# Primitives et intégration

« Il ne faut pas uniquement intégrer. Il faut aussi désintégrer. C'est ça la vie. C'est ça la philosophie. C'est ça la science. C'est ça le progrès, la civilisation. »
*La Leçon*, Ionesco

**Introduction historique :** Au III$^{\text{ème}}$ av. J.C., **Archimède** propose de calculer une surface ou un volume en sommant une multitude d'*indivisibles*. Ainsi, une sphère est considérée comme un empilement de lamelles circulaires très fines dont on somme les volumes élémentaires (imaginer une tomate coupée en fines tranches).
Les arabes puis l'occident moderne utiliseront cette méthode avec dextérité pour calculer de nombreuses aires et volumes. Mais les grandes avancées théoriques n'arriveront qu'au XVII$^{\text{ème}}$ siècle avec Pascal, puis Newton et Leibniz. Il n'est pas étonnant de retrouver ici des grands noms du calcul différentiel : l'intégrale, comme le calcul différentiel entretient dès l'origine un lien très fort avec l'infiniment petit.
**Newton** (1642-1727) définit l'intégrale comme une dérivation à l'envers.
**Leibniz** (1646-1716) s'intéresse davantage à l'aspect sommatoire de l'intégrale comme une généralisation de la somme discrète $\sum$. Il introduit les notations actuelles :

$$\int \quad \text{désigne un grand } S \text{ comme « Somme » et } \mathrm{d}x \text{ désigne l'infiniment petit.}$$

Le terme d'intégrale apparaît pour la première fois dans sa correspondance. Il énonce le théorème fondamental qui sera démontré par Cauchy au XIX$^{\text{ème}}$.
Ces deux approches complémentaires font la richesse de l'intégrale : c'est à la fois une aire (somme d'aires *élémentaires*) et une primitive (*contraire* de la dérivée).
C'est à partir de cette idée, que **Riemann** (1826-1866) développera la première définition rigoureuse de l'intégrale.
**Lebesgue** (1875-1941) définit la théorie de la mesure grâce à laquelle on peut mesurer des objets infiniment petits. Le calcul d'aires s'en trouve révolutionné et donne naissance à l'intégrale de Lebesgue (pas à votre programme).

**Notations :** La mention du segment $[a, b]$ dans les définitions et théorèmes sous-entend que $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, avec $a < b$ (le segment contient au moins deux points).

## 1 Primitives

Ce chapitre commence par la partie purement calculatoire (approche selon Newton) avec des calculs de primitive.
L'interprétation géométrique sera vue dans la seconde partie de ce chapitre.
**Notations :** Dans ce chapitre, $I$ et $J$ désignent des intervalles de $\mathbf{R}$ qui contiennent au moins deux éléments.
La mention du segment $[a, b]$ dans les définitions et théorèmes sous-entend que $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, avec $a < b$ (le segment contient au moins deux points).

### A Définition et structure

**Définition 1.1**

Soit $f : I \to \mathbf{R}$,
On dit que $F$ est une **primitive** de $f$ sur $I$ si $F$ est dérivable sur $I$ et $F' = f$.

**Explications**
Trouver une primitive, c'est faire l'opération inverse de la dérivation. La dérivée de la primitive donne la fonction « initiale ». C'est ainsi qu'il faudra se rappeler les primitives usuelles.

⚠ On a défini une primitive d'une fonction et non d'un réel. On parle donc d'une primitive de $f$ et non de $f(x)$.

**Propriété 1.2**

Une primitive sur $I$ est dérivable sur $I$ et en particulier continue.
Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^k(I, \mathbf{R})$, alors les primitives de $f$ sont de classe $\mathscr{C}^{k+1}(I, \mathbf{R})$.

**Preuve**
Immédiat avec la définition. ■

**Théorème 1.3**

Soit $f : I \to \mathbf{R}$, si $f$ admet une primitive $F$ sur un **intervalle** $I$, alors l'ensemble des primitives de $f$ sur $I$ est

$$\{F + \text{cste}, \quad \text{cste} \in \mathbf{R}\}.$$

**Exemple**
Donner les primitives de $x \mapsto x^3 - 5x + 2$.
**Solution :**
Ce sont toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{5}{2}x^2 + 2x + c$ avec $c \in \mathbf{R}$.

**Explications**

La primitive n'est **pas unique**.

Cela provient de ce que la dérivée fait « perdre de l'information » sur la courbe. Connaître la dérivée en tout point de la courbe ne permet pas de reconstruire la courbe. Il faut aussi avoir un point de départ.

Par exemple, si la dérivée de la fonction est $x \mapsto 2x$, alors on sait que la fonction est du type $x \mapsto x^2$. Par contre, cela peut être $x \mapsto x^2+1$ ou $x \mapsto x^2 - 2\pi$. Ces deux fonctions ont les mêmes pentes en tout point, mais elles sont simplement translatées verticalement l'une par rapport à l'autre.

Ainsi, lorsqu'on cherche une primitive, on a à disposition toutes fonctions dont les courbes sont translatées verticalement l'une par rapport à l'autre : elles ont les mêmes pentes en tout point, mais translatées.

**Formellement** (peut être sauté en première lecture) :

L'application qui à une fonction $f$ – dérivable – associe sa dérivée n'est pas injective. Chaque élément de l'image peut donc avoir potentiellement plusieurs antécédents : plusieurs primitives.

Par contre, les primitives n'étant translatées que d'une constante, il suffit d'avoir une information supplémentaire pour connaître exactement la primitive.

Ainsi, l'application $f \mapsto (f', f(0))$ est injective pour l'ensemble des fonctions dérivables : si on impose le passage par un point (par exemple $(0, f(0))$, cela fixe la constante $c$ de manière unique et l'application devient injective.

**Preuve**

Raisonnons par double inclusion : on note $E = \{F + \text{cste}, \quad \text{cste} \in \mathbf{R}\}$ et $\mathcal{P}$ l'ensemble des primitives de $f$.

$\forall \text{cste} \in \mathbf{R}$, $(F + \text{cste})' = F' = f$, donc $F + \text{cste} \in \mathcal{P}$. Ainsi $E \subset \mathcal{P}$.

Réciproquement si $G \in \mathcal{P}$, alors $G' = f = F'$, donc $(G - F)' = 0$.

Donc $G - F$ est constante sur $I$. Si on note cste cette constante, alors $G = F + \text{cste} \in E$.

donc $\mathcal{P} \subset E$, et par double inclusion $\mathcal{P} = E$. ∎

⚠ C'est faux si $I$ n'est pas un intervalle. Il faut alors plusieurs constantes car la translation verticale peut différer entre deux parties de $I$ qui ne se touchent pas.

**Exemple**

Donner toutes les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbf{R}^*$.

**Solution :**

Sur $\mathbf{R}_+^*$, les primitives de $f$ sont de la forme $x \mapsto \ln x + c_+$ avec $c_+ \in \mathbf{R}$.

Sur $\mathbf{R}_-^*$, les primitives de $f$ sont de la forme $x \mapsto \ln(-x) + c_-$ avec $c_- \in \mathbf{R}$.

Donc les primitives de $f$ sur $\mathbf{R}$, sont de la forme

$$\left\{ x \mapsto \begin{cases} \ln|x| + c_+ & \text{si } x > 0 \\ \ln|x| + c_- & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad (c_+, c_-) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

## B La notation intégrale

**Notation** *(signe intégrale)*

Pour $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$, et pour $a \in I$,
on note $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$.

*Remarque :* dans la notation $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, la fonction $f$ s'appelle l'**intégrande**.

**Preuve**

L'existence de la primitive est admise à ce stade.

Unicité : on suppose qu'il existe deux primitives $F$ et $G$ de $f$ qui s'annulent en $a$.

D'après le théorème 1.3, il existe une constante $k \in \mathbf{R}$ tel que $F = G + k$.

Or $G(a) + k = F(a) = 0$ et $G(a) = 0$, donc $k = 0$ et $F = G$.

D'où l'unicité de la primitive de $f$ qui s'annule en $a$. ∎

**Notation** *(Crochet)*

Pour $f \in \mathscr{C}^1([a, b])$, on note

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \big[f\big]_a^b = f(b) - f(a).$$

⚠ On fait l'hypothèse que la fonction soit de classe $\mathscr{C}^1$, pour s'assurer de l'existence de la primitive.

On verra au moment du chapitre sur l'intégration qu'on peut alléger un peu cette condition.

**Preuve**

Pour $x \in [a, b]$, $x \mapsto \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ désigne l'unique primitive de $f'$ qui s'annule en $a$.

Or $f$ est une primitive de $f'$. Ainsi, d'après le théorème 1.3, il existe une constante $k \in \mathbf{R}$ telle que

$$\forall x \in [a, b], \quad \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) + k.$$

Or la primitive s'annule en $a$, donc $f(a) + k = 0$, et $k = -f(a)$.

Pour $x = b$, on a donc bien $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$. C'est ce que l'on note $\big[f\big]_a^b$. ∎

**Propriété 1.4** *(Linéarité)*

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a,\, b]$, soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$\int_a^b f(t) + \lambda g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Preuve**

Si on note $F$ la primitive de $f$ qui s'annule en $a$ et $G$ la primitive de $g$ qui s'annule en $a$,

alors $(F+\lambda G)' = F' + \lambda G' = f + \lambda g$.
Donc $F + \lambda G$ est une primitive de $f + \lambda g$,
et elle s'annule évidemment en $a$. Ceci démontre bien que pour $x \in [a, b]$

$$\int_a^x f(t) + \lambda g(t)\,\mathrm{d}t = F(x) + \lambda G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En particulier pour $x = b$. ■

**Propriété 1.5**

$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

### Preuve

Si on note $F$ une primitive de $f$, alors $\int_a^b f = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f$. ■

### Exemple

Si on veut une primitive de $t \mapsto 3t - \cos t$, alors, on commence par chercher une primitive de $t \mapsto t$, et une primitive du cosinus, puis on utilise la linéarité :

$$\int_0^x (3t - \cos t)\ \mathrm{d}t = 3\int_0^x t\,\mathrm{d}t - \int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t = 3\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x - [\sin t]_0^x = \frac{3}{2}x^2 - \sin x.$$

## C Primitives usuelles

| Fonction | Primitive |
|---|---|
| $x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ | $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $\ln(\lvert x\rvert)$ |
| $\mathrm{e}^{\lambda x}, \lambda \in \mathbf{R}^*$ | $\dfrac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{\lambda}$ |
| $\ln(x)$ | $x\ln(x) - x$ |

| Fonction | Primitive |
|---|---|
| $\sin(x)$ | $-\cos(x)$ |
| $\cos(x)$ | $\sin(x)$ |
| $\tan(x)$ | $-\ln\lvert\cos(x)\rvert$ |

| Fonction | Primitive |
|---|---|
| $\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\arctan(x)$ |

On peut justifier toutes ces primitives en les dérivant. Celle du logarithme sera obtenue un peu plus loin par intégration par parties.

### Exemple *(À savoir refaire)*

Pour $x > 1$, calculer $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$.

**Solution :**
On s'inspire de ce qui a été fait avec les sommes et on écrit $t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$.
On peut alors décomposer la fraction en 2

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2}\frac{t+1-(t-1)}{(t+1)(t-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right).$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} &= \frac{1}{2}\left(\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{x-1}{1}\right) - \ln\left(\frac{x+1}{3}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{2}\ln(3).\end{aligned}$$

En particulier, $t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)$ est une primitive de $\dfrac{1}{t^2-1}$.

## D Formes composées

Pour $u$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

| Fonction | Primitive |
|---|---|
| $u'u^\alpha$, pour $\alpha \neq -1$ | $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ |
| $\dfrac{u'}{u}$ | $\ln\lvert u\rvert$ |
| $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u}$ |

| Fonction | Primitive |
|---|---|
| $u'e^u$ | $e^u$ |

| Fonction | Primitive |
|---|---|
| $u'\sin u$ | $-\cos u$ |
| $u'\cos u$ | $\sin u$ |
| … | … |

### Exemple

Trouver une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

**Solution :**
Si on pose $u : x \mapsto x^2 + 3$, on vérifie d'abord que $u$ est à valeurs strictement positive sur $\mathbf{R}$ et que la fonction dont on cherche une primitive est donc continue sur $\mathbf{R}$ : la fonction admet des primitives.
$u'(x) = 2x$ ce qui ressemble furieusement au numérateur. On voit donc que l'on a affaire à une fonction composée $g(u(x))$.

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{\frac{1}{2}u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

Donc une primitive est $x \to \sqrt{u(x)} = \sqrt{x^2+3}$.

**Méthode** *(Intégration de sinus et cosinus)*

Pour intégrer une fonction qui dépend des puissances de sinus et de cosinus,

- soit, on fait apparaître la dérivée d'une fonction composée,
- soit, on **linéarise** comme nous l'avons vu dans le chapitre sur les complexes et la trigonométrie (calculatoire).

**Exemple**

Calculer $\displaystyle\int_0^x \cos^2 t \sin^4 t \, dt$.

**Solution :**

$$\begin{aligned}
\cos^2 t \sin^4 t &= \frac{1}{2^6 i^4}\left(e^{it}+e^{-it}\right)^2\left(e^{it}-e^{-it}\right)^4\\
&= \frac{1}{2^6}\left(\left(e^{it}+e^{-it}\right)\left(e^{it}-e^{-it}\right)\right)^2\left(e^{it}-e^{-it}\right)^2\\
&= \frac{1}{2^6}\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)^2\left(e^{it}-e^{-it}\right)^2 \quad \text{id. remarquable}\\
&= \frac{1}{2^6}\left(\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)\left(e^{it}-e^{-it}\right)\right)^2\\
&= \frac{1}{2^6}\left(e^{3it}-e^{it}-e^{-it}+e^{3it}\right)^2.
\end{aligned}$$

On développe le carré et on obtient :

$$\begin{aligned}
\cos^2 t \sin^4 t &= \frac{1}{2^6}\left(2\cos(6t)-4\cos(4t)-2\cos(2t)+4\right)\\
&= \frac{1}{2^5}\left(\cos(6t)-2\cos(4t)-\cos(2t)+2\right).
\end{aligned}$$

On en déduit avec la linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_0^x \cos^2(t)\sin^4(t)\,dt &= \frac{1}{2^5}\left(\int_0^x \cos(6t)\,dt - 2\int_0^x \cos(4t)\,dt - \int_0^x \cos(2t)\,dt + 2x\right)\\
&= \frac{1}{2^5}\left(\frac{\sin(6x)}{6} - \frac{2\sin(4x)}{4} - \frac{\sin(2x)}{2} + 2x\right).
\end{aligned}$$

**Exemple**

Calculer $\displaystyle\int_0^x \cos^3 t \sin^4 t \, dt$.

**Solution :**

$\cos^3(t)\sin^4(t) = \cos(t)\left(1-\sin^2(t)\right)\sin^4(t) = \cos(t)\left(\sin^4(t)-\sin^6(t)\right) = \cos(t)\sin^4(t) - \cos(t)\sin^6(t)$.

$$\int_0^x \cos(t)\sin^4(t)\,dt + \int_0^x \cos(t)\sin^6(t)\,dt = \left[\frac{\sin^5(t)}{5} - \frac{\sin^7(t)}{7}\right]_0^x = \frac{\sin^5(x)}{5} - \frac{\sin^7(x)}{7}.$$

Si on fait les calculs en utilisant la technique de linéarisation (plus lourd), alors on obtient l'expression linéarisée de celle que nous avons trouvé.

## E Changement de variable

**Mise en œuvre du changement de variable :**

Pour une fois, nous allons appliquer le théorème avant de l'énoncer.
Avec l'exemple précédent, voici comment on écrit le changement de variable.

$$\int_1^2 \frac{t}{\sqrt{t^2+3}}\,dt.$$

On pose $u = t^2+3$, alors $u'(t) = \frac{du}{dt} = 2t$, donc $du = 2t\,dt$.
On remplace dans l'expression et on trouve

$$\int_1^2 \frac{t}{\sqrt{t^2+3}}\,dt = \int_{t=1}^{t=2} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t^2+3}}\,2t\,dt = \int_{u=4}^{u=7}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \left[\sqrt{u}\right]_4^7 = \sqrt{7}-\sqrt{4}.$$

On a changé les bornes d'intégration, en effet, quand $t$ varie de 1 à 2, alors $u = x^2+3$ varie de $1^2+3 = 4$ à $2^2+3 = 7$.
Si on intègre de 1 à $x$, alors $u$ varie de 4 à $x^2+3$, et on trouve :

$$\int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^2+3}}\,dt = \sqrt{x^2+3} - \sqrt{4}.$$

*Remarque sur les notations :* ici pour bien expliciter le changement de bornes, on a écrit des expressions du type $\int_{t=1}^{t=2}\frac{2t\,dt}{2\sqrt{u}} = \int_{u=4}^{u=7}\frac{du}{2\sqrt{u}}$.

Souvent note directement : $\displaystyle\int_1^2 \frac{2t\,dt}{2\sqrt{u}} = \int_4^7 \frac{du}{2\sqrt{u}}$.

**Exemple**

Calculer $\displaystyle I = \int_0^x \frac{dt}{e^t+e^{-t}}$.

*On pourra poser $u = e^t$.*

**Solution :**

Si on pose $u = e^t$, alors $du = e^t\,dt$.

$$I = \int_0^x \frac{dt}{e^t+e^{-t}} = \int_0^x \frac{e^t\,dt}{e^{2t}+1} = \int_{e^0}^{e^x}\frac{du}{u^2+1} = \left[\arctan u\right]_1^{e^x} = \arctan\left(e^x\right) - \frac{\pi}{4}.$$

On peut vérifier que si on dérive l'expression obtenue (comme une composée), on retrouve la fonction dont on cherchait l'intégrale.

Il est temps d'énoncer le théorème. Mais soyons honnête, cet énoncé théorique est à savoir, mais la priorité est de maîtriser la méthode sur les exemples.

**Théorème 1.6** *(Le changement de variable)*

Soit $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbf{R})$, $a, b$ deux points de $I$ et $u \in \mathscr{C}^1([a,b], I)$.

$$\int_a^b u'(t)(f\circ u)(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.$$

**Preuve**

Pour la preuve, il suffit de voir que nous avons à faire à une **composition** de fonctions.
Si on note $F$ une primitive de $f$ sur $I$, alors
$\forall t \in [a,\, b],\ u'(t)\,(f \circ u)\,(t) = u'(t) F'\,(u(t)) = (F \circ u)'\,(t)$.
Donc $\displaystyle\int_a^x u'(t)(f \circ u)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (F \circ u)'\,(t)\,\mathrm{d}t = (F \circ u)\,(b) - (F \circ u)\,(a)$.
Or, on voit également que
$\displaystyle\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{u(a)}^{u(b)} F'(u)\,\mathrm{d}u = [F(u)]_{u(a)}^{u(b)} = F\,(u(b)) - F\,(u(a))\,.$
Ce qui donne bien l'égalité. ■

**Explications**

La formulation de ce théorème ne doit pas faire peur : si on regarde bien c'est ce que nous venons de faire : $u = u(t)$, donc $\mathrm{d}u = u'(t)\,\mathrm{d}t$.
Quand on veut intégrer $f\,(u(t))\cdot u'(t)\,\mathrm{d}t$ , on remplace $u(t)$ par $u$ et on trouve $f(u)\,\mathrm{d}u$.
Quand $t$ variait entre $a$ et $b$, alors $u$ varie entre $u(a)$ et $u(b)$.

Il s'agit simplement du changement d'indice que nous avons vu sur les sommes discrètes et que l'on généralise aux sommes « continues » (dans le chapitre d'intégration, nous interpréterons les intégrales comme des limites de sommes).

**Remarques sur les hypothèses et notations :**

- *Régularité :* $u$ est supposée de classe $\mathscr{C}^1$ car une dérivée de $u$ apparaît dans la première intégrale. On exige donc que $u' \in \mathscr{C}^0$, c'est-à-dire $u \in \mathscr{C}^1$.
Par contre, $f$ est simplement supposée continue. Aucune dérivée de $f$ n'intervient.
- *Domaines de définition et image :* on compose $f$ à droite par $u$, on a donc des ensembles qui « s'emboîtent » ainsi : $[a, b] \xrightarrow{u} I \xrightarrow{f} \mathbf{R}$.
Cela explique également les domaines de définition et d'intégration.
- *Notation $u$ :* dans la première intégrale, $u$ désigne la fonction, alors que dans la deuxième expression « $f(u)\,\mathrm{d}u$ » : $u$ désigne une variable au même titre que $x$ ou $t$. Ainsi, on utilise la même notation pour deux objets différents (pour faciliter l'usage).

**Exemple**

Pour $x > 0$, calculer

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

**Solution :**
On aimerait bien se « débarrasser » de la racine carrée.
On pose donc $u = \sqrt{t}$, d'où $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$.
Si $t \in [1,\, x]$, alors $u \in [1,\, \sqrt{x}]$, donc par changement de variable

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^x 2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} = \int_1^{\sqrt{x}} 2\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \left[-2\,\mathrm{e}^{-u}\right]_1^{\sqrt{x}} = -2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} + 2\,\mathrm{e}^{-1}.$$

## F Primitives de fractions rationnelles simples

**Méthode**

Pour intégrer une fraction rationnelle du type

$$\frac{1}{t^2 + bt + c}$$

sur un intervalle de son domaine de définition.
On cherche les racines de $t^2 + bt + c$.

1. S'il y a 2 racines réelles distinctes $\alpha$ et $\beta$.
On cherche $a$, $b$ ne dépendant pas de $t$ tels que $\dfrac{1}{t^2+bt+c} = \dfrac{a}{t-\alpha} + \dfrac{b}{t-\beta}$ et on intègre avec les logarithmes.
2. S'il y a 1 racine double $\alpha$.
On reconnaît une primitive usuelle.
3. S'il n'y a pas de racines réelles.
On met le dénominateur sous forme canonique et avec un changement de variable on obtient une forme en $\dfrac{1}{u^2+1}$, qui se primitive avec arctan.

**Exemple**

Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+1}$ en précisant son domaine de définition.
**Solution :**
On remarque que $t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$ et que cette expression s'annule en $t = -1$.
On cherche la primitive qui s'annule en 0, donc $x$ doit être « du même côté » de $-1$ que 0.
Ainsi l'intégrale est définie pour tout $x > -1$.

$$\forall x > -1,\ \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+1} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = \left[-\frac{1}{t+1}\right]_0^x = -\frac{1}{x+1} + 1.$$

**Exemple**

Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t-3}$ en précisant son domaine de définition.
**Solution :**
On remarque que $t^2 + 2t - 3 = (t-1)\,(t+3)$ et que cette expression s'annule en $t = 1$ et en $t = -3$.
On cherche la primitive qui s'annule en 0, donc $x$ doit être sur l'intervalle du domaine de continuité qui contient 0.
Ainsi l'intégrale est définie pour tout $x \in ]-3,\, 1[$.
On remarque que $\dfrac{1}{(t-1)(t+3)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{t+3-(t-1)}{(t-1)(t+3)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t+3}\right)$.

Ainsi, $\forall x \in ]-3,\, 1[$, 
$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t-3} &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)(t+3)}\\ &= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+3}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\left[\ln|t-1| - \ln|t+3|\right]_0^x\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + \ln(3)\right).\end{aligned}$$

**Exemple**

Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+3}$ en précisant son domaine de définition.

**Solution :**

Le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$, donc l'intégrande est continue sur $\mathbf{R}$.
Donc l'intégrale est définie pour tout $x \in \mathbf{R}$.

$\forall x \in \mathbf{R}$, 
$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+3} &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2+2}\\ &= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}.\end{aligned}$$

On pose $u = \frac{t+1}{\sqrt{2}}$, et donc $\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}t$, d'où $\mathrm{d}t = \sqrt{2}\,\mathrm{d}u$.

En appliquant ce changement de variable $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, on trouve
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{x+1}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arctan(u)\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{x+1}{\sqrt{2}}}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

**Exemple**

Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{2t+1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t$ en précisant son domaine de définition.

**Solution :**

Le dénominateur de l'intégrande ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$, donc la fonction à intégrer est continue sur $\mathbf{R}$.
Ainsi, l'intégrale est définie pour tout $x \in \mathbf{R}$.
On voit que le numérateur est presque la dérivée du dénominateur, on n'est donc pas loin d'une formule $\frac{u'}{u}$.
$$\int_0^x \frac{2t+1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{2t+4}{t^2+4} - \frac{3}{t^2+4}\,\mathrm{d}t = \left[\ln\left(t^2+4\right)\right]_0^x - \frac{3}{4}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}.$$
On pose $u = \frac{t}{2}$, donc $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{2}$ c'est-à-dire $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u$.
Par changement de variable, on trouve
$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1} = 2\int_0^{x/2} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = 2\left[\arctan(u)\right]_0^{x/2} = 2\arctan\left(\frac{x}{2}\right).$$

La solution est donc
$$\int_0^x \frac{2t+1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{x^2+4}{4}\right) - \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right).$$

## G L'intégration par parties

**Théorème 1.7** *(Intégration par parties)*

Si $u$ et $v$ sont deux applications $\mathscr{C}^1([a,b],\mathbf{R})$, alors
$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(x)v(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Preuve**

La preuve est triviale et c'est elle qui permet de bien comprendre cette formule. Elle provient de la dérivation d'un **produit**.
$(uv)' = u'v + uv'$, donc $uv$ est une primitive de $u'v+uv'$ qui est continue sur $[a,b]$ (car $u, v \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbf{K})$)
Donc $\int_a^b u'v + uv' = [uv]_a^b$, et avec la linéarité on obtient la formule voulue. ■

**Exemple**

Calculer $\int_0^x t\sin t\,\mathrm{d}t$.

**Solution :**

On pose pour $t \in [0,\, x]$
$$\begin{aligned}u(t) &= t & v(t) &= -\cos(t)\\ u'(t) &= 1 & v'(t) &= \sin(t)\end{aligned}$$
$$(u,\, v) \in \mathscr{C}^1\left([0,\, x],\, \mathbf{R}\right).$$
Je conseille de présenter les calculs ainsi pour ne pas se tromper.
On choisit une diagonale avec les éléments de l'intégrande. Ici, par exemple $u(t)$ et $v'(t)$ et on calcule ensuite les deux autres termes par dérivation et primitive.
Ici, c'est évidemment $t$ que l'on dérive, ce qui permet de le faire « disparaître. »
Pour écrire la formule, on met le produit de la première ligne entre les crochets et on soustrait avec l'intégrale de la deuxième diagonale.
$$\begin{aligned}\int_0^x t\sin(t)\;\mathrm{d}t &= \left[-t\cos(t)\right]_0^x - \int_0^x 1\times(-\cos(t))\;\mathrm{d}t\\ &= -x\cos(x) + \int_0^x \cos(t)\;\mathrm{d}t\\ &= -x\cos(x) + \left[\sin(t)\right]_0^x\\ &= -x\cos(x) + \sin(x).\end{aligned}$$

**Exemple** *(À savoir refaire)*

Trouver une primitive de ln.

**Solution :**

Ici, l'intégration n'apparaît pas immédiatement. C'est une astuce qu'il faut connaître : $\ln t = 1 \cdot \ln t$ et on peut intégrer 1 et dériver ln.

On cherche par exemple, une primitive qui s'annule en 1.

⚠ on ne peut pas intégrer sur $[0, x]$ car la fonction n'est pas continue en 0.

On pose, pour $t > 0$,

$$u(t) = t \qquad v(t) = \ln(t)$$
$$u'(t) = 1 \qquad v'(t) = \frac{1}{t}$$

$$(u, v) \in \mathscr{C}^1\left(\mathbf{R}_+^*\right).$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t &= [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x \frac{t}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= x\ln(x) - (x-1)\\ &= x\ln(x) - x + 1.\end{aligned}$$

Les primitives étant « à une constante près », on trouve donc que $x \mapsto \ln(x)$ a pour primitive $x \mapsto x\ln(x) - x$.

## 2 Intégration

Après l'approche calculatoire, nous abordons l'interprétation géométrique de l'intégrale. Le lien entre ces deux approches sera réalisé avec le théorème fondamental de l'analyse.

L'idée maîtresse est de définir l'intégrale comme « l'aire sous la courbe » comme cela a été fait au lycée. Il faut à présent trouver un moyen concret pour définir cette surface. Pour cela, on raisonne comme au primaire : les aires les plus simples à calculer sont les aires des rectangles. Ainsi, pour évaluer l'aire d'une figure ou sous une courbe, on peut la tracer sur un papier quadrillé et compter le nombre de petits carrés qui composent la surface. Plus la taille des carrés sera petite, meilleure sera l'approximation.

C'est exactement ce que nous allons faire ici avec les sommes de Riemann. Le choix d'un quadrillage de plus en plus fin se traduit par un passage à la limite.

*Remarque importante :* Dans tout le chapitre nous travaillerons sur des **segments** de $\mathbf{R}$. Sauf exercice très spécifique, il n'y aura pas d'intervalles infinis ou ouverts cette année (car alors on n'est pas sûr que l'aire sous la courbe soit finie, ni même définie).

### A Définition de l'intégrale

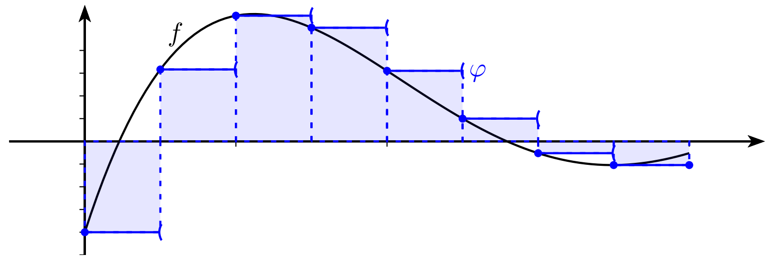
**Définition 2.1** *(Sommes de Riemann)*

Soit $f$ continue sur $[a, b]$,
On définit la $n$-ième somme de Riemann de $f$ sur $[a, b]$ par

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \qquad \text{avec } \forall k \in [\![0; n-1]\!], \quad x_k = a + \frac{b-a}{n}k.$$

En particulier, pour $[a, b] = [0, 1]$

$$R_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$




**Explications**

La somme de Riemann est l'aire sous la courbe de la fonction « en escalier » $\varphi$ definie à partir de $f$ avec un pas de longueur $\frac{1}{n}$.

*Remarque :* On pourrait également définir l'intégrale à partir des sommes $\widetilde{R_n}(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$. La différence avec les sommes définies plus haut est alors

$$R_n(f) - \widetilde{R_n}(f) = \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Plus la largeur des rectangles diminue, plus la somme de Riemann s'approche de l'aire sous la courbe. C'est le principe même de construction de l'intégrale de Riemann :

**Théorème 2.2**

Pour $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbf{R})$, la suite des sommes de Riemann $(R_n(f))$ converge dans $\mathbf{R}$.

On appelle **intégrale** de $f$ sur $[a, b]$ cette limite que l'on note

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_a^b f.$$

**Preuve**

Admis. ■

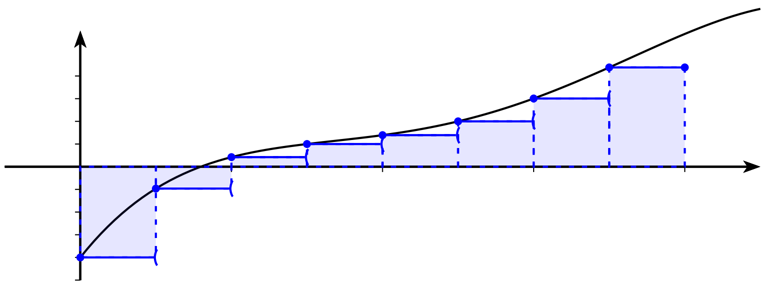
**Exercice**

Si $f$ est **croissante** alors

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, R_n(f) \leqslant \int_a^b f \leqslant R_n(f) + \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right).$$

**Solution :**

Dans le cas d'une application croissante, l'aire (algébrique) des rectangles est toujours inférieure à celle « sous la courbe ». Cet exercice donne un majorant de l'écart. Ce majorant correspond à l'écart entre une approximation « par excès » avec $f(a_{k+1})$ et une approximation par défaut avec $f(a_k)$.



$f$ est croissante, ainsi $\forall k \in [\![0, n]\!], \forall t \in [x_k, x_{k+1}],\ f(x_k) \leqslant f(t) \leqslant f(x_{k+1})$.
Donc (par positivité de l'intégrale), $\frac{b-a}{n} f(a_k) \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \leqslant \frac{b-a}{n} f(x_{k+1})$.
Et par sommation (avec la relation de Chasles), on obtient :

$$R_n(f) \leqslant \int_a^b f \leqslant R_n + \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)).$$

**Exemple**

Soit $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{8k^3 + n^3}$.

Montrer que $(u_n)$ converge et calculer sa limite.

*On admettra provisoirement le lien primitive intégrale : à savoir que les notations $\int_a^b f$ désignent le même nombre, que l'on parle de primitive ou d'intégrale.*

**Solution :**

On remarque que l'on retrouve la valeur $n$, à la fois comme borne pour la sommation et à l'intérieur de l'expression : dans une telle situation, on doit penser aux sommes de Riemann. On écrit la somme pour obtenir des expression en $\frac{k}{n}$ :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{8k^3 + n^3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^3} \frac{\frac{k^2}{n^2}}{8\frac{k^3}{n^3} + 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k^2}{n^2}}{8\frac{k^3}{n^3} + 1}$$

Si on pose $f : x \mapsto \frac{x^2}{8x^3+1}$, alors $u_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{f(1)}{n} = R_n(f) + \frac{1}{9n}$.

Or, $f$ continue sur $[0, 1]$, donc $(R_n)$ converge vers $\int_0^1 f$, donc $(u_n)$ aussi car $\frac{1}{9n} \to 0$.

$\int_0^1 f = \int_0^1 \frac{x^2}{8x^3+1} = \frac{1}{24}\left[\ln(8x^3+1)\right]_0^1 = \frac{1}{24} \ln 9 = \frac{1}{12} \ln 3$.

Donc $u_n \to \dfrac{1}{12} \ln 3$.

## B Propriétés de l'intégrale

**Théorème 2.3** *(Propriétés de l'intégrale)*

Soient $f, g \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbf{R})$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ et $c \in [a, b]$.

1. *Linéarité :* $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
2. *Relation de Chasles*[1] *:* $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
3. *Inégalité triangulaire :* $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.
4. *Positivité :* Si $f \geqslant 0$ (et si $a \leqslant b$), alors $\int_a^b f \geqslant 0$.
5. *Positivité stricte :* Si $f > 0$ sur $I$ sauf en un nombre fini de points et si $a < b$, alors $\displaystyle\int_a^b f > 0$.
6. *Comparaison :* si $f \leqslant g$, et $a \leqslant b$, alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

**Preuve**

Ce sont les propriétés sur les sommes de Riemann étendues par passage à la limite (il y a juste un petit travail pour la stricte positivité car le passage à la limite transforme les inégalités strictes en inégalités larges). ■

*Remarque :* On pourrait aussi utiliser ces propriétés pour donner une définition équivalente de l'intégrale sans passer par les sommes de Riemann.
La définition est plus *simple*, mais aussi plus abstraite :

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbf{R})$,
On définit l'intégrale de $f$ sur $[a, b]$ par l'unique réel $\int_a^b f$ tel que l'intégrale vérifie :

1. *linéarité :* $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
2. *positivité :* Si $f \geqslant 0$ (et si $a \leqslant b$), alors $\int_a^b f \geqslant 0$.
3. $\int_a^b 1 = b - a$.
4. *relation de Chasles :* si $c \in [a, b]$, alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b$.

1. La relation est également valable si $c \notin [a, b]$, quand $f$ est continue « jusqu'à » $c$.

**Théorème 2.4**

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R}_+)$ à valeurs **positives**,

$$\int_a^b f = 0 \quad \text{si et seulement si } f \text{ est nulle sur } [a,b].$$

*Remarque :* Le résultat reste évidemment valable si $f$ est continue et de signe constant.

### Preuve

Si $f$ non nulle, alors $\exists c \in [a,b]$ tel que $f(c) > 0$.
Or $f$ continue sur $[a,b]$, donc il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [c-\eta, c+\eta], |f(x)-f(c)| \leqslant \frac{1}{2}f(c)$
.
(on prend $\eta > 0$ suffisamment petit pour que $[c-\eta, c+\eta] \subset [a,b]$. Si $c$ était une borne de $[a,b]$, alors par continuité, on pourrait prendre un autre $c$ suffisamment proche dans l'ouvert $]a,b[$ tel que $f(c) > 0$).
Donc pour $x \in [c-\eta, c+\eta], f(x) \geqslant \frac{1}{2}f(c)$ :
par comparaison, $\int_{c-\eta}^{c+\eta} f \geqslant \int_{c-\eta}^{c+\eta} \frac{1}{2}f(c)\,\mathrm{d}t \geqslant \eta f(c) > 0$.
Or $f$ positive sur $[a,b]$, donc $\int_a^{c-\eta} f \geqslant 0$ et $\int_{c+\eta}^b f \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.
Donc $\int_a^b f = \int_a^{c-\eta} f + \int_{c-\eta}^{c+\eta} f + \int_{c+\eta}^b f \geqslant \int_{c-\eta}^{c+\eta} f > 0$.
C'est absurde, donc $f$ est identiquement nulle sur $[a,b]$. ■

**Théorème 2.5** *(Majoration d'un intégrale)*

Soient $f, g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$,

$$\left|\int_a^b gf\right| \leqslant \left(\sup_{[a,b]} |g|\right) \times \int_a^b |f|.$$

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant (b-a) \sup_{[a,b]} |f|.$$

### Preuve

1. d'après l'inégalité triangulaire, $\left|\int_a^b gf\right| \leqslant \int_a^b |f\,g|$.
   D'après le théorème des bornes atteintes appliqué à $g$ sur le segment $[a,b]$ (car $g$ continue) : $\sup\limits_{[a,b]} |g|$ est bien défini. Donc $\forall x \in [a,b], |(f\,g)(x)| \leqslant \sup\limits_{[a,b]} |g| \cdot |f(x)|$.
   La croissance de l'intégrale et sa linéarité permettent alors de conclure.
2. Idem, d'après l'inégalité triangulaire : $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.
   D'après le théorème des bornes atteintes appliqué sur le segment $[a,b]$ (car $f$ continue) : $\sup\limits_{[a,b]} |f|$ est bien défini. Donc $\forall x \in [a,b], |f(x)| \leqslant \sup\limits_{[a,b]} |f|$.
   La croissance de l'intégrale et sa linéarité permettent alors d'écrire
   $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \sup\limits_{[a,b]} |f| \cdot \int_a^b 1 = (b-a) \sup\limits_{[a,b]} |f|$. ■

### Explications

On peut interpréter facilement ces inégalités sur les sommes finies (cela est justifié par la définition de l'intégrale à partir des fonctions en escalier) :
Si, au lieu de $f, g$, on choisit des familles $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ et $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$, alors, d'après l'inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{k=1}^n \lambda_k \mu_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |\lambda_k \mu_k| \leqslant \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \max_{i \in [\![1,n]\!]} |\mu_i| \leqslant \left(\max_{i \in [\![1,n]\!]} |\mu_i|\right) \sum_{k=1}^n |\lambda_k|.$$

De même,

$$\left|\sum_{k=1}^n \lambda_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |\lambda_k \mu_k| \leqslant \sum_{k=1}^n \max_{i \in [\![1,n]\!]} |\lambda_i| \leqslant n \max_{i \in [\![1,n]\!]} |\lambda_i|.$$

**Théorème 2.6** *(Valeur moyenne d'une fonction)*

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$, $\exists c \in ]a,b[$ tel que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(c).$$

$f(c)$ est appelé la **valeur moyenne** de $f$ sur $[a,b]$.

### Explications

Si on interprète sur les sommes finies, cela correspond à la valeur moyenne : $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k$.
Dans le cas discret, il n'y a aucune raison qu'il soit atteint par un des $\lambda_k$, par contre, les valeurs de $\lambda_k$ ne peuvent pas être toutes plus grandes ou toutes plus petites que la moyenne : il y en a des plus grandes et des plus petites. La différence avec les applications continues est que nous ne disposons pas de théorème des valeurs intermédiaires pour atteindre la moyenne.

### Preuve

Si on pose $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$, et $g : x \mapsto f(x) - m$, alors $\displaystyle\int_a^b g = 0$.
Si $g$ était de signe constant, par exemple positive et ne s'annulait pas, alors $\int_a^b g > 0$. C'est absurde.
Donc $g$ s'annule (ou change de signe, auquel cas elle s'annule d'après le théorème des valeurs intérmédiaires). Donc $\exists c \in ]a,b[$ tel que $g(c) = 0$. Donc $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f = f(c)$. ■

**Exemple** *(classique)*

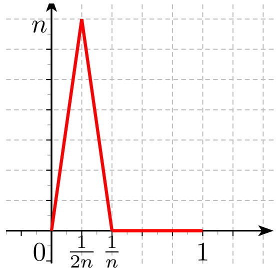
Si $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ tel que $\int_a^b f = 0$, alors $f$ s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.

⚠ En général on ne peut pas intervertir entre les limites et le signe intégral :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x}$$

Par exemple si on pose

$$\forall n \geqslant 1, f_n(x) : x \mapsto \begin{cases} 2n^2x & \text{si } x \leqslant \frac{1}{2n} \\ -2n^2(x-\frac{1}{2n})+n & \text{si } \frac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$




Alors $\forall x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$,

**mais** $\forall n \in \mathbf{N}^*$ $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

## 3 Le théorème fondamental de l'analyse

**Théorème 3.1** *(Théorème fondamental de l'analyse)*

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$,

$$x \mapsto \int_a^x f \text{ est la seule primitive de } f \text{ sur } [a,b] \text{ qui s'annule en } a$$

**Autre formulation :**

$$x \mapsto \int_a^x f \quad \text{est dérivable sur } [a,b] \text{ de dérivée } f.$$

Ce théorème assure l'existence d'une primitive (et donc d'une infinité) pour toute fonction continue sur un segment et il en donne une expression.

**Preuve**

On pose $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, et on calcule son taux d'accroissement :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right) = \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f\right) \qquad \text{(relation de Chasles)}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f\right) - f(x)\right| \\ &= \left|\frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)-f(x)\,\mathrm{d}t\right)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\,\mathrm{d}t\right) \qquad \text{(in. triangulaire)}\end{aligned}$$

Si $h<0$, on inverse les bornes de l'intégrale pour l'inégalité triangulaire, mais le raisonnement reste identique.

Or $f$ est continue en $x$, donc $\forall\varepsilon>0, \exists\eta>0$ tel que $|t-x|\leqslant\eta \Rightarrow |f(t)-f(x)|\leqslant\varepsilon$.
Donc pour $|h|\leqslant\eta$,

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h}\varepsilon\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \varepsilon.$$

Enfin $\int_a^a f = 0$.
Pour l'unicité, la démonstration a déjà été vue lors du chapitre sur les primitives. ■

**Corollaire 3.2**

Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbf{R})$,

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

⚠ Soyez bien attentif à la différence entre le théorème fondamental 3.1 et son corollaire 3.2.
Dans le théorème 3.1,

- **hypothèse :** on exige que la fonction soit continue
- **conclusions :** on obtient que
  - L'intégrale est dérivable,
  - Sa dérivée est une valeur : $f(x)$. Cela ne dépend pas du point $a$, car la dérivée est une notion *locale*, sans mémoire de ce qui se passe plus loin.

En revanche, dans le corollaire 3.2,

- **hypothèse :** on exige que la fonction soit de classe $\mathscr{C}^1$ et pas seulement continue. On calcule l'intégrale de la dérivée, c'est donc la dérivée qui doit être continue et pas seulement la fonction.
- **conclusion :** on obtient la valeur de l'intégrale, c'est une différence. Elle dépend deux deux bornes car l'intégrale est une surface qui dépend à la fois du point de départ et de celui d'arrivée.

**Corollaire 3.3**

Si $f$ est continue sur $[a,b]$, alors $f$ admet une primitive $F$ sur $[a,b]$ et $\forall(x,y)\in[a,b]^2$,

$$\int_x^y f = F(y) - F(x)$$

**Exemple**

$$f : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt \text{ est dérivable sur } \mathbf{R}\text{, sa dérivée est } x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$$

On en déduit que $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2} dt$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que sa dérivée est $x \mapsto 2x\,\mathrm{e}^{-x^4} - \mathrm{e}^{-x^2}$.