons que tous les autres cas en découlent directement. On suppose donc $\alpha = 1$ et $\beta > 0$.
Si pour $x > 0$, on pose $f(x) = \ln x - x$. f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$.
f' est négative sur $[1, +\infty[$, donc décroissante sur cet intervalle.
Or $f(1) = -1 < 0$, donc $\forall x \geqslant 1$, $f'(x) < 0$.

$$\forall x \geqslant 1, \quad \ln x \leqslant x$$

En particulier, si on choisit $\gamma \in]0; \beta[$, alors pour $x \geqslant 1$, on a $x^\gamma \geqslant 1$
Donc la relation précédente reste vraie si on remplace x par x^γ et on obtient :

$$\text{pour } x \geqslant 1 \quad \gamma \ln x = \ln x^\gamma \leqslant x^\gamma \Rightarrow 0 \leqslant \frac{\gamma \ln x}{x^\beta} \leqslant x^\gamma \frac{1}{x^\beta}$$
$$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{\ln x}{x^\beta} \leqslant \frac{1}{\gamma x^{\beta-\gamma}} \qquad (\text{car } \gamma > 0)$$

Or $\beta - \gamma > 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\gamma x^{\beta - \gamma}} = 0$

Donc par le théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\beta} = 0$.

$\star$ On peut généraliser ce résultat pour $\alpha \in \mathbf{R}$ quelconque. En effet,

  – si $\alpha < 0$, alors pour $x \geqslant 1$, $\ln^\alpha(x) \leqslant \ln x$, et limite s'obtient par comparaison.

  – si $\alpha > 1$, alors on peut étudier $\dfrac{\ln x}{x^{\beta/\alpha}}$ avec $\beta/\alpha > 0$.
  Si la limite est nulle (ce qui est le cas), alors elle reste nulle, une fois mise à la puissance $\alpha > 1$.

$\star$ Pour la limite en 0 on fait le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ et on en déduit la limite voulue.

- Exponentielle : C'est une conséquence directe du point précédent sur le logarithme.

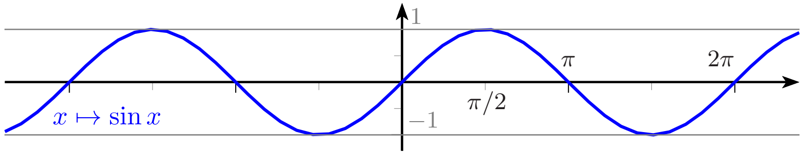
$$\mathrm{e}^x \left|x\right|^\alpha = \mathrm{e}^x\, \mathrm{e}^{\alpha \ln |x|} = \mathrm{e}^{x + \alpha \ln |x|} = \mathrm{e}^{x\left(1 + \alpha \frac{\ln |x|}{x}\right)}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^{\frac{\ln x}{x}}=0$ (d'après le point précédent)
Par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1+\alpha^{\frac{\ln x}{x}}\right)=+\infty$. Donc par composition des limites, on a le résultat voulu. De même en $-\infty$.

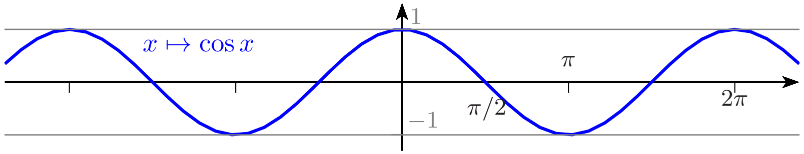
$\blacksquare$

G Fonctions circulaires

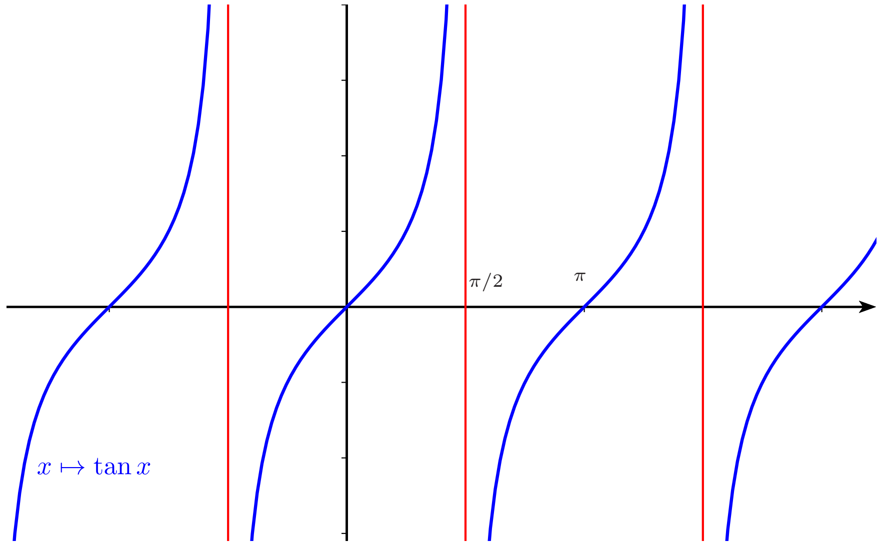
Voir le chapitre sur les complexes et la trigonométrie pour les principales propriétés.



Fonction sinus



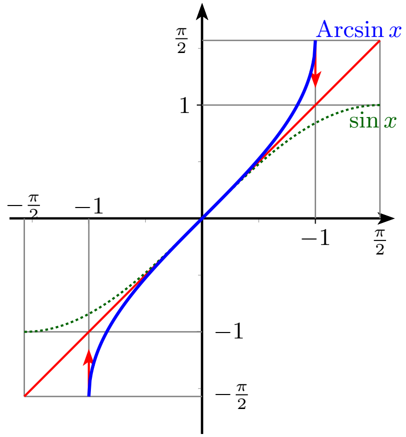
Fonction cosinus



Fonction tangente

H Fonctions circulaires réciproques

arcsinus :



- La restriction de sin à $\left[-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right]$
  - est continue
  - et strictement croissante.
- $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

D'après le théorème de la bijection continue,
elle réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,\,1]$.
Sa réciproque, que l'on note arcsin, est elle-même continue et strictement croissante sur $[-1,\,1]$.
On obtient immédiatement les valeurs remarquables

$$\mathrm{Arcsin}\,(-1)=-\frac{\pi}{2},\quad \mathrm{Arcsin}\,(1)=\frac{\pi}{2}\quad\text{et}\quad \mathrm{Arcsin}\,(0)=0.$$

La courbe de arcsin s'obtient par la symétrie de celle du sinus (sur $\left[-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right]$) par la droite $y=x$.
La fonction sinus étant **impaire**, sa réciproque l'est aussi (immédiat).
La fonction sinus est dérivable (et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left[-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right]$ et sa dérivée ne s'annule pas sauf en $-\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{\pi}{2}$.
Donc sa réciproque est elle-même dérivable (et même $\mathscr{C}^\infty$) sur $[-1,\,1]\setminus\left\{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\left]-1,\,1\right[$.
En -1 et en 1, la courbe de arcsin admet des demi-tangentes verticales.

$$\forall x\in]-1,\,1[,\ \mathrm{Arcsin}'\,(x)=\frac{1}{\cos\left(\mathrm{Arcsin}\,(x)\right)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

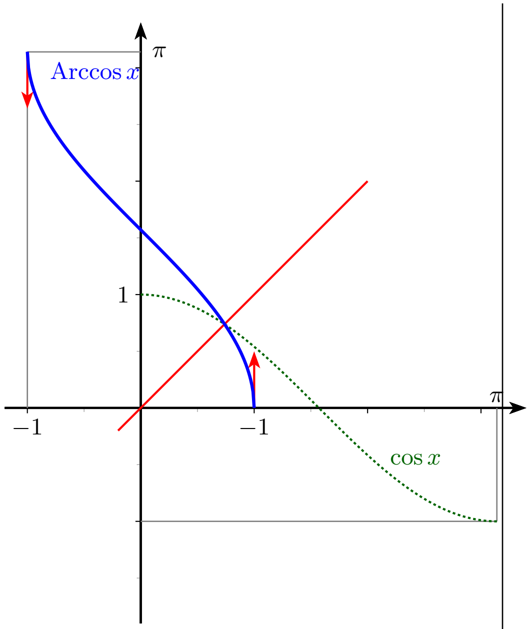
En effet, on rappelle que $\mathrm{Arcsin}\,(x)\in\left]-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right[$, *donc*
$\cos\left(\mathrm{Arcsin}\,(x)\right)=+\sqrt{1-\sin^2\left(\mathrm{Arcsin}\,(x)\right)}=\sqrt{1-x^2}$.

Exercice
Faire de même, l'étude de Arccos et arctan.

Solution :

arccosinus :

- La restriction de cos à $[0,\, \pi]$
  - est continue
  - et strictement décroissante.
- $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$.



D'après le théorème de la bijection continue,
elle réalise une bijection de $[0,\, \pi]$ sur $[-1,\, 1]$.
Sa réciproque, que l'on note arccos, est elle-même continue et strictement décroissante sur $[-1,\, 1]$.
On obtient immédiatement les valeurs remarquables $\text{Arccos}\,(-1) = \pi$, $\text{Arccos}\,(1) = 0$ et $\text{Arccos}\,(0) = \frac{\pi}{2}$.
La courbe de arccos s'obtient par la symétrie de celle du cosinus (sur $[0,\, \pi]$) par la droite $y = x$.
La fonction cosinus est dérivable (et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,\, \pi]$ et sa dérivée ne s'annule pas sauf en 0 et en π.
Donc sa réciproque est elle-même dérivable (et même $\mathscr{C}^\infty$) sur $[-1,\, 1] \setminus \{\cos(0)\,,\, \cos(\pi)\} =]-1,\, 1[$.
En -1 et en 1, la courbe de arccos admet des demi-tangentes verticales.

$$\forall x \in]-1,\, 1[,\ \text{Arccos}\,'(x) = \frac{1}{-\sin(\text{Arccos}\,(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En effet, on rappelle que $\text{Arccos}\,(x) \in]0,\, \pi[$, *donc* $\sin(\text{Arccos}\,(x)) = +\sqrt{1-\cos^2(\text{Arccos}\,(x))} = \sqrt{1-x^2}$.

arctangente :

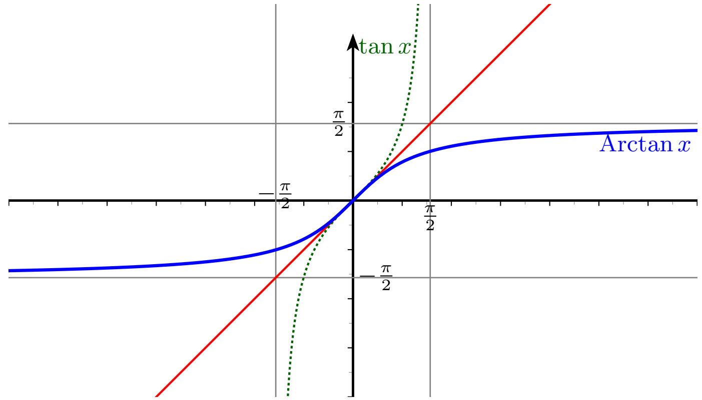
- La restriction de tan à $\left]-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right[$
  - est continue
  - et strictement croissante.
- $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.

D'après le théorème de la bijection continue,
elle réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $]-\infty,\, +\infty[= \mathbf{R}$.
Sa réciproque, que l'on note arctan, est elle-même continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
On obtient immédiatement les valeurs remarquables

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{Arctan}\,(x) = -\dfrac{\pi}{2}$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{Arctan}\,(x) = \dfrac{\pi}{2}$,
- $\text{Arctan}\,(0) = 0$, $\text{Arctan}\,(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$ et $\text{Arctan}\,(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

La courbe de arctan s'obtient par la symétrie de celle de la tangente (sur $\left]-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right[$) par la droite $y = x$.
La fonction tan étant **impaire**, sa réciproque l'est aussi (immédiat).
Sa courbe admet des asymptotes horizontales : $y = -\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$ et $y = \frac{\pi}{2}$ en $+\infty$.
La fonction tangente est dérivable (et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right]-[$ et sa dérivée ne s'annule pas.
Donc sa réciproque est elle-même dérivable (et même $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbf{R}$.

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \text{Arctan}\,'(x) = \frac{1}{\tan'(\text{Arctan}\,(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$



On remarque que l'inégalité $\tan(x) \geqslant x$ sur $\left[0,\, \frac{\pi}{2}\right[$ se traduit, après symétrie, par $\text{Arctan}\,(x) \leqslant x$ sur $\mathbf{R}_+$.

I Fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont construites sur le modèle des fonctions trigonométriques à partir des formules d'Euler.
On considère les exponentielles avec arguments réels, au lieu d'imaginaires purs.
Il en découle un certain nombre de similitudes dans les propriétés.
On parle aussi de trigonométrie *hyperbolique*.

Définition 6.5 *(fonctions hyperboliques)*

La fonction **sinus hyperbolique** est définie par

$$\mathrm{sh} : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{sh}\,(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{array} \right.$$

La fonction **cosinus hyperbolique** est définie par

$$\mathrm{ch} : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{ch}\,(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{array} \right.$$

La fonction **tangente hyperbolique** est définie par

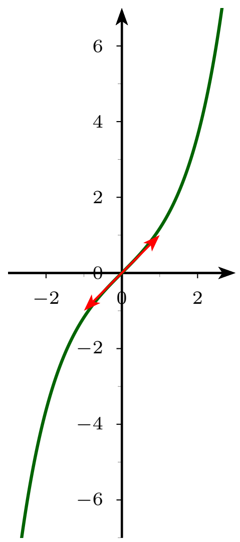
$$\mathrm{th} : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{th}\,(x) = \dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{array} \right.$$

Propriété 6.6 *(sinus hyperbolique)*

sinus hyperbolique :

- sh est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ (somme).
- sh est impaire.
- $\forall x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}\,(x) > 0$.
  sh est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{sh}\,(x) = +\infty$
  la courbe de sh admet une branche parabolique de direction verticale en $+\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{sh}\,(x) = -\infty$
  la courbe de sh admet une branche parabolique de direction verticale en $-\infty$.

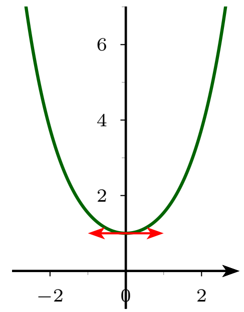
Sur $\mathbf{R}_+$ la courbe est au dessus de la droite $y = x$.



Propriété 6.7 *(cosinus hyperbolique)*

cosinus hyperbolique :

- ch est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et strictement positive.
- ch est paire.
- $\mathrm{ch}\,(0) = 1$ qui est le minimum de la fonction.
- $\forall x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}\,(x)$.
  ch est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{ch}\,(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{ch}\,(x) = +\infty$
  la courbe de sh admet des branches paraboliques de direction verticale en $-\infty$ et $+\infty$.



Propriété 6.8

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$

C'est le pendant de la relation de Pythagore pour les fonctions circulaires, mais ici, il y a un « − » au lieu du « + ».
On peut également trouver beaucoup d'autres relations sur le modèle de celles qui existe pour les fonctions circulaires.

Propriété 6.9

ch et sh sont respectivement la partie paire et impaire de exp.

Explications

On avait vu au début de l'année, que toute fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ peut se décomposer de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
La décomposition est alors

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Pour l'exponentielle, on retrouve exactement le cosinus hyperbolique pour la partie paire et le sinus hyperbolique pour la partie impaire.
Cet décomposition et l'unicité, permettent de retrouver facilement des forumles de trigonométrie hyperbolique en s'aidant sur le modèle de « partie réelle », « partie imaginaire » pour la trigonométrie du cercle.

Exemple

Soient a et b dans $\mathbf{R}$.

Exprimer $\mathrm{ch}\,(a+b)$ et $\mathrm{sh}\,(a+b)$ en fonction de $\mathrm{ch}\,(a)$, $\mathrm{ch}\,(b)$, $\mathrm{sh}\,(a)$ et $\mathrm{sh}\,(b)$.

Solution :

Pour $x \in \mathbf{R}$, on considère $\mathrm{e}^{(a+b)x}$ dont on voit que la partie paire et $\mathrm{ch}\,((a+b)x)$ et la partie impaire $\mathrm{sh}\,((a+b)x)$.

Or $\mathrm{e}^{(a+b)x} = \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{e}^{bx}$

$$= (\mathrm{ch}\,(ax)+\mathrm{sh}\,(ax))\,(\mathrm{ch}\,(bx)+\mathrm{sh}\,(bx))$$
$$= \mathrm{ch}\,(ax)\mathrm{ch}\,(bx)+\mathrm{sh}\,(ax)\mathrm{sh}\,(bx)+\mathrm{ch}\,(ax)\mathrm{sh}\,(bx)+\mathrm{sh}\,(ax)\mathrm{ch}\,(bx).$$

Or, on remarque que $x \mapsto \mathrm{ch}\,(ax)\mathrm{ch}\,(bx)+\mathrm{sh}\,(ax)\mathrm{sh}\,(bx)$ est paire et $x \mapsto \mathrm{ch}\,(ax)\mathrm{sh}\,(bx)+\mathrm{sh}\,(ax)\mathrm{ch}\,(bx)$ est impaire.

Donc par unicité de la décomposition, $\mathrm{ch}\,((a+b)x) = \mathrm{ch}\,(ax)\mathrm{ch}\,(bx)+\mathrm{sh}\,(ax)\mathrm{sh}\,(bx)$ et $\mathrm{sh}\,((a+b)x) = \mathrm{ch}\,(ax)\mathrm{sh}\,(bx)+\mathrm{sh}\,(ax)\mathrm{ch}\,(bx)$.

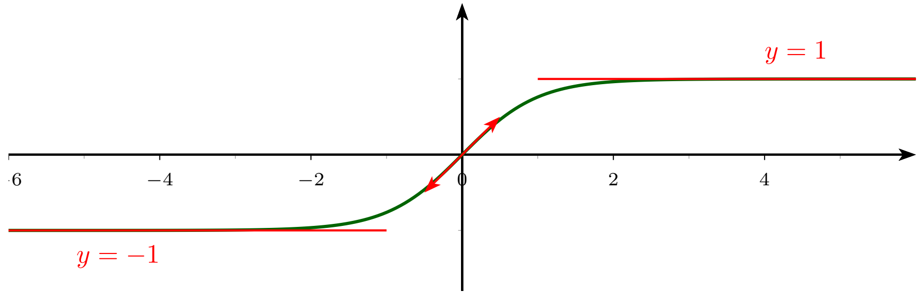
En particulier pour $x=1$, on trouve

$$\mathrm{ch}\,(a+b) = \mathrm{ch}\,(a)\mathrm{ch}\,(b)+\mathrm{sh}\,(a)\mathrm{sh}\,(b) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\,(a+b) = \mathrm{ch}\,(a)\mathrm{sh}\,(b)+\mathrm{sh}\,(a)\mathrm{ch}\,(b).$$

Propriété 6.10 *(tangente hyperbolique)*

tangente hyperbolique :

- th est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.
- th est impaire.
- $\mathrm{th}\,(0) = 0$.
- $\forall x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$.
  th est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{th}\,(x) = -1$.
  la courbe de th admet une asymptote horizontale $y=-1$ en $-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}\,(x) = 1$.
  la courbe de th admet une asymptote horizontale $y=1$ en $+\infty$.



Sur $\mathbf{R}_+$ la courbe est sous la droite $y=x$.

7 Extension aux fonctions à valeurs complexes

On considère à présent les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ (ou une partie de $\mathbf{R}$) et à valeurs complexes.

⚠ Seule l'image est complexe, le « x » est réel.

Les notions de continuité, de dérivabilité... vues pour les fonctions réelles s'étendent aux fonctions à valeurs complexes.

Par contre, toutes les notions qui font intervenir des **inégalités** ne sont plus valables. Par exemple, il n'y a

- **pas** de fonction majorée, minorée... sur $\mathbf{C}$,
- **pas** de théorème des valeurs intermédiaires,
- **pas** de théorème des bornes atteintes,
- **pas** de monotonie,
- ...

Définition 7.1

Soit $f : I \to \mathbf{C}$, avec $I \subset \mathbf{R}$,

- f est continue en $a \in I$, si, et seulement si $\mathfrak{Re}\,(f)$ et $\mathfrak{Im}\,(f)$ le sont.
- f est dérivable en $a \in I$, si, et seulement si $\mathfrak{Re}\,(f)$ et $\mathfrak{Im}\,(f)$ le sont.
  Dans ce cas $f'(a) = (\mathfrak{Re}\,(f))'\,(a) + i\,(\mathfrak{Im}\,(f))'\,(a)$.
- f est bornée sur I, si, et seulement si $|f|$ est bornée.

Théorème 7.2 *(Opérations)*

Les opérations sur les dérivées vues dans le cas réel (combinaison linéaire, produit, quotient) restent valables pour les fonctions à valeurs complexes.

Preuve

Pour la somme, c'est immédiat.

Pour le produit, il suffit de faire le calcul (la dérivabilité est immédiate).

$$\begin{aligned}((a+ib)(c+id))' &= (ac-bd+i(bc+ad))' \\ &= a'c+ac'-b'd-bd'+i(b'c+bc'+a'd+ad'). \\ (a+ib)'(c+id)+(a+ib)(c+id)' &= (a'+ib')(c+id)+(a+ib)(c'+id') \\ &= a'c+ac'-b'd-bd'+i(b'c+bc'+a'd+ad').\end{aligned}$$

Ce qui donne l'inégalité cherchée.

Pour le passage à l'inverse, on remarque que si a et b ne sont pas toutes les deux nulles en x, alors on peut définir

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

La fonction inverse est donc dérivable d'après le cas réel.
On peut donc écrire $1 = \frac{1}{a+ib}(a+ib)$ et dériver cette expression.

$$0 = \left(\frac{1}{a+ib}(a+ib)\right)' = \frac{1}{a+ib}(a'+ib') + \left(\frac{1}{a+ib}\right)'(a+ib).$$

Ce qui donne immédiatement le résultat voulu. ∎

Exemple

Soit $f\ : x \mapsto \mathrm{e}^{ix}$.
f est continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ (car cos et sin le sont). Elle est même de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$.

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = -\sin(x) + i\cos(x) = i\left(\cos(x) + i\sin(x)\right) = i\,\mathrm{e}^{ix}.$$

Propriété 7.3

Pour toute fonction φ définie sur I et à valeurs complexes.
$x \mapsto \exp(\varphi(x))$ est au moins de même régularité que φ.
Si φ est dérivable en x, alors $\exp(\varphi)$ l'est aussi et

$$\exp(\varphi)'(x) = \varphi'(x)\exp(\varphi(x)).$$

Preuve

En passant aux parties réelles et imaginaires. ∎