Sommes et produits

« Jeune homme, en mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue. »
J. von Neumann (1903-1957)

Ce chapitre est purement calculatoire. Il vise à introduire trois notations et à les manipuler.

1 Le symbole somme

Pour $q \neq 1$ et $n \in \mathbf{N}$ fixés, la somme des puissances de q a été vue au lycée :

$$q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

L'utilisation des points de suspension pour écrire cette somme rend l'écriture assez lourde et potentiellement ambigüe. Ce chapitre introduit une notation plus ramassée

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^n.$$

Cette notation se lit comme une boucle **for** en informatique :

```
s = 0
for k in range(n+1):
    s += q**k
```

- k va prendre toutes les valeurs successives de 0 (borne du bas) jusqu'à n (borne du haut)
- Pour chaque valeur de k on rajoute le nombre q^k (à droite du signe somme) au résultat précédent.

k	q^k	somme partielle jusqu'à k
0	$q^0 = 1$	1
1	$q^1 = q$	$1 + q$
2	q^2	$1 + q + q^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	q^n	$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

On peut ensuite varier les plaisirs :

Exemple

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1 \text{ fois}} = n + 1.$$

Si on veut sommer les q^k à partir de -5 et jusqu'à $n-1$ pour $q \neq 0$, on écrit :

$$\sum_{k=-5}^{n-1} q^k = q^{-5} + q^{-4} + \cdots + q^0 + q^1 + \cdots + q^{n-1}.$$

Notation *(Utilisation du symbole $\sum$)*

Soient $m \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{Z}$, avec $m \leqslant n$,
Soit $(a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n)$ une liste de nombres[1].
On définit la somme des a_k pour k variant de m à n par

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n.$$

On note également :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{m \leqslant k \leqslant n} a_k = \sum_{k \in [\![m,n]\!]} a_k.$$

Pour $m > n$, la somme est vide et vaut 0 : $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = 0$.

L'usage des points de suspension pour définir la notation somme n'est pas parfaitement satisfaisante.
D'un point de vue purement formel, on préfèrerait donc une définition qui s'appuie sur le caractère récursif de la somme. En effet, si on sait définir une somme jusqu'au rang n, alors il suffit de rajouter un seul élément pour avoir une somme jusqu'au rang $n+1$.
Ainsi, on peut formuler une définition équivalente de la somme à l'aide du principe de récurrence :

Définition 1.1 *(Définition d'une somme par récurrence)*

Initialisation - somme vide : Pour tout $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$ avec $m > n$, $\quad \sum\limits_{k=m}^{n} a_k = 0.$

Hérédité : Pour tout $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$ avec $m \leqslant n$, $\quad \sum\limits_{k=m}^{n} a_k = \sum\limits_{k=m}^{n-1} a_k + a_n.$

Exemple

Soit $a \in \mathbf{C}$, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} a$.

Solution :

⚠ De 0 jusqu'à n inclus, il y a $n+1$ termes. Ainsi $\sum\limits_{k=0}^{n} a = (n+1)a$.

1. Cette notation est valable pour tout objet mathématique pour lequel une opération associative « somme » a été définie (pour certaines formules, la commutativité est aussi nécessaire). Ce n'est pas spécifique aux nombres : cette notation sera utilisée plus loin pour sommer des vecteurs par exemple.

Remarques :

1. L'indice **ne recule pas** : si $m > n$, c'est-à-dire si la borne du bas est plus grande que celle du haut, alors la somme est vide et vaut 0 par convention.
   Exemple : $\sum\limits_{k=7}^{5} 2^k = 0$.
2. k est **l'indice de sommation**, on dit que l'indice est **muet**. Cela veut dire qu'il ne sert qu'à l'intérieur de la somme et qu'on peut changer son nom sans changer la valeur de la somme.
   Exemple : $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k = \sum\limits_{i=0}^{n} 2^i = \sum\limits_{j=0}^{n} 2^j$.
   On utilise souvent une des lettres i, j ou k comme indice.
3. L'indice n'a de sens qu'à l'**intérieur** de la somme ; en dehors, il n'est plus défini. S'il vous reste un indice dans l'expression après le calcul de la somme, c'est que vous vous êtes trompé[2].

Exemple

Chercher l'erreur : $\sum\limits_{n=0}^{n} q^n$.

Solution :

Les bornes de la somme sont des nombres fixés (qui ont dû être définis auparavant), alors que l'indice varie.
Ici, il y a contradiction car la lettre n est à la fois utilisée pour désigner un nombre fixe (la borne supérieure) et un nombre qui varie (l'indice).

Propriété 1.2 *(Relation de Chasles)*

Pour tout $(m, n, p) \in \mathbf{Z}^3$ avec $m \leqslant p \leqslant n$, $\quad \sum\limits_{k=m}^{n} a_k = \sum\limits_{k=m}^{p} a_k + \sum\limits_{k=p+1}^{n} a_k.$

Cette relation permet simplement de faire une petite pause au milieu du calcul.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \underbrace{a_m + a_{m+1} + \cdots + a_p}_{\sum\limits_{k=m}^{p} a_k} + \underbrace{a_{p+1} + \cdots + a_n}_{\sum\limits_{k=p+1}^{n} a_k} = \sum_{k=m}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k.$$

Attention néanmoins à bien recommencer à l'indice $p+1$, et non à l'indice p pour ne compter qu'une seule fois a_p.

Preuve

On remarque qu'il s'agit de la généralisation de la formule par récurrence donnée en définition.

2. Ce n'est pas le cas en Python où on peut récupérer la valeur du dernier indice d'une boucle **for** après la fin de la boucle.

En effet, au lieu de n'ajouter qu'un seul terme à la fin pour aller de $n-1$ à n, on en ajoute davantage pour aller de p à $n = p + (n-p)$.
La preuve formelle se réalise donc naturellement par une récurrence sur le nombre d'éléments que l'on ajoute en fin de somme : $n-p$.
Pour toute suite $(a_k)_{k\in\mathbf{Z}}$, pour tout $(m,\, p) \in \mathbf{Z}^2$, avec $m \leqslant p$ et pour tout $n \geqslant p$, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k$. »
On prouve alors $\mathcal{P}(n)$ par récurrence sur $n \geqslant p$.
Initialisation :
Pour $n = p$, le résultat est vrai car la seconde somme est vide.
Hérédité : Soit $n \geqslant p$ quelconque fixé.
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n+1} a_k &= \sum_{k=m}^{n} a_k + a_{n+1} \quad \text{par définition} \\
&= \sum_{k=m}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k + a_{n+1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \sum_{k=m}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n+1} a_k \quad \text{par définition.}
\end{aligned}$$

Ce qui prouve bien l'hérédité, et par principe de récurrence, que la propriété est vraie pour tout $n \geqslant p$. ■

2 Méthodes de calcul

A Linéarité

Propriété 2.1 *(Linéarité de la somme)*

La somme est linéaire, c'est-à-dire que
pour toutes les suites (u_n) et (v_n) et pour toute constante λ, on a

$$\forall (m,n) \in \mathbf{Z}^2, \qquad \sum_{k=m}^{n} (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{k=m}^{n} v_k.$$

Preuve

Pour tout $m \in \mathbf{Z}$, on prouve le résultat par récurrence sur n, à partir de la définition de la somme.
Remarque : Dans la récurrence, seul « n » doit varier. on ne fait jamais de récurrence sur un couple de valeurs, mais seulement sur un nombre entier.
Rédaction formelle :
Soit $m \in \mathbf{Z}$ quelconque fixé.

- Si $n < m$, alors le résultat est vrai (toutes les sommes sont vides et donc nulles).
- On démontre le résultat pour $n \geqslant m$ par récurrence sur n.

Pour tout $n \geqslant m$, on définit la propriété

$$\mathcal{P}_m(n) : « \sum_{k=m}^{n} (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{k=m}^{n} v_k ».$$

Initialisation : pour $n = m$, le résultat est vrai.
Hérédité : on suppose que le résultat est vrai pour un certain $n \geqslant m$ quelconque fixé, et on le montre alors pour $n+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n+1} (\lambda u_k + v_k) &= \sum_{k=m}^{n} (\lambda u_k + v_k) + (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) \\
&= \lambda \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{k=m}^{n} v_k + \lambda u_{n+1} + v_{n+1} \qquad \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= \lambda \left(\sum_{k=m}^{n} u_k \ + u_{n+1} \right) + \sum_{k=m}^{n} v_k \ + v_{n+1} \\
&= \lambda \sum_{k=m}^{n+1} u_k + \sum_{k=m}^{n+1} v_k.
\end{aligned}$$

D'où le résultat vrai au rang $n+1$.
Ainsi, par principe de récurrence, $\forall n \geqslant m$, $P_m(n)$ est vraie.

Par disjonction des cas, on a prouvé ce résultat pour tout $n \in \mathbf{Z}$ (à m fixé).
Et comme m était supposé quelconque, le résultat est vrai pour tout $(m,n) \in \mathbf{Z}^2$. ■

Corollaire 2.2

Avec les notations précédentes,

$$\sum_{k=m}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{k=m}^{n} v_k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{n} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} u_k.$$

Exemple

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k - 2^k$.
Solution :
Remarque : Pour plus de clarté, on peut écrire avec des parenthèses $\sum_{k=0}^{n} (3^k - 2^k)$, mais elles ne sont pas indispensables ici. En effet, la variable k n'est pas définie hors de la

somme et donc 2^k est nécessairement dans la somme.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 3^k - 2^k &= \sum_{k=0}^{n} 3^k - \sum_{k=0}^{n} 2^k \qquad \text{(linéarité de la somme)}\\ &= \frac{1-3^{n+1}}{1-3} - \frac{1-2^{n+1}}{1-2}\\ &= -\frac{1-3^{n+1}}{2} + 1 - 2^{n+1}\\ &= \frac{3^{n+1}-1-2^{n+2}+2}{2} \qquad \text{(mise au même dénominateur)}\\ &= \frac{3^{n+1}-2^{n+2}+1}{2}.\end{aligned}$$

B Changements d'indices

Commençons par un exemple :

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \sum_{j=1}^{n+1} j^2.$$

Dans cet exemple, nous avons changé d'indice : au lieu de calculer pour $k \in [\![0, n]\!]$, nous avons posé $j = k+1 \in [\![1, n+1]\!]$ ce qui simplifie l'expression de la somme.

$$k \in [\![0, n]\!] \quad \overset{j=k+1}{\Longleftrightarrow} \quad j \in [\![1, n+1]\!].$$

Remarque : Comme l'indice est muet, on peut garder la lettre k dans la seconde somme sans être obligé de la remplacer par j (même si c'est plus facile au début).

Méthode *(Translation d'indice)*

La translation d'indice revient à utiliser un indice translaté d'une valeur fixe.
Par exemple $j = k-1$ ou $j = k+1$.
⚠ Les bornes sont aussi translatées.

$$\sum_{k=m}^{n} a_{k+1} = \sum_{j=m+1}^{n+1} a_j.$$

Pour ne pas se tromper :

- On repère le changement d'indice que l'on souhaite réaliser,
  par exemple $j = k+1$ dans le cas ci-dessus pour transformer a_{k+1} en a_j.
- On cherche à la main les premières et dernières valeurs de la somme.
  par exemple, on commence pour $k = m$ avec $a_{k+1} = a_{m+1} = a_j$, il faut donc que la nouvelle somme commence à $j = m+1$,
  la somme se termine avec $k = n$, c'est-à-dire $a_{k+1} = a_{n+1} = a_j$, donc la nouvelle somme finit avec $j = n+1$.
- Il doit y avoir le même nombre d'éléments dans les deux sommes : si je repousse la borne inférieure de 1, alors la borne supérieure doit être repoussée d'autant.

Exemple

Calcul de la somme géométrique : $\sum_{k=0}^{n} q^k$ avec $q \neq 1$.

Solution :
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$, alors

$$\begin{aligned}(1-q)S_n = S_n - qS_n &= \sum_{k=0}^{n} q^k - q\sum_{k=0}^{n} q^k\\ &= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} \qquad \text{(linéarité de la somme)}\\ &= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{j=1}^{n+1} q^j \qquad \text{(chang. d'indice } j=k+1)\\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} q^k + q^0\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} q^j + q^{n+1}\right)\\ &= q^0 + \sum_{k=1}^{n} q^k - \sum_{j=1}^{n} q^j - q^{n+1}\\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n} q^k - q^{n+1} \qquad \text{(l'indice est muet)}\\ &= 1 - q^{n+1}.\end{aligned}$$

On retrouve donc le résultat énoncé au début du cours $\forall q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Méthode *(Inversion de l'ordre de sommation)*

Pour inverser l'ordre de sommation (lire la somme en sens contraire) pour k variant de 0 à n, on remplace k par $j = n - k$ qui varie de 0 à n.

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} = \sum_{j=0}^{n} a_j.$$

Tester les bornes à la main pour ne pas se tromper.

⚠ On doit conserver une borne de début de somme qui est inférieure à la borne de fin de somme pour ne pas avoir une somme vide. Dans le cas général, pour k variant de m à n, on pose $j = n + m - k$:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m}^{n} a_{n+m-j}.$$

Mais ceci n'est pas à apprendre par cœur, on le retrouve facilement à la main sur les cas concrets.

Exemple

Calculer la somme arithmétique : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.

Solution :
L'astuce consiste à écrire deux fois la somme en symétrie :

$$\begin{array}{rcccccccl} & 0 & + & 1 & + & 2 & + \cdots + & n & \\ + & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + \cdots + & 0 & \\ \hline & n & + & n & + & n & + \cdots + & n & = (n+1)n. \end{array}$$

Avec la notation $\sum$, cela donne :

$$\begin{aligned} 2S_n = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} k &= \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{j=0}^{n} (n-j) && \text{(chang. d'indice } j = n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{j=0}^{n} n - \sum_{j=0}^{n} j && \text{(linéarité)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k + n(n+1) - \sum_{j=0}^{n} j && \text{(somme de termes constants)} \\ &= n(n+1) + \sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} k && \text{(l'indice est muet : } k = j) \\ &= n(n+1). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\sum_{k=0}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

C Sommes télescopiques

Le principe des sommes télescopiques s'appuie sur le changement d'indices. La méthode en elle-même est très simple. La vraie difficulté est d'y penser et de repérer les sommes télescopiques en les mettant sous la bonne forme.

Méthode *(Somme télescopique)*

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m.$$

⚠ Il faut être vigilant sur les termes qui restent et ne pas hésiter pas à faire le détail à la main aux deux extrémités de la somme.

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \begin{array}{rccc} & \cancel{a_{m+1}} & - & a_m \\ + & \cancel{a_{m+2}} & - & \cancel{a_{m+1}} \\ + & \cancel{a_{m+3}} & - & \cancel{a_{m+2}} \\ + & \cdots & & \\ + & \cancel{a_n} & - & \cancel{a_{n-1}} \\ + & a_{n+1} & - & \cancel{a_n} \\ \hline = & a_{n+1} & - & a_m \end{array}$$

Preuve

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) &= \sum_{k=m}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=m}^{n} a_k && \text{(linéarité)} \\ &= \sum_{k=m+1}^{n+1} a_k - \sum_{k=m}^{n} a_k && \text{(chang. d'indice } k+1 \text{ remplacé par } k) \\ &= a_{n+1} + \sum_{k=m+1}^{n} a_k - \left(\sum_{k=m+1}^{n} a_k + a_m \right) \\ & \qquad \text{(on sort les termes extrémaux pour obtenir les mêmes bornes)} \\ &= a_{n+1} - a_m. \end{aligned}$$

Pour aller un peu plus vite dans la rédaction, nous avons coupé une étape dans le changement d'indice. On aurait pu commencer par poser $j = k + 1$ puis ensuite $k = j$. Nous avons fait les deux manipulations d'un coup. ∎

Exemple

Calcul de la somme des $\dfrac{1}{k(k+1)}$.

Solution :
Rappelez-vous : Lorsqu'on a une fraction de ce type avec un produit au dénominateur, on peut essayer de la décomposer en deux fractions plus simples (contraire de la mise au même dénominateur). $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Exemple

Le calcul de la somme géométrique donné plus haut faisait aussi intervenir une somme télescopique.

Exemple

Soit $r \in \mathbf{R}$, et u, la suite définie par $u_0 \in \mathbf{R}$, et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.
Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = u_0 + nr$.

Solution :

Ce résultat peut-être obtenu par récurrence (en exercice), ici, on le prouve avec les sommes télescopiques

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} r = nr.$$

D'où le résultat voulu.

Rappelez-vous : pour toute suite de la forme, $u_{n+1} = u_n + f(n)$, on obtient ainsi $u_n = u_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(k)$.

D Indices pairs/impairs

Méthode

Lorsque le signe change en fonction de la parité de n, il est parfois intéressant de séparer la somme des indices pairs de celle des indices impairs.

Exemple

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$.

Solution :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k &= \sum_{0\leqslant 2j\leqslant 2n} (-1)^{2j} 2j + \sum_{0\leqslant 2j+1\leqslant 2n} (-1)^{2j+1}(2j+1) \quad \text{(sépare pairs et impairs)}\\
&= 2 \sum_{0\leqslant 2j\leqslant 2n} j \quad - \sum_{0\leqslant 2j+1\leqslant 2n} (2j+1) \quad \text{(par linéarité)}\\
&= 2\sum_{j=0}^{n} j - \sum_{0\leqslant 2j+1\leqslant 2n} (2j+1) \quad (\text{car} \quad 2j \in [\![0, 2n]\!] \iff j \in [\![0, n]\!])\\
&= 2\sum_{j=0}^{n} j - \sum_{j=0}^{n-1}(2j+1) \quad (\text{car} \quad 2j+1 \in [\![0, 2n]\!] \iff j \in [\![0, n-1]\!])\\
&= 2\left(\sum_{j=0}^{n} j - \sum_{j=0}^{n-1} j\right) - \sum_{j=0}^{n-1} 1 = 2n - n = n.
\end{aligned}$$

Le changement d'indice peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k &= \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{2n} (-1)^k k \quad + \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{2n} (-1)^k k\\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{2j} 2j \quad + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{2j+1}(2j+1)\,.
\end{aligned}$$

E Cas général

Soit I un ensemble fini d'indices, et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres[3]. L'associativité et la commutativité permettent de définir

$$\sum_{i\in I} a_i \text{ est la somme de tous les } a_i,\ i \in I.$$

Formellement, on peut définir cette somme par récurrence sur le nombre d'éléments dans I. Dans ce cas,

- L'ordre de sommation est indifférent.
- Si on dispose d'une partition $I_1, I_2 \cdots, I_p$ de I alors, on peut écrire :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i + \cdots + \sum_{i\in I_p} a_i = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i\in I_k} a_i.$$

On rappelle que les $(I_k)_{k\in[\![1,\,p]\!]}$ forment une partition si

- pour tout $i \in I$, i est élément d'un unique I_k.
- aucun I_k n'est vide.

Ici, la seconde condition n'est pas nécessaire pour décomposer la somme.
Remarque : On pourrait indicer la partition par tout ensemble fini autre que $[\![1,\,p]\!]$.

3. On peut considérer tout autre objet pour lequel l'opération « somme » existe, est associative et commutative.

3 Sommes usuelles

Voici quelques sommes usuelles dont il faut connaître les valeurs et que l'on doit pouvoir recalculer rapidement (connaître la preuve).

⚠ Être attentif aux bornes de sommation : si on change les bornes, la valeur de la somme est modifiée.

A Sommes arithmétiques et géométriques

⚠ Ces sommes sont à savoir retrouver.

Propriété 3.1 *(Somme de constantes)*

Soit $a \in \mathbf{C}$, soient $m \leqslant n$ deux entiers,

$$\sum_{k=m}^{n} a = (n-m+1)a.$$

(nombre de termes) $\times a$.

⚠ L'intervalle d'entiers $[\![m, n]\!]$, contient $n-m+1$ entiers.
En particulier, pour $m=0$, $[\![0, n]\!]$ contient $n+1$ entiers.

Théorème 3.2

Soient m et n deux entiers avec $m \leqslant n$,

$$\sum_{\mathbf{k=m}}^{n} k = \frac{(n-m+1)\,(m+n)}{2} \quad \text{et en particulier :} \quad \sum_{\mathbf{k=0}}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Preuve *(avec les notations « intuitives »)*
On pose $S = m + (m+1) + \cdots + n$
On écrit deux fois la somme, en sens contraire.

$$\begin{array}{rccccccccccc} 2S = & & m & + & m+1 & + & m+2 & + \cdots + & n-1 & + & n & \\ & +(& n & + & n-1 & + & n-2 & + \cdots + & m+1 & + & m) & \\ \hline & & (m+n) & + & (m+n) & + & (m+n) & + \cdots + & (m+n) & + & m+n. & \end{array}$$

Or dans la somme, il y a $n-m+1$ termes, donc $2S = (n-m+1) \times (m+n)$.
Ainsi

$$S = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}.$$

■

Preuve *(formelle)*

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=m}^{n} k &= \sum_{k=m}^{n} k + \sum_{k=m}^{n} k \\ &= \sum_{k=m}^{n} k + \sum_{j=m}^{n} (n+m-j) \quad \text{(changement d'indice pour retourner la somme)} \\ &= \sum_{k=m}^{n} k + \sum_{j=m}^{n} (n+m) - \sum_{j=m}^{n} j \quad \text{(linéarité de la somme)} \\ &= \sum_{k=m}^{n} (n+m) = (n-m+1)(n+m). \end{aligned}$$

■

Théorème 3.3 *(Rappel : somme arithmétique)*

Soit (u_n) une suite arithmétique,
Soient m et n deux entiers avec $m \leqslant n$,

$$\sum_{\mathbf{k=m}}^{n} u_k = (n-m+1)\frac{u_n+u_m}{2} \quad \text{et en particulier :} \quad \sum_{\mathbf{k=0}}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_n+u_0}{2}.$$

(nombre de termes) $\times$ (moyenne des termes extrêmes).

Remarque : Pour $r=0$, on retrouve la somme d'une constante.

Preuve

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{n} u_k &= \sum_{k=m}^{n} (u_0 + kr) = \sum_{k=m}^{n} u_0 + r\sum_{k=m}^{n} k \qquad \text{(linéarité)} \\ &= (n-m+1)u_0 + r\frac{(n-m+1)(n+m)}{2} \\ &= (n-m+1)\frac{2u_0 + r(n+m)}{2} = (n-m+1)\frac{u_n+u_m}{2}. \end{aligned}$$

■

Théorème 3.4 *(Sommes d'Euler)*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Les deux premières sommes sont à connaître par cœur, la troisième est hors programme. Elles généralisent la somme arithmétique. **Preuve**

On peut faire la preuve par récurrence à condition de connaître les formules au préalable. Il existe aussi une preuve qui permet de retrouver facilement cette formule et qui se généralise à $\sum_{k=0}^{n} k^3$, $\sum_{k=0}^{n} k^4$...
Cela évite alors d'avoir recours à des formules « tombées du ciel ». Cette méthode sera vue en exercice. ■

Théorème 3.5

Soit $q \neq 1$.
Soient m et n deux entiers avec $m \leqslant n$,

$$\sum_{\mathbf{k=m}}^{n} q^k = q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} \qquad \text{et en particulier :} \qquad \sum_{\mathbf{k=0}}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

⚠ Ne pas se tromper sur le nombre de termes pour l'exposant.

Preuve

(déjà faite à la page 4, mais ici, on peut adopter une preuve plus rapide).

On pose $S = \sum_{k=m}^{n} q^k$.

$$(1-q)S = S - qS = \sum_{k=m}^{n} q^k - q^{k+1} = q^m - q^{n+1} \quad \text{(somme télescopique)}$$

Or $q \neq 1$, donc $\sum_{k=m}^{n} q^k = \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q} = q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$. ■

Théorème 3.6 *(Rappel : somme géométrique)*

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$,
Soient m et n deux entiers avec $m \leqslant n$,

$$\sum_{\mathbf{k=m}}^{n} u_k = u_m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} \qquad \text{et en particulier :} \qquad \sum_{\mathbf{k=0}}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

⚠ Ne pas oublier de mettre le premier terme en facteur.
Au numérateur, l'exposant correspond au nombre de termes de la somme.

Preuve

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{n} u_m q^{k-m} = u_m \sum_{k=m}^{n} q^{k-m} = u_m \sum_{k=0}^{n-m} q^k = u_m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}.$$

■

Remarque : Dans le cas où la raison vaut 1, on additionne simplement $n+1$ fois le même terme u_0.

B Égalité de Bernoulli

L'égalité de Bernoulli est une généralisation de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. On peut aussi la voir comme une généralisation de la somme géométrique. Elle est surtout utile dans le sens de la factorisation.

Propriété 3.7 *(Égalité de Bernoulli)*

Soient $(a,b) \in \mathbf{C}^2$, soit $n \in \mathbf{N}$,

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k.$$

⚠ La somme ne va que jusqu'à n contrairement aux puissances.

Preuve

La deuxième égalité s'obtient directement à partir de la première par changement d'indice : $k \to n-k$, ou simplement en remarquant une symétrie entre a et b au signe « $-$ » près. Pour la première égalité, nous proposons ici deux preuves.

Preuve directe :

Le plus simple est de partir de l'expression avec la somme (il est plus facile de développer que de factoriser) :

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} &= a\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} - b\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(a^{k+1} b^{n+1-(k+1)} - a^k b^{n+1-k} \right) \\
&= a^{n+1} - b^{n+1} \qquad \text{(somme télescopique).}
\end{aligned}$$

Autre preuve avec la somme géométrique :

Si $a = b$, le résultat est trivial (les deux membres valent 0).
Si $a = 0$, le résultat se vérifie de façon élémentaire en remplaçant dans la somme.
Dans les autres cas,

$$\begin{aligned}
\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} &= a^n \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{b}{a}} \qquad (\text{car } a \neq 0) \\
&= a^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^k \qquad \text{(somme géométrique)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} b^k a^{n-k}.
\end{aligned}$$

La première preuve est plus simple, mais la seconde a l'avantage de montrer que la formule de Bernoulli n'est qu'une généralisation de la somme géométrique et valable sans restriction. ■

Remarque : Pour $a = 1$ et $b = q$ on retrouve l'expression de la somme géométrique, mais avant la division par $1-q$, ce qui explique que la formule est aussi valable pour $q = 1$.

4 Sommes doubles

A Somme sur un rectangle

Propriété 4.1 *(Échange des signes somme)*

Si les deux champs d'indice sont indépendants[4], on peut échanger les signes somme.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

Explications

Cela revient à échanger l'ordre de sommation.

		j						Σ
		$j=1$	$j=2$	$\cdots$	j	$\cdots$	$j=p$	
i	$i=1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,j}$	$\cdots$	$a_{1,p}$	S_1
	$i=2$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,j}$	$\cdots$	$a_{2,p}$	S_2
	$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$
	i	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$\cdots$	$a_{i,j}$	$\cdots$	$a_{i,p}$	S_i
	$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$
	$i=n$	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\cdots$	$a_{n,j}$	$\cdots$	$a_{n,p}$	S_n
Σ		$\widetilde{S_1}$	$\widetilde{S_2}$	$\cdots$	$\widetilde{S_j}$	$\cdots$	$\widetilde{S_p}$	

$$\rightarrow \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \widetilde{S_j}$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} S_i$$

Pour i fixé, $S_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}$ correspond à la somme suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne.

Pour j fixé, $\widetilde{S_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$ correspond à la somme suivant la $j^{\text{ème}}$ colonne.

La somme double $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}$ correspond à la somme de toutes les cases du tableau.

On peut l'obtenir :

- En sommant d'abord suivant les colonnes, puis en faisant la somme des $\widetilde{S_j}$ obtenus,
- En sommant d'abord suivant les lignes, puis en faisant la somme des S_i obtenus,
- Ou de toute autre manière dès lors que l'on compte chaque terme une et une seule fois.

4. C'est-à-dire lorsque les bornes de la somme intérieure ne dépendent pas de l'indice défini dans la somme extérieure.

L'ordre de sommation n'a pas d'importance et on peut adopter la notation compacte :

Notation

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

Et lorsqu'on somme sur la même plage d'indices :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

Remarque : Même s'il n'y a qu'un seul signe $\sum$, il s'agit bien d'une somme double car on y définit deux indices : i et j.

B Somme sur un triangle

Propriété 4.2 *(Somme sur un triangle)*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=\mathbf{i}}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\mathbf{j}} a_{i,j}.$$

⚠ Contrairement à la somme sur un rectangle, les bornes de la somme intérieure dépendent de l'indice de la somme extérieure.

Explications

La somme consiste à additionner les éléments d'un triangle :

		j						Σ
		$j=1$	$j=2$	$\cdots$	j	$\cdots$	$j=n$	
i	$i=1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,j}$	$\cdots$	$a_{1,n}$	S_1
	$i=2$		$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,j}$	$\cdots$	$a_{2,n}$	S_2
	$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	
	i				$a_{i,j}$	$\cdots$	$a_{i,n}$	S_i
	$\vdots$					$\ddots$	$\vdots$	
	$i=n$						$a_{n,n}$	S_n
Σ		$\widetilde{S_1}$	$\widetilde{S_2}$	$\cdots$	$\widetilde{S_j}$	$\cdots$	$\widetilde{S_n}$	

$$\rightarrow \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\mathbf{j}} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{S_j}$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=\mathbf{i}}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} S_i$$

Méthode *(Pour sommer facilement sur un triangle)*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\ \sum_{1\leqslant j\leqslant i} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} a_{i,j}.$$

On peut la lire la dernière somme de 2 façons différentes.

- Pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$ **fixé**, on a j tel que $1 \leqslant j \leqslant i$. Cela donne la somme :

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j}.$$

- Ou, pour chaque $j \in [\![1,n]\!]$ **fixé**, on a i tel que $j \leqslant i \leqslant n$. On obtient :

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}.$$

Remarque : On peut adapter la règle pour le triangle inférieur ou en cas d'inégalités strictes entre i et j.

Exemple

Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}$.

Solution :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n}\frac{j}{j} = n.$$

C Somme à indices séparables sur un rectangle

Propriété 4.3 *(Indices séparables)*

Pour une somme sur un rectangle, quand l'élément sommé s'écrit comme produit de deux facteurs dont chacun ne dépend que d'un indice, on peut séparer les sommes :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right).$$

Preuve

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{p} a_i b_j = a_i\left(\sum\limits_{j=1}^{p} b_j\right)$ car, pour i fixé, a_i est constante.

Or $B = \sum\limits_{j=1}^{p} b_j$ est une constante par rapport à i (ne dépend pas de i), donc

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i B = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) B = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right).$$ ∎

5 Produits et factorielle

A Notations

Notation *(Utilisation du symbole $\prod$)*

Soient $m \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{Z}$, avec $m \leqslant n$,
Soit $(a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n)$ une suite de nombres[5].
On définit le produit des a_k pour k variant de m à n par

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \times a_{m+1} \times \cdots \times a_n.$$

On note également :

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{m\leqslant k\leqslant n} a_k = \prod_{k\in[\![m,n]\!]} a_k.$$

Par **convention**, si $m > n$ le produit est vide et vaut 1.

Remarque : Comme pour la somme, l'indice est **muet**.

Explications

Lorsqu'une somme est vide, elle vaut 0, cela correspond à l'élément neutre pour le $+$.
En effet, ajouter 0 ne change pas la valeur d'un nombre.
De même, lorsqu'un produit est vide, il vaut l'élément neutre de $\times$, c'est-à-dire 1 car si on multiplie un nombre par 1, il est inchangé.
Parfois, l'utilisation d'une somme ou d'un produit vide peut simplifier l'expression de certaines propriétés en évitant de traiter des cas particuliers à part.

Propriété 5.1 *(Définition d'un produit par récurrence)*

Initialisation - Produit vide : Pour tout $(m,n) \in \mathbf{Z}^2$, avec $m > n$, $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = 1.$

Hérédité : Pour tout $(m,n) \in \mathbf{Z}^2$ avec $m \leqslant n$, $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = \left(\prod_{k=m}^{n-1} a_k\right) \times a_n.$

Exemple

Résoudre $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = 0.$

5. Remarque similaire à la somme. On a changé le nom de l'opération mais les propriétés sont les mêmes.

Solution :
$\prod_{k=1}^{n} a_k = 0 \iff \exists k \in [\![1,n]\!],\ a_k = 0.$

Exemple

Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a.$

Solution :
$\prod_{k=0}^{n} a = a^{n+1}.$

Propriété 5.2 *(Relation de Chasles)*

Pour tout $(m,n,p) \in \mathbf{Z}^3$ avec $m \leqslant p \leqslant n$, $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = \left(\prod_{k=m}^{p} a_k\right)\left(\prod_{k=p+1}^{n} a_k\right).$

Définition 5.3 *(Factorielle)*

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la **factorielle** de n par

$$n\,! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

On lit « *factorielle n* ». D'après la convention sur le produit vide, $0\,! = 1$.

Exemple

$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ et $(n+1)! = (n+1)\,n!$

B Règles de calcul

Propriété 5.4

- Multiplicativité

$$\prod_{k=m}^{n} a_k b_k = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right).$$

- Passage à la puissance[6] α

$$\prod_{k=m}^{n} a_k^{\alpha} = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)^{\alpha}.$$

- Constante

$$\prod_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k.$$

⚠ Le produit n'est **pas linéaire** :

$$\prod_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=m}^{n} (a_k + b_k) \neq \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) + \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right).$$

Exemple

Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k}(k+3).$

Solution :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k}(k+3) &= 5^n \left(\prod_{k=1}^{n} \sqrt{k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n} (k+3)\right) = 5^n \sqrt{\prod_{k=1}^{n} k}\left(\prod_{k=1}^{n} (k+3)\right)\\
&= 5^n \sqrt{n!}\left(\prod_{k=1}^{n} (k+3)\right)\\
&= 5^n \sqrt{n!}\left(\prod_{k=4}^{n+3} k\right) \qquad \text{(changement d'indice)}\\
&= 5^n \sqrt{n!}\left(\frac{1\times 2\times 3}{1\times 2\times 3}\prod_{k=4}^{n+3} k\right) = 5^n \sqrt{n!}\left(\frac{1}{3!}\prod_{k=1}^{n+3} k\right) = 5^n \sqrt{n!}\,\frac{(n+3)!}{3!}.
\end{aligned}$$

Remarque : Les **changements d'indice** se réalisent de la même façon qu'avec les sommes.

Propriété 5.5 *(Produit télecopique)*

Si les (a_k) **sont tous non nuls**, alors

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}.$$

Preuve

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\cancel{a_{m+1}}}{a_m}\,\frac{\cancel{a_{m+2}}}{\cancel{a_{m+1}}}\,\frac{\cdots}{\cancel{a_{m+2}}}\cdots\frac{\cancel{a_n}}{\cdots}\,\frac{a_{n+1}}{\cancel{a_n}} = \frac{a_{n+1}}{a_m}.$$ ■

Exemple

Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+3}{k}.$

Solution :

Dans ce produit, le décalage d'indice entre le numérateur et le dénominateur est de 3, et il reste donc trois facteurs « au début » et « à la fin » du produit.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \frac{k+3}{k} &= \frac{\cancel{4}}{1}\times\frac{\cancel{5}}{2}\times\frac{\cdots}{3}\times\frac{\cdots}{\cancel{4}}\times\frac{\cdots}{\cancel{5}}\times\cdots\times\frac{\cancel{n-1}}{\cdots}\times\frac{\cancel{n}}{\cdots}\times\frac{n+1}{\cdots}\times\frac{n+2}{\cancel{n-1}}\times\frac{n+3}{\cancel{n}}\\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

6. Ceci n'a un sens que si les éléments peuvent être mis à la puissance α. Par exemple, si un a_k est négatif, on exige que $\alpha \in \mathbf{Z}$.

6 Coefficients binomiaux

Les coefficients binomiaux ont déjà été rencontrés en classe de 1re avec les probabilités discrètes. Le programme se limitait à une interprétation probabiliste du coefficient à partir de la loi binomiale, à l'exclusion de toute formule explicite de ce coefficient. Le seul moyen de calculer ce coefficient était d'avoir recours au triangle de Pascal ou à la calculatrice.
Dans ce chapitre, on ne s'intéresse qu'à l'aspect calculatoire sans se soucier d'une quelconque interprétation probabiliste. La logique est donc à l'inverse de ce qui a été fait en 1re : on commence par les calculs puis on étudie les probabilités *ensuite.*

Définition 6.1 *(Coefficient binomial)*

Soit $(n,k) \in \mathbf{N}^2$ avec $n \geqslant k$.
On appelle **coefficient binomial** de paramètres n, k, le nombre

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

On lit « k *parmi* n ».

Par convention : si $n < k$, alors $\binom{n}{k} = 0$.

Propriété 6.2

$\forall (n,k) \in \mathbf{N}^2$ avec $k \leqslant n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-k+i}{i}.$$

Valeurs remarquables : $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n.$

Symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$

Pour $k \neq 0$: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ (« formule sans nom »).

Preuve

Élémentaire, chers étudiants ! Il suffit d'écrire les coefficients binomiaux avec les factorielles. ∎

Remarque : La « formule sans nom » est sans doute celle qui en possède le plus, d'où ma prédilection pour cette appellation.
On l'appelle également « petite formule », « formule de factorisation », « formule du pion » (correspond à un mouvement en diagonale sur le triangle de Pascal, comme un pion aux échecs) ou encore « formule du capitaine » (pour des raisons de dénombrement : correspond à un nombre de façons de choisir une équipe avec un capitaine). Et peut-être encore autrement ?

Théorème 6.3 *(Triangle de Pascal)*

Pour $(k,n) \in \mathbf{N}^2$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Explications

Cette formule à l'immense intérêt de donner une relation sommatoire entre les coefficients binomiaux (qui sont exprimés à partir de produit). Elle permet d'obtenir facilement les coefficients binomiaux par récurrence.
Elle s'illustre et se mémorise à travers le triangle de Pascal.

n=0	1					
n=1	1	1				
n=2	1	2	1			
n=3	1	3	3	1		
n=4	1	4	6	4	1	
n=5	1	5	10	10	5	1
	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5

Pour trouver un coefficient binomial, on fait la somme de celui juste au dessus et de celui au dessus à gauche. Et si l'un des deux n'existe pas pour la somme, on prend seulement la valeur de celui qui existe.
Par exemple, pour obtenir $\binom{5}{1} = 5$, on fait la somme du 1 et du 4 au dessus (eux-mêmes obtenus à partir des éléments supérieurs). Cela revient à faire le calcul :

$$\binom{5}{1} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1}.$$

Preuve

Pour $0 \leqslant k < n$,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{k+1+(n-k)}{(n-k)(k+1)}\right) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\,\frac{n+1}{(n-k)(k+1)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Dans les autres situations, $k \geqslant n$, voire $k < 0$ et $n \in \mathbf{Z}$, on vérifie facilement que la formule reste valable. ■

Corollaire 6.4

Les coefficients binomiaux sont des entiers.

Preuve

Par récurrence simple à partir du triangle de Pascal. L'hypothèse de récurrence est $\mathcal{P}(n) =$ « $\forall k \leqslant n,\ \binom{n}{k} \in \mathbf{N}$ ». ■

Le théorème qui suit généralise les identités remarquables $(a+b)^2$ et $(a-b)^2$ à n'importe quelle puissance entière (positive).

Théorème 6.5 *(Formule du binôme de Newton)*

$\forall (a,b) \in \mathbf{C}^2$, $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Preuve

La preuve se fait par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $(a+b)^0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$.

Donc l'égalité est bien vérifiée.

Hérédité : On suppose la formule vérifiée au rang $n \in \mathbf{N}$ fixé.

On cherche à démontrer la formule au rang $n+1$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \text{(hyp. de récurrence)} \\
&= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \qquad \text{(chang. d'indice } k \text{ par } k-1\text{)} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} b^{n+1} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} \qquad \text{(Triangle de Pascal)} \\
&= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1}.
\end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : Par principe de récurrence, la formule du binôme de Newton est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

La deuxième égalité s'obtient simplement par symétrie des rôles entre a et b. ■

Corollaire 6.6

Pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0.$$

⚠ La deuxième égalité est fausse pour $n = 0$ (la somme vaut $0^0 = 1$).

Preuve

Utilisation du binôme de Newton avec $a = b = 1$ pour la première relation et $a = -1$ et $b = 1$ pour la seconde. ■

7 Utilisation des fonctions polynomiales

Nous introduisons sur un exemple ici une technique de calcul très efficace qui s'appuie sur les fonctions polynomiales.
Des méthodes plus poussées seront vues dans le chapitre sur les polynômes.

Exemple

À l'aide de la fonction polynomiale $f : x \mapsto (1+x)^n$ et de sa dérivée, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Solution :
On pose $f : x \mapsto (1+x)^n$ qui est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$.

D'après la formule du binôme de Newton : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

On dérive de part et d'autre les deux expressions :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}.$$

On peut évaluer en 1 ce qui donne

$$n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}.$$

On obtient donc l'égalité voulue.