# Applications

« Les mathématiciens n'étudient pas des objets mais les relations entre ces objets »
Henri Poincaré (1854-1912)

Dans les chapitres sur les ensembles et sur les nombres réels, nous avons étudié les ensembles « de l'intérieur », en les observant de façon *statique*, élément par élément. Avec les applications, nous allons changer radicalement de point de vue et les étudier de façon *dynamique* en créant des relations.
Chaque application peut être vue comme un éclairage qui nous fait voir un certain ensemble depuis un point de vue particulier.
L'application met ainsi en relation des ensembles différents, et notre connaissance de l'un nous renseigne sur l'autre : si un ensemble est trop compliqué à étudier directement de l'intérieur, nous pouvons le mettre en relation avec d'autres ensembles que nous connaissons mieux. Chaque relation (application) nous renseigne alors sur un aspect de cet ensemble.
L'intérêt des applications est multiple. Ainsi, nous en découvrirons certaines qui *immergent* un ensemble dans un autre ensemble plus grand (les injections), d'autres qui le recouvrent (les surjection), ou enfin qui déforment cet ensemble (les bijections). Face à un ensemble, vous aurez toujours à disposition cette *dualité* d'approches : l'approche statique/intérieure et l'approche dynamique/extérieure. Ceci sera surtout utile dans les chapitres d'algèbre linéaire.

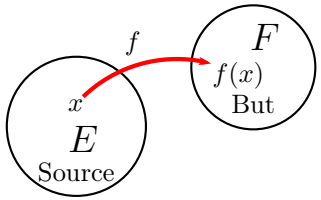
## 1 Définition d'une application

**Définition 1.1** *(Application)*

Soient $E$ et $F$ des ensembles.
Une **application** $f$ de $E$ vers $F$ est telle que

$$\forall x \in E,\ \exists ! \, y \in F,\ \text{ tel que } f(x) = y.$$

- $y$ s'appelle alors l'**image** de $x$ par l'application $f$,
- $x$ est **UN antécédent** de $y$,
- l'ensemble des couples $\{(x, f(x)),\ x \in E\}$ s'appelle le **graphe** de l'application $f$,
- $E$ est appelée la **source** et $F$ le **but**.



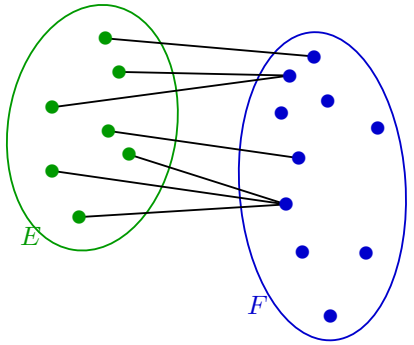

**Explications**
La formule quantifiée se comprend ainsi :

« Pour tout $x$ dans la source $E$, on associe une unique image $y$ dans le but $F$.
Cette image est notée $f(x)$. »

*Remarques* sur le nombre d'images et d'antécédents :

- L'image de $x$ par $f$ doit exister et être unique. C'est ce qui justifie l'écriture $f(x)$.
- Deux éléments distincts de $E$ peuvent avoir la même image.
- Un élément $y \in F$ peut avoir zéro, un, ou davantage d'antécédents.

De façon imagée, créer une application revient à faire partir une flèche de chaque élément $x \in E$ vers un élément $y \in F$.
Ainsi, de chaque élément de la source, part une et une seule flèche. Par contre, plusieurs flèches qui proviennent d'éléments différents de $E$, peuvent arriver au même élément $y \in F$.



⚠ Formellement, les ensembles de départ et d'arrivée font partie de la définition de l'application. Si on change le domaine de départ ou le domaine d'arrivée, alors on change d'application. Néanmoins, dans l'usage courant, on se permet parfois de restreindre le but sans changer le nom de l'application.
En toute rigueur, pour montrer que $f$ et $g$ représentent la même application, il faut montrer 3 choses :

- $f$ et $g$ ont la même source $E$,
- $f$ et $g$ ont le même but $F$,
- $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.

Le troisième point ne suffit pas pour dire que les applications sont égales.
⚠ Ne pas confondre $f$ et $f(x)$.
L'application $f$ désigne la *relation*, c'est-à-dire l'ensemble des « flèches » entre $E$ et $F$, alors que $f(x)$ désigne un élément particulier de $F$.
Il ne faut donc pas confondre les deux : n'écrivez **jamais** $f(x)$ si vous parlez de la fonction (il s'agit d'un élément $y \in F$ et non de la fonction).

**Exemple** *(Application constante)*
Soit $\alpha \in \mathbf{R}$, l'application constante égale à $\alpha$ sur $\mathbf{R}$ est définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \alpha. \end{array} \right.$$

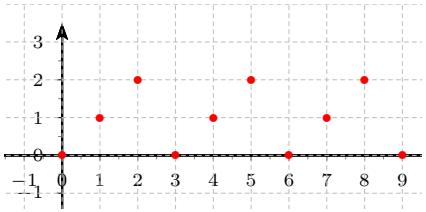
Ici, on voit bien que $f$ envoie chaque $x$ vers une unique image : $\alpha$.
Par contre, $\alpha$ possède une infinité d'antécédents.
Le graphe de $f$ est l'ensemble $\{(x, \alpha),\ x \in \mathbf{R}\}$, c'est-à-dire la droite horizontale d'ordonnée $\alpha$.

**Exemple**
$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est une application de source $\mathbf{R}$ et de but $\mathbf{R}$.
Son graphe est une parabole. L'image de 5 par cette application est 25.

**Exemple** *(Application identité)*
Soit $E$ un ensemble,
On appelle **fonction identité** de $E$, l'application

$$\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x. \end{array} \right.$$

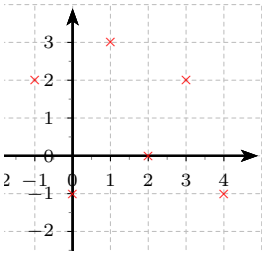
**Exemple**
On considère l'application « reste de la division euclidienne par 3 » sur $\mathbf{N}$.
Son graphe est représenté par des points :




On remarque que l'ensemble de définition d'une application n'est pas nécessairement $\mathbf{R}$, mais peut être tout autre ensemble fini ou infini.
Dans l'exemple précédent, la source est $\mathbf{N}$ : c'est une suite réelle.
Ainsi toute suite réelle est en fait une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$.
La notation $u_n$ désigne l'image de $n \in \mathbf{N}$ par la suite $u$.

**Exemple**
On n'est pas obligé de décrire une application par une formule. Par exemple, si la source est un ensemble fini, on peut simplement énumérer les images pour chaque $x \in E$.

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $2$ | $-1$ | $3$ | $0$ | $2$ | $-1$ |




**Exemple** *(Affectations en Python )*
Lorsque l'on fait une affectation en Python, le programme fait pointer un nom de variable vers une unique case mémoire. Par contre, plusieurs noms de variable différents peuvent pointer vers la même case mémoire. On peut ainsi considérer que la table des noms en Python est une application de l'ensemble des variables définies, vers l'ensemble des cases mémoire du disque.

**Exemple**
On considère l'application qui associe à une partie son intersection avec une autre.
Si $E$ est un ensemble et $B \subset E$, alors on peut définir :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(B) \\ A & \mapsto & A \cap B. \end{array} \right.$$

**Définition 1.2** *(Définition formelle d'une application - Hors programme)*

Une application de $E$ dans $F$ est définie par un triplet : $(E, F, G)$ avec $G \subset E \times F$ tel que

1. $\forall x \in E, \exists y \in F, (x, y) \in G$.
2. $\forall x \in E, \forall (y_1, y_2) \in F, (x, y_1) \in G$ et $(x, y_2) \in G \Rightarrow y_1 = y_2$.

*ou de façon équivalente :*
Une application de $E$ dans $F$ est définie par une relation binaire $\mathscr{R}$ entre $E$ et $F$ qui vérifie :

1. $\forall x \in E, \exists y \in F, x \mathscr{R} y$.
2. $\forall x \in E, \forall (y_1, y_2) \in F, x \mathscr{R} y_1$ et $x \mathscr{R} y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$.

$G$ est le graphe de l'application.

**Définition 1.3** *(Fonction)*

Une **fonction** est une application pour laquelle un élément de l'ensemble de départ n'a pas nécessairement d'image (mais si elle existe, alors elle est unique).
La partie de $E$ sur laquelle la fonction admet des images (« *est définie* ») s'appelle **l'ensemble de définition** (ou domaine de définition).

*Le programme ne fait pas la distinction entre les deux termes, et on s'arrangera donc pour toujours travailler avec des applications.*

**Explications**
Concrètement, cela revient à prendre un ensemble source « trop gros » et il faut alors chercher le domaine de définition composé des $x$ qui ont une image par la fonction.

**Exemple**
$x \mapsto \sqrt{x}$ peut être considérée comme une *fonction* sur $\mathbf{R}$.
Son domaine de définition est $\mathbf{R}_+$ : $x \mapsto \sqrt{x}$ est une *application* de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$.

**Notation**

On note $F^E$ ou $\mathscr{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de $E$ vers $F$.

⚠ Il faut lire la première notation « à l'envers » : l'ensemble de départ correspond à l'exposant.

**Exemple**
$\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ désigne les applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
$\mathbf{R}^{[-3,+\infty[}$ désigne les applications de $[-3, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$.
$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ désigne les applications de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, c'est-à-dire les suites réelles.
$\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ désigne les applications de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{C}$, c'est-à-dire les suites complexes.

**Explications**
On retrouve la même notation que pour les produits cartésiens. En fait, les produits cartésiens et les familles d'éléments sont des applications. Ils « partent » d'un ensemble d'indices vers les éléments que l'on cite.
Par exemple, lorsque l'on note $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, c'est une application de $\{1, 2\}$ dans $\mathbf{R}$ qui à 1 associe $x_1$ et à 2 associe $x_2$.

$$\begin{cases} 1 \mapsto x_1 \\ 2 \mapsto x_2 \end{cases}$$

L'indice $i$ sert à désigner l'élément $x_i$ de façon unique. C'est exactement ce que fait une fonction : $x_i$ est une façon commode de noter $x(i)$.
Nous avions vu que, contrairement aux ensembles, les éléments d'une famille, ne sont pas nécessairement distincts : dans une fonction, deux éléments peuvent avoir la même image.

**Exemple**
On considère l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbf{R}^{\mathbf{R}} & \to & \mathbf{R} \\ f & \mapsto & f(1) \end{cases}$
Ici, l'espace de départ est compliqué, c'est un ensemble d'applications.
$\varphi(x \mapsto x^2) = 1^2 = 1, \quad \varphi(x \mapsto \mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}, \quad \varphi(x \mapsto \lfloor x \rfloor) = \lfloor 1 \rfloor = 1 \ldots$

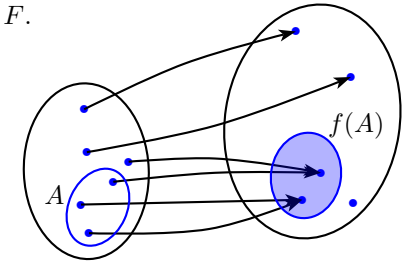
## 2 Images directe et réciproque d'une partie

**Définition 2.1** *(Image directe)*

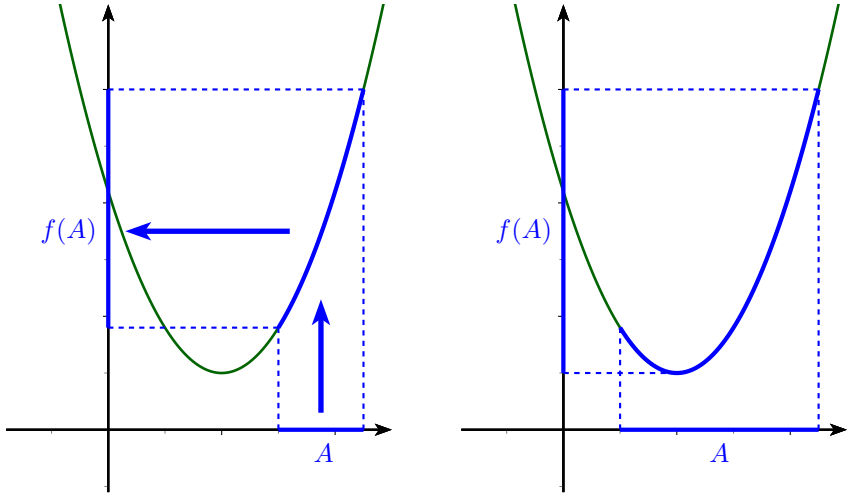
Soit $f$ une application de $E$ vers $F$, et $A \subset E$.
L'**image directe** de $A$ par $f$, est l'ensemble des images des éléments de $A$

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in F, \text{ tel que } \exists x \in A,\ f(x) = y\}.$$

$f(A)$ est une partie de $F$.




⚠ La notation $f(A)$ ne désigne pas un élément de $F$, mais une partie de $F$. $f(A)$ est un ensemble d'images.
Tous les éléments de $A$ ont leur image dans $f(A)$, par contre, un élément de $f(A)$ peut avoir des antécédents hors de $A$ (mais il en a au moins un dans $A$).




Lecture graphique de l'image directe pour une application numérique.

**Exemple**

Soit $f : x \mapsto x^2$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, déterminer $f([0,2])$, $f(\emptyset)$ et $f([-1,5[)$.

**Solution :**

$f([0,2]) = [0,4]$, $\quad f(\emptyset) = \emptyset$, $\quad f([-1,5[) = [0,25[$.

**Exemple**

Déterminer $\cos\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

**Solution :**

$\cos\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = ]0,1]$.

**Définition 2.2** *(Image d'une application)*

Soit $f : E \to F$, l'image de $f$ est $\mathrm{Im}(f) = f(E)$.

**Explications**

Cela correspond aux images de tous les points de $E$. C'est l'image directe de $E$ par $f$. On peut aussi l'interpréter comme l'ensemble des points de $F$ qui sont atteints par $E$ : ceux qui ont un antécédent.

**Définition 2.3** *(Image réciproque)*

Si $B$ est une partie de $F$, on appelle **image réciproque** de $B$ par $f$ et on note $f^{-1}(B)$, la partie de $E$ qui constituée des antécédents des éléments de $B$ :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}.$$

$f^{-1}(B)$ est une partie de $E$.

⚠ Il n'est pas question ici d'application réciproque, ou d'inverse... $f^{-1}$ ne désigne pas une nouvelle fonction.

**Exemple**

Pour l'application $f : x \mapsto x^2$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, donner $f^{-1}([0,4])$ et $f^{-1}([-3;-2])$.

**Solution :**

$f^{-1}([0,4]) = [-2;2]$ et $f^{-1}([-3;-2]) = \emptyset$.

**Propriété 2.4**

Soit $f$ une application de $E$ vers $F$
Soient $A$, $A'$ des parties de $E$ et $B$, $B'$ des parties de $F$

1. (Croissance)
   - Si $A \subset A'$ alors $f(A) \subset f(A')$.
   - Si $B \subset B'$ alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
2. (Réunion)
   - $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.
   - $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.
3. (Intersection)
   - $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ **Attention !**
   - $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.
4. (« Aller-retour »)
   - $A \subset f^{-1}(f(A))$
   - $f(f^{-1}(B)) \subset B$

**Preuve** *(pour l'image directe uniquement)*

1. Soit $y \in f(A)$, alors $\exists\, x \in A$ tel que $f(x) = y$, or $A \subset A'$, donc $x \in A'$, donc $y \in f(A')$.
   Ceci étant vrai pour tout $y \in f(A)$, on a donc $f(A) \subset f(A')$.
2. $y \in f\left(A \cup A'\right) \iff \exists\, x \in A \cup A'$, tel que $y = f(x)$
   $\iff \exists\, x \in A$, tel que $y = f(x)$ ou $\exists\, x \in A'$, tel que $y = f(x)$
   $\iff y \in f(A)$ ou $y \in f(A')$
   $\iff y \in f(A) \cup f(A')$
3. Soit $y \in f(A \cap A')$, alors $\exists\, x \in A \cap A'$ tel que $f(x) = y$.
   Ainsi, $\exists\, x \in A$, et $\exists\, x' \in A'$ (en fait $x = x'$), tel que $f(x) = f(x') = y$.
   Donc $y \in f(A)$ et $y \in f(A')$, donc $y \in f(A) \cap f(A')$.
   Ceci étant vrai pour tout $y \in f\left(A \cap A'\right)$, on a montré que $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.
   Pour montrer que l'inclusion réciproque est fausse **en général** (elle peut être vraie dans des cas particuliers), il suffit de trouver un contre-exemple. C'est traité dans l'exemple qui suit.

*Remarque :* qu'est-ce qui, dans cette preuve, permet de travailler avec des équivalences pour démontrer l'union et qui n'est plus valable pour la preuve avec l'intersection ?

C'est le passage de « $\exists x \in A \cup A'$, tel que $y = f(x)$ » à
« $\exists x \in A$, tel que $y = f(x)$ ou $\exists x \in A'$, tel que $y = f(x)$ ».
Ces deux propriétés sont bien équivalentes. En effet, si un antécédent appartient à l'union, alors, il existe bien un antécédent dans au moins un des deux ensembles. Réciproquement, s'il existe un antécédent dans $A$ ou un antécédent dans $A'$, alors, il en existe un dans l'union.
Mais pour l'intersection, cela ne fonctionne plus.
Le sens direct reste vrai : s'il existe un élément dans l'intersection $A \cap A'$, cela signifie qu'il en existe à la fois un dans $A$ et un dans $A'$ (on prend le même). Par contre, ce n'est pas parce que $y$ admet un antécédent dans $A$ et un dans $A'$ qu'il en admet un dans l'intersection. En effet, il n'y a aucune raison que l'antécédent dans $A$ soit le même que celui dans $A'$ : il n'appartient pas à l'intersection en général. C'est cette idée qui nous permet de penser à un contre exemple. ■

**Exemple**

Soit l'application $f : x \mapsto x^2$ (*faire des schémas pour visualiser ces images directes !*).

**Croissance :**
$[1,2] \subset [-1,5[$, $f([1,2]) = [1,4] \subset [0,25[ = f([-1,5[)$.
Par contre, la croissance est « large » : une inclusion stricte peut donner une égalité après passage à l'image.
$[0,5[ \subsetneq [-1,5[$ et pourtant $f([0,5[) = [0,25[ = f([-1,5[)$.

**Réunion :**
$f([1,3] \cup [2,5]) = f([1,5]) = [1,25] = [1,9] \cup [4,25] = f([1,3]) \cup f([2,5])$
$f([-1,0] \cup [2,5]) = [0,1] \cup [4,25] = f([-1,0]) \cup f([2,5])$

**Intersection :**
$f([1,2] \cap [-2,-1]) = f(\emptyset) = \emptyset$ mais $f([1,2]) \cap f([-2,1]) = [1,4] \cap [1,4] = [1,4]$.
On a bien l'inclusion mais pas l'égalité.

## 3 Fonctions identité et indicatrice

**Définition 3.1**

On appelle **application identité** de l'ensemble $E$ et on note $\mathrm{Id}_E$, l'application

$$\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x. \end{array} \right.$$

**Explications**

C'est l'application qui... ne fait rien ! Elle envoie chaque élément sur lui-même.
Elle n'en est pas inutile pour autant, au contraire ! C'est comme le 0 qui ne fait rien pour l'addition, mais qui est pourtant très utile.

**Définition 3.2**

Soit $E$ un ensemble et $A$ une partie de $E$.
On appelle **fonction indicatrice de** $A$, et on note $\mathbf{1}_A$ l'application

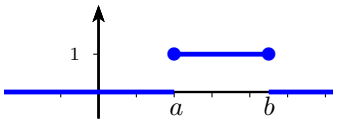
$$\mathbf{1}_A : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \{0;1\} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

**Explications**

C'est la fonction qui permet de savoir si nous sommes dans $A$ ou en dehors de $A$. C'est une fonction de « test ».
En physique, par exemple, cette fonction peut donner un signal lorsque certains événements sont réalisés ($x \in A$).

**Exemple**

$\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$ vaut 1 si $x \in [a,b]$ et 0, sinon.




**Exemple**

Soient $A, B$ deux parties de $E$. Montrer successivement que

1. $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$,
2. $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$,
3. $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

**Solution :**

1. Par disjonction des cas :
   - si $x \in A \cap B$, alors $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 1$, et $x \in A$ et $x \in B$, donc $\mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 1 \times 1 = 1$.
   - si $x \notin A \cap B$, alors $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 0$
     et $x \notin A$ ou $x \notin B$, donc l'un des facteurs au moins $\mathbf{1}_A(x)$ ou $\mathbf{1}_B(x)$ est nul, donc $\mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 0$.

   On a donc bien montré que $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.
2. On fait de même par disjonction des cas :
   - si $x \in A$, alors $\mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 0$, et $1 - \mathbf{1}_A(x) = 1 - 1 = 0$.
   - si $x \notin A$, alors $\mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 1$ et $1 - \mathbf{1}_A(x) = 1 - 0 = 1$.

   On a donc bien montré que $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$.
3. $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$, donc
   $\mathbf{1}_{A\cup B} = 1 - \mathbf{1}_{\overline{A}\cap\overline{B}} = 1 - \mathbf{1}_{\overline{A}}\mathbf{1}_{\overline{B}} = 1 - (1 - \mathbf{1}_A)(1 - \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$.

# 4 Composées, restrictions, prolongements

**Définition 4.1** *(Composée de deux applications)*

Soient $E, F, G$ trois ensembles, $f : E \to F$ une application de $E$ vers $F$, et $g : F \to G$ une application de $F$ vers $G$.

La composée à gauche de $f$ par $g$, notée $g \circ f$ (aussi lu « $g$ rond $f$ ») est l'application définie de $E$ vers $G$ par

$$\forall x \in E,\ (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

**Explications**

De façon concrète, faire une composition, c'est enchaîner les actions $f$ puis $g$.

$$\begin{array}{ccccc} E & \to & F & \to & G \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)). \end{array}$$

⚠ Ne pas se tromper sur l'ordre de $f$ et de $g$. Écrire $f \circ g$ n'aurait aucun sens car les ensembles ne correspondent pas. La composition n'est **pas commutative**.

**Exemple** *(Python)*

```
def f1(liste):
    a = 0
    for i in liste:
        a += i
    return a

def f2(x):
    return x**2

liste = [1,2,3,4]
f2(f1(liste))          #renvoie 100
f1(f2(liste))          #renvoie une erreur
```

La composition n'est pas commutative : $f_2 \circ f_1$ existe, mais $f_1 \circ f_2$ n'est pas définie.

**Exemple**

Si $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$, alors $f \circ g \neq g \circ f$.

On peut le voir tout de suite avec les ensembles source et but qui diffèrent.

Plus explicitement, on observe que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ (f \circ g)(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad \text{alors que} \quad \forall x \in \mathbf{R},\ (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

**Propriété 4.2** *(Associativité de la composition)*

Si $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$, alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

On dit que la composition est **associative**.

**Propriété 4.3**

Si $f : E \to F$, alors $\mathrm{Id}_F \circ f = f$ et $f \circ \mathrm{Id}_E = f$.

**Propriété 4.4**

La composée de deux applications de même monotonie est croissante.
La composée de deux applications de monotonies contraires est décroissante.

*Remarque :* La composition préserve aussi le caractère *strict* de la monotonie, à condition que les deux applications soient toutes deux strictement monotones.

**Preuve**

La preuve est faite pour deux fonctions strictement croissantes (les autres preuves sont similaires).
On considère :

$$f : I \to J \qquad \text{et} \qquad g : J \to K.$$

$I$, $J$ et $K$ sont munies de relation d'ordre notées respectivement $\preccurlyeq_1$, $\preccurlyeq_2$ et $\preccurlyeq_3$ .
On note $\prec_1$, $\prec_2$ et $\prec_3$ les relations d'ordre stricte associées.
On suppose donc que $f$ est $g$ sont strictement croissantes. Soit $(x, y) \in I^2$, tel que $x \prec_1 y$. Par stricte monotonie de $f$ sur $I$, $f(x) \prec_2 f(y)$.
Or $g$ est elle-même strictement croissante sur $J$, donc

$$f(x) \prec_2 f(y) \Rightarrow g(f(x)) \prec_3 g(f(y)).$$

Ainsi on a montré que

$$\forall (x, y) \in I^2,\quad x \prec_1 y \Rightarrow (g \circ f)(x) \prec_3 (g \circ f)(y).$$

Donc $g \circ f$ est strictement croissante sur $I$. ■

**Définition 4.5** *(Restriction)*

Soit $f$ une application de $E$ vers $F$ et $A$ une partie de $E$.
On appelle **restriction** (à la source) de $f$ à $A$, et on note $f_{|A}$, l'application de $A$ dans $F$ définie par

$$f_{|A} : \left\{ \begin{array}{ccc} \boldsymbol{A} & \to & F \\ x & \mapsto & f(x). \end{array} \right.$$

Soit $f$ une application de $E$ vers $F$ et $B$ une partie de $F$ **telle que** $f(E) \subset B$
On appelle **restriction au but** ou **corestriction** de $f$ à $B$, et on note $f^{|B}$, l'application de $E$ dans $B$ définie par

$$f^{|B} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \boldsymbol{B} \\ x & \mapsto & f(x). \end{array} \right.$$

*Remarque :* Ces notations ne sont pas officielles, mais couramment utilisées.

⚠ On peut restreindre à la source sans se poser trop de questions. Par contre, lorsque l'on restreint au but, il faut s'assurer que le nouvel espace d'arrivée (le but) contient toutes les images de la source.

**Exemple**

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie de $\mathbf{R}^*$ dans $\mathbf{R}$.
Si on ne s'intéresse qu'aux $x$ positifs, on peut restreindre à $\mathbf{R}_+^*$ et étudier $f_{|\mathbf{R}_+^*}$.
$f$ n'est pas décroissante sur $\mathbf{R}$ (car $f(2) > f(-1)$), mais $f_{|\mathbf{R}_+^*}$ est strictement décroissante.

La valeur 0 n'est jamais atteinte par $f$, on peut donc simplifier l'espace d'arrivée en restreignant au but à $\mathbf{R}^*$ : $f^{|\mathbf{R}^*}$. De la sorte, tous les éléments de l'espace d'arrivée sont atteints par $f$.

On peut restreindre à la fois à la source et au but : $f_{|\mathbf{R}_+^*}^{|\mathbf{R}_+^*}$.

**Définition 4.6** *(Prolongement)*

Soit $f$ une application de $E$ vers $F$ et $G$ un ensemble contenant $E$.
On appelle **prolongement** de $f$ à $G$, toute application $\widetilde{f} : G \to F$, telle que $\widetilde{f}_{|E} = f$.

**Explications**

Cela revient simplement à rajouter des points dans la source, et il faut donc leur définir également une image à chacun (pour que l'application soit bien définie).
L'important lorsque l'on réalise un prolongement, c'est de ne pas changer ce qui est existant : si un élément $x$ admet déjà une image par $f$, alors il ne faut pas la modifier. C'est le sens de la condition : $\widetilde{f}_{|E} = f$.

*Remarque :* Pour $A$ fixé, la restriction est unique. En revanche, pour $G$ fixé, il existe en général plusieurs prolongements possibles.

**Exemple**

On peut prolonger la fonction racine carrée sur $\mathbf{R}$ d'une infinité de façons.
Par exemple :

$$f : x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \sqrt{|x|} & \text{si } x < 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad f : x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{|x|} & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$$

$$\text{ou} \quad f : x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \cdots$$

# 5 Injections, surjections, bijections

## A Injections

**Définition 5.1** *(Injection)*

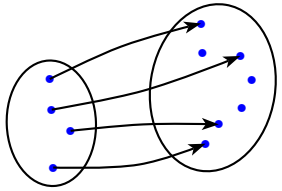
Soit $f$ une application de $E$ vers $F$, on dit que $f$ est une **injection**, ou que $f$ est **injective** si chaque élément de l'image a un *unique* antécédent.
c'est-à-dire si

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

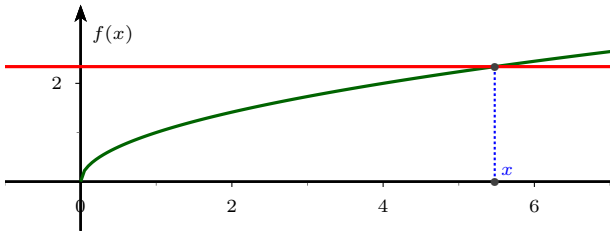
### Explications

L'expression avec les quantificateurs se comprend ainsi : si deux éléments ont la même image, alors ils sont nécessairement égaux. Ainsi, deux éléments différents ne peuvent pas avoir la même image.
D'un point de vue qualitatif, une injection préserve la séparation des éléments : deux éléments distincts auront leur image distincte.
Cela suppose qu'il y ait *plus* d'éléments dans $F$ que dans $E$, c'est la raison pour laquelle on parle d'injection : c'est comme si on *injectait* $E$ dans un espace plus grand.

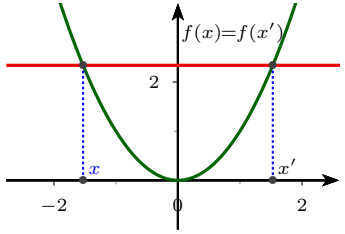
**Interprétation patatoïdale :** dans $F$, chaque élément est atteint par *au plus* une flèche.



**Interprétation pour les applications numériques :** $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est injective si, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, les droites horizontales $y = \alpha$ coupent au plus une fois la courbe.
Par exemple $x \mapsto \sqrt{x}$ est injective, mais pas $x \mapsto x^2$.




Fonction injective




Fonction non injective

**Propriété 5.2**

Le contraire de « $f$ est injective » est :

$$\exists (x_1, x_2) \in E^2 \text{ tel que } f(x_1) = f(x_2) \text{ et } x_1 \neq x_2.$$

### Explications

$f$ n'est pas injective s'il existe deux éléments distincts de $E$ qui ont la même image : si un élément de $F$ admet deux (ou plus) antécédents, alors la fonction n'est pas injective.

**Méthode** *(Prouver que $f$ est injective)*

Pour prouver qu'une application est injective, on peut au choix :

- (*méthode directe*)
  On pose $(x, x') \in E^2$ en supposant que $f(x) = f(x')$.
  On montre alors que nécessairement $x = x'$.
- (*par contraposée*)
  On pose $(x, x') \in E^2$ en supposant que $x \neq x'$.
  On montre alors que $f(x) \neq f(x')$.

**Exemple**

Prouver que $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est une injection de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$.
**Solution :**
Soient $(x, x') \in (\mathbf{R}_+)^2$, tels que $\sqrt{x} = \sqrt{x'}$, alors $x = \sqrt{x}^2 = \sqrt{x'}^2 = x'$, donc $f$ est injective.

**Exemple**

Prouver qu'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ paire n'est pas injective.
**Solution :**
Si $x \neq 0$, alors $x \neq -x$, et $f(x) = f(-x)$, donc $f$ n'est pas injective.
⚠ ne pas oublier la condition $x \neq 0$, sinon $x = x'$ et on n'a rien démontré.

**Propriété 5.3**

Une fonction strictement monotone sur son domaine de définition, *muni d'un ordre total,* est injective.

*Remarque sur les hypothèses :* La fonction n'est pas supposée continue quand bien même le domaine de définition serait un intervalle de $\mathbf{R}$.

⚠ c'est faux si la fonction est simplement monotone (au sens large). Par exemple, une fonction constante est monotone sans être injective.
Si l'ordre n'est pas total, la conclusion tombe également, car il se peut que deux éléments non comparables aient la même image.

**Preuve** *(à savoir refaire)*

Par exemple, si $f : (E, \preccurlyeq_1) \to (F, \preccurlyeq_2)$ est strictement croissante :
Soit $(x, x') \in E^2$, tel que $x \neq x'$.
L'ordre étant total sur $E$, on peut donc supposer, quitte à échanger les rôles entre $x$ et $x'$ que $x \prec_1 x'$.
Alors, par stricte croissance de $f$, $f(x) \prec_2 f(x')$, donc $f(x) \neq f(x')$.
La fonction $f$ est donc bien injective. ■

## B Surjections

Dire qu'une fonction est injective, ne veut pas dire qu'il y ait forcément des antécédents pour tous les $y \in F$. Par exemple $x \mapsto \sqrt{x}$ est injective, mais aucun $y < 0$ n'a d'antécédent. Cette existence d'antécédents est donnée par la surjectivité définie ci-dessous.

**Définition 5.4** *(Surjection)*

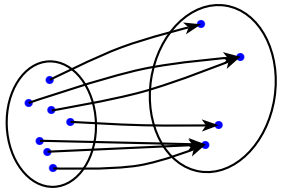
Soit $f$ une application de $E$ vers $F$, on dit que $f$ est une **surjection**, ou que $f$ est **surjective** si chaque élément de $F$ admet **au moins** un antécédent par $f$.
c'est-à-dire si

$$\forall y \in F, \quad \exists\, x \in E \text{ tel que } f(x) = y.$$

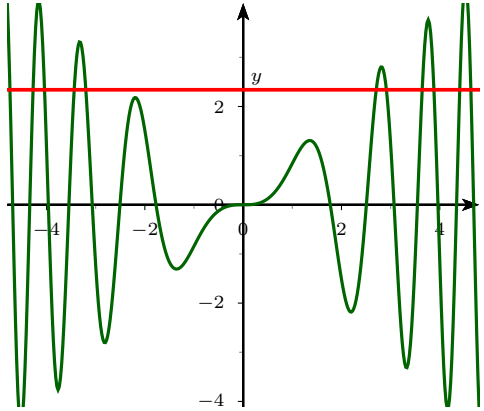
### Explications

D'un point de vue qualitatif, une surjection est une application qui atteint tous les points de l'espace d'arrivée. En reprenant le vocabulaire de l'image directe, $f$ est une surjection de $E$ sur $F$ si et seulement si $f(E) = F$ (et pas uniquement $F(E) \subset F$ comme c'est le cas en général).
Cela suppose qu'il y ait *plus* d'éléments dans $E$ que dans $F$, puisque chaque élément de $F$ doit avoir au moins un antécédent.

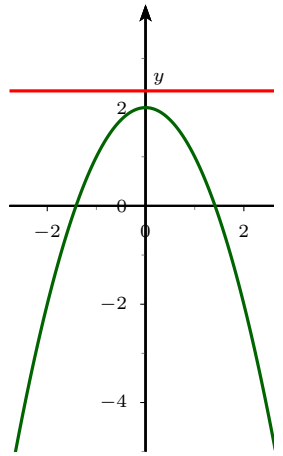
**Interprétation patatoïdale :** tous les éléments de $F$ sont atteints par *au moins* une flèche.



**Interprétation graphique avec des applications numériques :** une application numérique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est une surjection sur $\mathbf{R}$ si tout élément de $\mathbf{R}$ (lu sur l'axe des ordonnées) admet au moins un antécédent par $f$. C'est-à-dire, si toute droite horizontale coupe au moins une fois la courbe.



Application surjective sur $\mathbf{R}$.



Application non surjective sur $\mathbf{R}$

**Méthode** *(Prouver que $f$ est surjective)*

Pour prouver qu'une application est surjective,
on pose $y$ **quelconque** dans $F$, et on trouve $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

*Remarque :* Dans certains cas particuliers, il existe d'autres méthodes. En particulier, on peut faire référence à deux notions qui seront vues plus loin et pour lesquelles on trouvera souvent des contournements efficaces pour prouver la surjectivité.

- Dans le cas des ensembles finis, on verra que l'on peut aussi raisonner avec le nombre d'éléments des ensembles.
- Et pour les applications linéaires dans les espaces vectoriels de dimension finie, nous aurons la possibilité de raisonner avec la dimension.

⚠ Une erreur courante pour montrer qu'une fonction est surjective est de dire : « soit $f(x) \in F$... ».
Avec cette écriture, on suppose dès le début que l'élément à un antécédent : on n'a pas pris un élément quelconque de $F$, mais on a pris un élément qui pouvait s'écrire sous la forme $f(x)$.

**Propriété 5.5**

Le contraire de « $f$ est surjective » est :

$$\exists y \in F \text{ tel que } \forall x \in E,\ f(x) \neq y.$$

### Explications

Une fonction n'est pas surjective s'il existe (au moins) un élément du but qui n'est pas atteint par la source: il n'a pas d'antécédent.
Il est toujours facile de rendre une application surjective, il suffit de restreindre la fonction au but : $f^{|\mathrm{Im}\,(f)}$. En effet, on sait que tout élément de $\mathrm{Im}\,(f)$ possède au moins un antécédent par $f$ d'après la définition de l'image directe $\mathrm{Im}\,(f) = f(E)$.

**Exemple**

Prouver que la fonction $x \mapsto \sin x$ est surjective de $\mathbf{R}$ sur $[-1,1]$.

**Solution :**

On remarque déjà que sin est bien à valeurs dans $[-1,1]$.

Soit $y$ quelconque dans $[-1,1]$, on cherche à montrer qu'il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = y$.

- On sait que sin est continue sur $\mathbf{R}$,
- $y \in [-1,1] = \left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $y = \sin x$ admet donc (au moins) une solution dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et a fortiori dans $\mathbf{R}$.

La fonction est donc surjective de $\mathbf{R}$ sur $[-1,1]$.

Par contre, l'antécédent n'est pas unique : tous les $x + 2k\pi$ sont aussi des antécédents.

⚠ Soigner la rédaction du théorème des valeurs intermédiaires et citer explicitement toutes les hypothèses.

**Exemple**

Montrer que l'application $x \mapsto \mathrm{e}^x$ n'est pas une surjection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

Avec quel ensemble d'arrivée est-elle une surjection ?

**Solution :**

Il suffit d'un contre-exemple pour montrer que l'application n'est pas surjective :

$y = -1$ n'admet aucun antécédent par $f$ sur $\mathbf{R}$ car l'exponentielle est toujours à valeurs positives.

Si on restreint au but à $\mathbf{R}_+^*$, alors l'application devient surjective.

En effet, on peut corestreindre à cet espace car $\forall x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$.

De plus, $\forall y \in \mathbf{R}_+^*$, si on pose $x = \ln y$ (car $y > 0$), alors $\mathrm{e}^x = y$.

La fonction exponentielle n'est donc pas surjective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$, mais est surjective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

## C Bijections

**Définition 5.6** *(Bijection)*

Soit $f$ une application de $E$ vers $F$.

On dit que $f$ est une **bijection**, ou que $f$ est **bijective** si c'est à la fois une injection et une surjection : chaque élément de $F$ admet un unique antécédent par $f$.

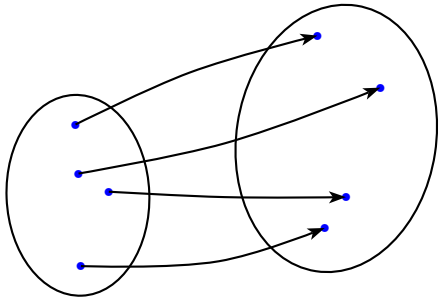
$$\forall y \in F, \quad \exists ! \, x \in E \ \text{ tel que } \ f(x) = y.$$

**Explications**

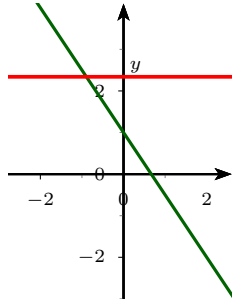
Une bijection est une application qui identifie chaque élément de l'espace d'arrivée avec un unique élément de l'espace de départ. C'est une entremetteuse qui fait des couples sans polygamie !

Ainsi l'espace d'arrivée a exactement le même nombre d'éléments que l'espace de départ. Réaliser une bijection permet de travailler de façon presque équivalente sur l'un ou l'autre espace puisque l'on peut identifier les éléments deux à deux (il reste le problème est encore qu'une opération faite d'un côté, ne donne pas nécessairement la même opération de l'autre côté, raison pour laquelle on introduira plus tard la notion de morphisme).

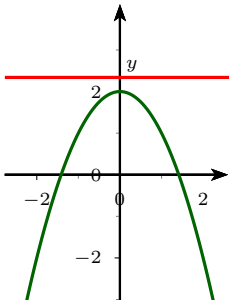
**Interprétation patatoïdale :** tous les éléments de $F$ sont atteints par *exactement* une flèche.



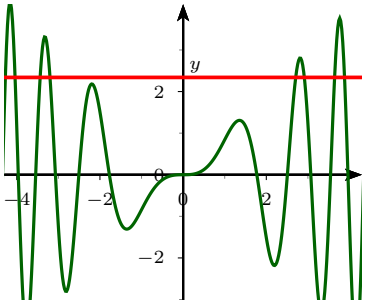
**Interprétation graphique avec des applications numériques :** une application numérique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, est une bijection sur $\mathbf{R}$ si tout élément de $\mathbf{R}$ (lu sur l'axe des ordonnées) admet exactement un antécédent par $f$. C'est-à-dire, si toute droite horizontale coupe une et une seule fois la courbe.




Fonction bijective sur $\mathbf{R}$.




Fonction non bijective (pas surjective)




Fonction non bijective (pas injective)

**Exemple**

$\mathrm{Id}_E$ est toujours bijective pour n'importe quel espace $E$.

**Exemple**

L'application $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+^*$.

*Remarque sur le vocabulaire :*

- Injection : on dit en général que l'application est une injection de $E$ **dans** $F$.
- Surjection : on dit que l'application est une surjection de $E$ **sur** $F$.

**Méthode** *(Injections, surjections, bijections et résolutions d'équations)*

Une application $f : E \to F$ est

- une injection, si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet **au plus** une solution dans $E$,
- une surjection, si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet **au moins** une solution dans $E$,
- une bijection, si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet **une unique** solution dans $E$.

**Exemple**

$\begin{cases} \mathbf{N} & \to & \mathbf{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{cases}$ est une injection de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ (mais pas une surjection).

$\begin{cases} \mathbf{N} & \to & \mathbf{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{cases}$ est une surjection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}$ (mais pas une injection).

$\begin{cases} \mathbf{N} & \to & \mathbf{Z} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{cases}$ est une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{Z}$.

**Propriété 5.7** *(Stabilité par composition)*

La composée de deux injections est une injection.
La composée de deux surjections est une surjection.
La composée de deux bijections est une bijection.

**Preuve** *(à savoir refaire)*

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

- On suppose que $f$ et $g$ sont des injections, et on cherche à montrer que $g \circ f$ est aussi une injection.
  On suppose donc qu'il existe $(x, x') \in E^2$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$.
  Si on note $y = f(x) \in F$ et $y' = f(x') \in F$, alors $g(y) = g(y')$.
  Or $g$ est injective, donc $y = y'$, c'est-à-dire $f(x) = f(x')$.
  Or $f$ est injective, donc $x = x'$.
  Donc $g \circ f$ est injective.
- On suppose que $f$ et $g$ sont des surjections, et on cherche à montrer que $f \circ g$ est aussi une surjection.
  On pose donc $z \in G$ et on cherche $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = z$.
  Or on sait que $g$ est surjective de $F$ sur $G$, donc il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$.
  De plus $f$ est surjective de $E$ sur $F$, donc il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
  Donc $(g \circ f)(x) = z$.
  Donc $g \circ f$ est surjective.
- Conséquence directe des deux derniers points.

■

*Remarque :* Parfois on dispose d'une application $f$ à partir de laquelle on peut obtenir une bijection en en la corestreingnant à son image (et éventuellement, en restreingant aussi à la source). On dit alors que $f$ **induit** une bijection de $E'$ sur $\mathrm{Im}(f)$.

## 6 Application réciproque

**Définition 6.1**

Si $f : E \to F$ est une application bijective,
alors chaque $y \in F$ possède un unique antécédent que l'on nomme $f^{-1}(y)$.
On définit ainsi une application $f^{-1} : F \to E$ que l'on appelle **l'application réciproque** de $f$.

*Remarque :* La réciproque est définie de manière unique.

⚠ On ne parle d'application réciproque **que pour une application dont on a montré la bijectivité** !

**Explications**

Lorsque les éléments entre les deux ensembles sont appariés deux à deux, chercher l'application réciproque, revient à « retourner » les flèches. On part de l'image et on cherche l'unique antécédent.

**Théorème 6.2**

Soit $f$ une fonction bijective de $E$ dans $F$. $f^{-1}$ est l'unique application qui vérifie

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F.$$

**Preuve**

- Montrons d'abord que $f^{-1}$ vérifie les égalités :
  Soit $x \in E$, $y = f(x)$ admet un unique antécédent $x$ par $f$ (car $f$ est injective).
  Donc $f^{-1}(y) = x$. On a donc bien montré que pour tout $x \in E$, $f^{-1}(f(x)) = x$, c'est-à-dire $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.
  Soit $y \in F$, alors il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$ (car $f$ est surjective).
  Donc $x$ est l'unique antécédent de $y$ par $f$, donc $f^{-1}(y) = x$, c'est-à-dire que pour tout $y \in F$, $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$.
  Donc $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.
- Il faut à présent montrer que si une fonction vérifie ces deux égalités, alors c'est l'application réciproque (c'est-à-dire que l'application réciproque est la seule application qui vérifie ces relations).
  En fait, on peut prendre des hypothèses un peu plus légères : lorsque l'on sait que l'application est bijective, il suffit qu'une application vérifie une seule des deux égalités pour que l'on puisse affirmer que c'est l'application réciproque. C'est ce que nous énonçons dans le théorème suivant, et démontrons dans la foulée.

■

**Théorème 6.3**

Soit $f$ une fonction que l'on **suppose bijective** de $E$ dans $F$.
Si $g$ est une fonction de $F$ vers $E$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad \textbf{ou} \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_F$$

alors $g$ est bijective et $g = f^{-1}$.

*Remarque :* On n'a besoin de vérifier la composition que d'un seul côté (c'est un **ou**) pour affirmer le résultat. Par contre, il faut avoir vérifié au préalable que la fonction $f$ est bijective.

**Preuve**

Par exemple $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors si on compose à droite par l'application $f^{-1}$ (que l'on sait exister), on obtient :

$$g = g \circ f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_E \circ f^{-1} = f^{-1}.$$

C'est la même preuve avec l'autre égalité. ■

**Exemple**

Sur $\mathbf{R}_+$, l'application réciproque de $x \to x^2$ est $x \to \sqrt{x}$.

**Théorème 6.4**

Si pour $f : E \to F$, il existe une application $g : F \to E$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad \textbf{et} \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_F$$

alors $f$ est une bijection et sa réciproque est $g$.

**Explications**

Contrairement aux théorèmes précédents, on ne suppose pas dans les hypothèses que $f$ est une bijection, mais c'est un résultat du théorème. Par contre, ici, il faut vérifier la composition des **deux** côtés. C'est un « **et** ».
Ainsi lorsque l'on dit : « montrer que $f$ est bijective et donner son application réciproque », ce théorème vous permet de faire les deux en même temps.

**Preuve**

- Montrons que $f$ est injective :

Soient $(x, x') \in E^2$ tels que $f(x) = f(x')$, alors $x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$.
Donc $x = x'$ et $f$ est injective.

- Montrons que $f$ est surjective :

Soit $y \in F$, alors comme $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, on a $f(g(y)) = y$.
Si on pose $g(y) = x \in E$, alors $f(x) = y$.
Donc $f$ est surjective.

- Donc $f$ est bijective et par caractérisation de l'application réciproque, $f^{-1} = g$. ■

⚠ Il faut bien vérifier les composées dans les deux sens, sinon, c'est faux en général (on a eu besoin des deux sens dans la preuve).

**Exemple**

On considère les applications $f : \begin{cases} \mathbf{N} & \to & \mathbf{N} \\ n & \to & 2n \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbf{N} & \to & \mathbf{N} \\ n & \to & \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \end{cases}$

$f$ n'est pas bijective (elle n'est pas surjective car les nombres impairs ne sont pas dans l'image).
Pourtant, $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbf{N}}$. Par contre, $f \circ g \neq \mathrm{Id}_{\mathbf{N}}$.

**Exemple**

Avec $f : \begin{cases} \mathbf{R} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{cases}$ et $g : \begin{cases} [-1,1] & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Arcsin}\, x \end{cases}$

$f \circ g = \mathrm{Id}_{[-1,1]}$, mais $g \circ f \neq \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$.

**Théorème 6.5** *(Réciproque d'une composée)*

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications bijectives, alors,

- $g \circ f$ est bijective,
- $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

⚠ L'ordre entre $f$ et $g$ est inversé lors du passage à l'inverse : c'est normal car on fait « le parcours en arrière ».

**Preuve**

On a déjà démontré le premier point à la propriété 5.7.
Pour le deuxième point, on calcule

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ \underbrace{g^{-1} \circ g}_{\mathrm{Id}_F} \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$$

De même pour l'autre égalité (pas nécessaire de la démontrer ici puisqu'on sait déja que $f \circ g$ est bijective). Donc $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ■