Nombres complexes

« Les mathématiques consistent à prouver des choses évidentes par des moyens complexes. »
G. Polya (1887-1985)

Ce chapitre est avant tout géométrique.

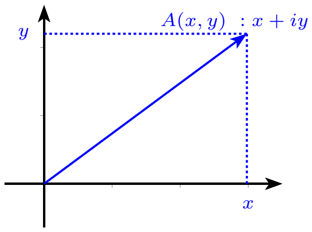
Ainsi, il ne faudra pas oublier le caractère intrinsèquement géométrique des nombres complexes tel que cela sera développé dans tout le chapitre : les nombres complexes sont d'abord des points (ou vecteurs) du plan et la multiplication ou l'addition par un nombre complexe traduisent des transformations géométriques du plan.
Tous les opérateurs et toutes les règles de calcul découlent de ces considérations géométriques.

Ainsi, on ne peut pas comprendre les nombres complexes sans faire un peu de géométrie, et réciproquement, beaucoup de problèmes de géométrie se trouvent simplifiés par l'usage des complexes.

1 La forme cartésienne

A Description de la forme cartésienne

Si les réels représentent l'ensemble de la droite *réelle*, alors les nombres complexes correspondent au plan. On peut considérer les nombres complexes comme une façon synthétique d'écrire l'abscisse et l'ordonnée de chaque point du plan. Au lieu de travailler avec un couple de réels (x, y), on utilise la notation $x + iy$. Le nombre imaginaire i sert à identifier l'ordonnée. L'avantage d'une telle notation est qu'elle va simplifier les manipulations géométriques car elle combine deux informations (abscisse et ordonnée) en un seul nombre.



Définition 1.1 *(Nombre complexe)*

L'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes est composé des nombres écrits sous la forme $x + iy$ avec x, y deux réels :

$$\mathbf{C} = \left\{x + iy,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

Cette notation s'appelle la **forme cartésienne** ou **algébrique**.

Si $z = x + iy \in \mathbf{C}$, avec $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, alors
x s'appelle la **partie réelle** de z et y la **partie imaginaire**.
On note

$$x = \mathfrak{Re}\,(z) \qquad \text{et} \qquad y = \mathfrak{Im}\,(z).$$

- Lorsque $\mathfrak{Im}\,(z) = 0$, z est un nombre **réel**.
- Lorsque $\mathfrak{Re}\,(z) = 0$, z est un **imaginaire pur**.
  L'ensemble des imaginaires purs est $\quad i\mathbf{R} = \{0 + iy,\ y \in \mathbf{R}\}$.

Définition 1.2 *(Affixe d'un point ou d'un vecteur)*

Tout point A du plan $\mathbf{R}^2$ peut être désigné par son abscisse x_A et son ordonnée y_A dans un repère orthonormé.
L'**affixe** du point A est alors le nombre complexe $z_A = x + iy$.
À tout vecteur $\overrightarrow{u}(x, y)$ du plan correspond un unique point $A(x, y)$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$.
L'**affixe** de $\overrightarrow{u}$ est alors $z = x + iy$.

Explications
Il y a une correspondance parfaite (on parle de bijection, ce sera vu dans le chapitre sur les applications) entre les vecteurs du plan et les points du plan : à chaque point du plan correspond un unique vecteur, et réciproquement.
Ainsi, dans ce cours, nous identifierons les deux objets : on considère que le vecteur ou le point associé forment un seul et même objet mathématique.

Propriété 1.3 *(Indentification)*

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Explications

La partie réelle et la partie imaginaire définissent de manière *unique* le nombre complexe. L'unicité de l'écriture permet d'identifier deux nombres facilement.

Définition 1.4 *(Opérations sur les complexes)*

On définit l'addition « + » sur les nombres complexes par

$$(x+iy)+(x'+iy')=(x+x')+i(y+y').$$

On définit la multiplication « $\times$ » sur les nombres complexes par

$$(x+iy)\times(x'+iy')=(xx'-yy')+i(xy'+x'y).$$

Propriété 1.5

$$i^2=-1.$$

Preuve

On utilise la définition de la multiplication avec $x=x'=0$ et $y=y'=1$. ■

⚠ La formule du produit n'est pas à apprendre en l'état. Il suffit de faire un produit normal et de remplacer i^2 par -1.

Pour l'histoire...

C'est cette idée (propriété 1.5) qui constitua la première intuition des nombres complexes (avant leur construction rigoureuse).

Au XVI^e siècle, Cardan eut besoin de passer par la racine carrée d'un nombre négatif pour donner une méthode de résolution des équations de degré 3. Il appelle ces nombres des quantités *sophistiquées*. Elles sont interprétés comme des artifices calculatoires plutôt que comme des « *vrais nombres* ». C'est la raison pour laquelle, Bombelli les nommera *nombres imaginaires*.

En fait la méthode de résolution des équations de degré 3 aurait été trouvée en premier par Scipione Del Ferro. Le secret passa de bouche à oreille jusqu'à son disciple Anton Maria Del Fiore qui s'en servit pour lancer des défis aux mathématiciens de son temps.

Tartaglia releva le défi et 30 problèmes furent déposés chez un notaire par chacun des deux adversaires. Celui qui aurait résolu le plus de problèmes au bout de 40 jours gagnerait.

Tartaglia découvrit alors la méthode de résolution des équations de degré 3 et résolu ainsi la totalité des problèmes énoncés par Del Fiore. Il remporta le prix mais garda secrète sa méthode, source de son prestige.

Il finit par la confier à Cardan en lui faisant promettre le secret, mais celui-ci la divulgua sous son propre nom pour s'en attribuer l'honneur.

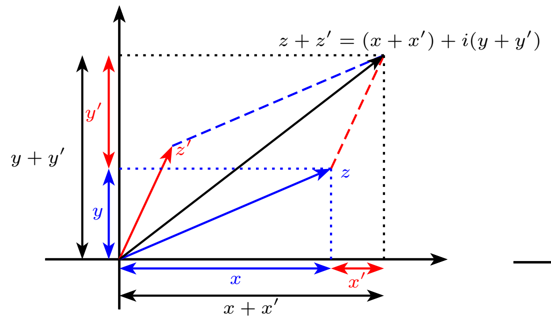
Explications *(Interprétation géométrique)*

Comme énoncé plus haut, tout nombre complexe correspond à un unique point du plan (dit *plan complexe*) dont l'abscisse est la partie réelle et l'ordonnée est la partie imaginaire. Chaque point correspond également à un unique vecteur d'origine $(0,0)$ dont il est représente « l'arrivée ».

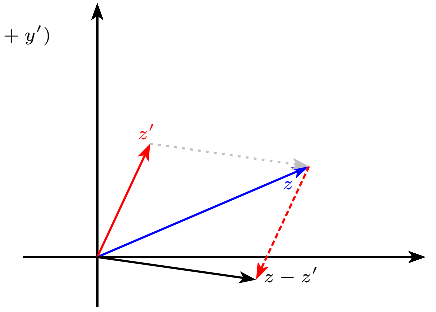
La **somme** de deux complexes correspond à la somme des vecteurs correspondants : on ajoute les parties réelles entre elles et les parties imaginaires entre elles.

La **multiplication** d'un complexe par un **réel** revient à appliquer à son vecteur l'homothétie de même rapport.

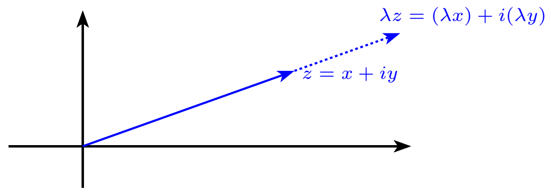
La **multiplication** entre deux complexes a une forme assez compliquée en notation cartésienne. Nous comprendrons l'interprétation géométrique de cette formule un peu plus loin avec la forme exponentielle.



Somme



Différence



Multiplication par un réel

Propriété 1.6 *(Linéarité des parties réelles et imaginaires)*

Soient $(z,z')\in\mathbf{C}^2$, soit $\lambda\in\mathbf{R}$,

$$\mathfrak{Re}\,(z+z')=\mathfrak{Re}\,(z)+\mathfrak{Re}\,(z') \quad\text{et}\quad \mathfrak{Re}\,(\lambda z)=\lambda\,\mathfrak{Re}\,(z).$$

$$\mathfrak{Im}\,(z+z')=\mathfrak{Im}\,(z)+\mathfrak{Im}\,(z') \quad\text{et}\quad \mathfrak{Im}\,(\lambda z)=\lambda\,\mathfrak{Im}\,(z).$$

Explications

Additionner deux vecteurs revient à additionner leurs abscisses et leurs ordonnées. De même si on effectue une homothétie.

⚠ En général $\mathfrak{Re}\,(zz')\neq\mathfrak{Re}\,(z)\,\mathfrak{Re}\,(z')$ et $\mathfrak{Im}\,(zz')\neq\mathfrak{Im}\,(z)\,\mathfrak{Re}\,(z')$.

B Structure de l'ensemble des complexes

Cette partie est un complément qui peut être sautée en première lecture. Vous pourrez y revenir lors de l'étude du chapitre d'algèbre générale plus tard dans l'année.

Propriété 1.7 *(Propriétés sur les opérations - structure de corps)*

1. $+$ est une loi *interne* : $\forall (z,z') \in \mathbf{C}^2,\ z+z' \in \mathbf{C}$,
2. $+$ est *associative* : $\forall (z,z',w) \in \mathbf{C}^3,\ (z+z')+w = z+(z'+w)$,
3. $+$ est *commutative* : $\forall (z,z') \in \mathbf{C}^2,\ z+z' = z'+z$,
4. $+$ admet 0 comme *élément neutre* : $\forall z \in \mathbf{C},\ z+0=z$,
5. tout élément de $\mathbf{C}$ admet un symétrique pour la loi $+$:

$$\forall z \in \mathbf{C},\ \exists z' = (-z) \in \mathbf{C},\ z+(-z)=0,$$

$(-z)$ est appelé l'**opposé** de z.

$\longrightarrow$ $(\mathbf{C},+)$ est un **groupe commutatif** (ou abélien),

6. $\times$ est une loi *interne* : $\forall (z,z') \in \mathbf{C}^2,\ z\times z' \in \mathbf{C}$,
7. $\times$ est *associative* : $\forall (z,z',w) \in \mathbf{C}^3,\ (z\times z')\times w = z\times(z'\times w)$,
8. $\times$ est *commutative* : $\forall (z,z') \in \mathbf{C}^2,\ z\times z' = z'\times z$,
9. $\times$ est distributive par rapport à $+$:

$$\forall (z,z',w) \in \mathbf{C}^3,\ \left(z+z'\right)\times w = z\times w + z'\times w.$$

10. $\times$ admet 1 comme *élément neutre* : $\forall z \in \mathbf{C},\ z\times 1 = z$,

$\longrightarrow$ $(\mathbf{C},+,\times)$ est un **anneau commutatif**,

11. tout élément de $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}\setminus\{0\}$ admet un symétrique pour la loi $\times$:

$$\forall z \in \mathbf{C}^*,\ \exists z' = \frac{1}{z} \in \mathbf{C},\ z\times\left(\frac{1}{z}\right)=1,$$

$\frac{1}{z}$ est appelé l'**inverse** de z.

$\longrightarrow$ $(\mathbf{C},+,\times)$ est un **corps** (commutatif).

Explications

Le vocabulaire de groupe, anneau ou corps n'est pas à connaître actuellement, il sera revu dans le chapitre d'algèbre générale.

⚠ Les propriétés précédentes ne suffisent pas à caractériser $\mathbf{C}$ ($\mathbf{R}$ et $\mathbf{Q}$ vérifient aussi ces propriétés).

Donnons quelques explications sur l'intérêt structurel des propriétés énoncées :

1. La caractère interne d'une loi est essentiel pour « *ne pas sortir de l'ensemble* » avec une opération.
2. L'associativité permet de s'affranchir des parenthèses : il n'y a pas d'ordre de priorité au sein de l'addition. Ainsi, on peut commencer par ajouter z et z' puis w à droite ou au contraire, commencer à ajouter z' et w puis ensuite z à gauche.
3. La commutativité ne doit pas être confondue avec l'associativité. L'associativité permet de ne pas utiliser les parenthèses, mais l'ordre d'*écriture* importe, c'est la raison pour laquelle nous précisions au point précédent si on ajoutait à droite ou à gauche. Avec la commutativité nous pouvons mélanger les termes : additionner à droite ou à gauche revient au même. La commutativité n'est pas indispensable pour avoir un groupe, mais en général, lorsque l'on utilise la notation $+$ pour une opération, c'est qu'elle est commutative.
4. L'intérêt de l'élément neutre n'est pas immédiat. Pourquoi inventer un élément dont le rôle est justement de *ne rien faire* ? Est-ce donc pour *rien* qu'il a fallu attendre le XIIe siècle pour que le 0 soit pleinement accepté en Occident ?
En fait, outre son intérêt dans la notation décimale, le zéro devient important lorsqu'il ne s'agit plus seulement d'ajouter mais aussi de soustraire :
5. Chaque élément admet un symétrique. Lorsqu'on ajoute à un élément son symétrique on obtient l'élément neutre. Pour l'addition, on parle d'opposé. Aucun des éléments de $\mathbf{N}$, sauf le 0, n'admet de symétrique dans $\mathbf{N}$.
L'existence d'un symétrique veut dire que l'on peut soustraire. Soustraire, c'est ajouter l'opposé[1]. C'est pour définir le symétrique que nous avions besoin de l'élément neutre 0. C'est l'intérêt de travailler avec $\mathbf{Z}$ plutôt que $\mathbf{N}$.
8. La loi $\times$ d'un anneau n'est pas toujours commutative. Nous verrons des exemples de lois multiplicatives qui ne sont pas commutatives (les matrices).
10. L'élément neutre pour la multiplication n'est pas le même que pour l'addition.
On peut montrer facilement que le 0 (élément neutre de l'addition) est **absorbant**. Cela veut dire que n'importe quelle nombre multiplié par 0 donnera 0.
11. On cherche à obtenir un symétrique comme pour l'addition, mais du fait du caractère absorbant du 0, on ne peut pas l'inverser (dans vos copies, vérifiez toujours que le nombre est non nul avant de prendre son inverse). C'est l'existence de l'inverse qui permet de passer de $\mathbf{Z}$ à $\mathbf{Q}$ en forçant les éléments non nuls de $\mathbf{Z}$ à avoir chacun un inverse.

Nous voyons donc ici que $\mathbf{Q}$ satisfait les propriétés pour être un corps. L'intérêt de $\mathbf{R}$ puis de $\mathbf{C}$ vient d'autres raisons. $\mathbf{R}$ intervient pour que les limites de nombres réels soient encore réelles, et $\mathbf{C}$ permet en plus d'obtenir des solutions à toutes les équations polynomiales (en particulier $x^2=-1$).

Exemple *(à garder en tête)*

Calculer $\frac{1}{i}$.

Solution :

$\frac{1}{i} = \frac{-i}{i\times(-i)} = -i$.

Ainsi, diviser par i, revient à multiplier par $-i$, ce qui facilite les factorisations.

1. En fait, la soustraction en tant que telle n'a pas besoin d'être définie, c'est simplement l'ajout de l'opposé.

Preuve

La preuve est sans difficultés. Le seul point intéressant est le dernier à propos de l'inverse :
Si $z = x + iy \in \mathbf{C}^*$, alors on cherche $z' = x' + iy'$ tel que $zz' = 1$.
Cela donne l'équation :

$$xx' - yy' + i(xy' + x'y) = 1.$$

Donc par identification :

$$zz' = 1 \iff \begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ xy' + x'y = 0 \end{cases}.$$

Il reste à résoudre ce système en utilisant le fait que x et y ne peuvent être simultanément nuls. On obtient alors une unique solution pour x' et y'.
Mais il existe une méthode plus simple pour trouver x' et y'. Vous l'aviez déjà vu en terminale : elle consiste à écrire formellement la fraction et à faire passer le i au numérateur en multipliant par le complexe conjugué (dont nous rappelons la définition juste après) :

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Si on pose $x' = \frac{x}{x^2+y^2} \in \mathbf{R}$ et $y' = -\frac{y}{x^2+y^2} \in \mathbf{R}$, on a bien $(x+iy)(x'+iy') = 1$.
(on vérifie bien que $x^2 + y^2 \neq 0$ car $x + iy \neq 0$). ■

Histoire des mathématiques :
Ce type de présentation algébriquement très structurée a été particulièrement mise à l'honneur par l'un des plus grands mathématiciens du XX$^{\text{e}}$ siècle.
Nicolas Bourbaki est un mathématicien poldève qui est né en 1935. Il reçut 5 médailles Fields[2].
Il est connu pour la rédaction des *Éléments de mathématique* (au singulier). Cet ouvrage inachevé[3] devait être l'analogue contemporain des *Éléments* d'Euclide.

Plus exactement, N. Bourbaki est né du 10 au 20 juillet 1935 près de Clermont-Ferrand, sous l'inspiration du mathématicien Pierre Weil. Il s'agit à l'origine d'un groupe de mathématiciens francophones dont l'ambition était de rédiger une présentation cohérente des mathématiques à partir de leur structure. Ce projet nait en réaction à l'émiettement des mathématiques en de nombreuses branches disparates au début du XX$^{\text{e}}$. L'usage du terme *mathématique* au singulier veut souligner l'unité de la matière.
L'ouvrage introduit un grand formalisme et beaucoup de rigueur dans l'exposé mathématique. Il répond ainsi aux lacunes de l'enseignement de l'époque qui accordait peu d'importance aux fondements et à la rigueur. Il marquera durablement l'enseignement des mathématiques (avec quelques excès).
Le nom du groupe provient probablement d'un canular de l'école normale supérieure. Dans ses statuts, les mathématiciens de plus de 50 ans doivent quitter le groupe pour laisser la place aux plus jeunes. Bourbaki a rassemblé des noms parmi les plus grands de la deuxième moitié du XX$^{\text{e}}$, et 5 de ses membres reçurent la médaille Fields.
Ne pas hésiter à lire la notice historique de Cartan qui mérite le détour (elle montre que les mathématiciens peuvent avoir de l'humour, à leur façon...) :

https://molin-mathematiques.fr/ouvert/Bourbaki-histoire.pdf

2. La médaille Fields est la plus célèbre distinction mathématique. Elles attribuée tous les 4 ans à 4 mathématiciens de moins de 40 ans. On parle souvent du « prix Nobel » des mathématiques.
3. Il compte néanmoins 10 volumes d'environ 300 pages chacun !

C Conjugué d'un nombre complexe

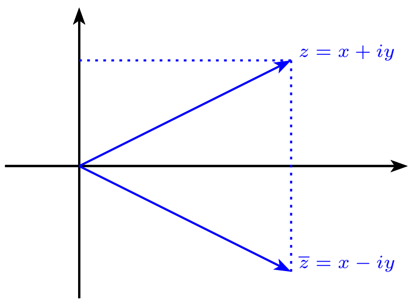
Définition 1.8 *(Conjugué)*

Pour un complexe $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on définit le **conjugué** de z par

$$\overline{z} = x - iy.$$

C'est-à-dire : $\forall z \in \mathbf{C},\ \mathfrak{Re}\,(\overline{z}) = \mathfrak{Re}\,(z)$ et $\mathfrak{Im}\,(\overline{z}) = -\mathfrak{Im}\,(z)$.

Explications
La conjugaison correspond à la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



Exemple

On définit j par $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Exprimer j^2 en fonction de $\overline{j}$.
Solution :
$j^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 2i\frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \overline{j}$.

Propriété 1.9

1. La conjugaison est **involutive** : $\forall z \in \mathbf{C},\ \overline{\overline{z}} = z$.
2. La conjugaison est **linéaire** :
$$\forall (z, z') \in \mathbf{C},\ \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \text{ et } \forall z \in \mathbf{C},\ \forall \lambda \in \mathbf{R},\ \overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}.$$
3. Le conjugué d'un produit est le produit des conjugués
$$\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2,\ \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}.$$
4. Le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués
$$\forall (z, z') \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^*,\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}.$$

Explications
Involutivité : Si on effectue deux fois de suite la symétrie par rapport à la même droite, alors on retrouve le point initial.

Preuve

Immédiat en faisant les calculs avec $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. ■

Méthode *(Complexe au dénominateur)*

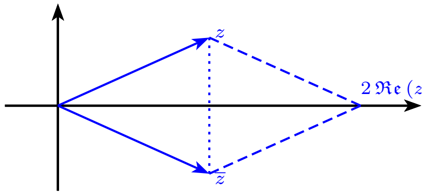
Pour faire « remonter » un complexe non nul qui est au dénominateur, on multiplie par son complexe conjugué.

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2 \to \in \mathbf{R}}.$$

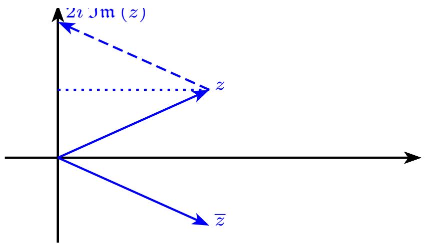
Propriété 1.10

Soit $z \in \mathbf{C}$,

$$\mathfrak{Re}\,(z) = \frac{1}{2}\,(\,z + \overline{z}\,)\,.$$



$$\mathfrak{Im}\,(z) = \frac{1}{2\boldsymbol{i}}\,(\,z - \overline{z}\,)\,.$$



Preuve

Immédiat : pour $z = x + iy$, $\frac{1}{2}\,(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}\,(x + iy + x - iy) = x$.
De même pour la partie imaginaire. ■

⚠ Pour obtenir la partie imaginaire, il ne faut pas oublier la division par i.

Propriété 1.11

$$(z \in \mathbf{R}) \iff (\overline{z} = z) \qquad \text{et} \qquad (z \in i\mathbf{R} \iff \overline{z} = -z)\,.$$

Preuve

Trivial. ■

2 Module et argument

A Module d'un nombre complexe

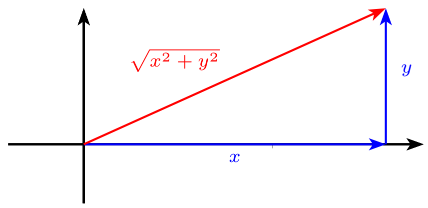
Définition 2.1 *(Module)*

Pour tout complexe $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on définit le **module** de z par

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Explications

Le module d'un complexe correspond à la longueur du vecteur qui le représente, on obtient cette formule avec le théorème de Pythagore. Comme pour la valeur absolue sur $\mathbf{R}$, c'est la distance du point à 0.



Les définitions du module et de la valeur absolue coïncident sur $\mathbf{R}$, ce qui explique que l'on utilise la même notation.

Interprétation géométrique du module

$|z - z'|$ désigne la distance entre les points d'affixes z et z'.

Propriété 2.2 *(Coïncidence sur $\mathbf{R}$)*

Le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue.

Propriété 2.3 *(Module et conjugé)*

Pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$z\,\overline{z} = |z|^2 \qquad \text{et} \qquad |\,\overline{z}\,| = |z|.$$

Preuve

Trivial, il suffit d'écrire. La deuxième égalité traduit le fait qu'une symétrie conserve la longueur : c'est une isométrie. ■

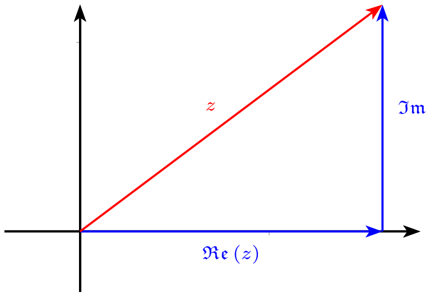
Propriété 2.4

Pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$|\,\mathfrak{Re}\,(z)\,| \leqslant |z| \qquad \text{et} \qquad |\,\mathfrak{Im}\,(z)\,| \leqslant |z|.$$

Explications

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est plus courte que chacune des deux cathètes.



Preuve

$\forall (x,\, y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 \leqslant x^2 + y^2$, donc $|x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$.
On obtient donc, pour $z = x + iy$, $|\mathfrak{Re}\,(z)| \leqslant |z|$.
On fait de même pour la partie imaginaire. ∎

⚠ Il n'y a **pas d'inégalités** sur $\mathbf{C}$.
Pour avoir des inégalités, on repasse dans $\mathbf{R}$ par l'intermédiaire du module.

Propriété 2.5 *(Propriétés du module)*

1. (*positivité*) $\forall z \in \mathbf{C},\ |z| \in \mathbf{R}_+$,
2. (*définition*) $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$,
3. (*axiome de séparation*) $|z - z'| = 0$ si et seulement si $z = z'$,
4. (*homogénéité*) $\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2,\ |zz'| = |z||z'|$ et pour $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

Explications

1. La positivité traduit qu'une longueur est toujours un réel positif.
2. Le terme mathématique « *définition* » ne veut pas dire que c'est ainsi que l'on définit le module, mais cela signifie que la nullité du module correspond exactement à la nullité du nombre complexe. L'intérêt du caractère *défini* s'explique mieux avec l'axiome de séparation qui en découle.
3. L'axiome de séparation veut dire qu'il n'existe pas de points distincts qui soient superposés : si deux points sont distincts, ils ne peuvent être à une distance nulle l'un de l'autre. De cette manière on arrive toujours à différentier/séparer les points du plan.

Preuve

1. Par définition ($x^2 + y^2 \in \mathbf{R}_+$ et une racine carrée est toujours positive).
2. $\sqrt{x^2+y^2} = 0 \iff x^2 + y^2 = 0$.
   Si $(x,\, y) = (0,\, 0)$ alors l'égalité est évidente.
   Si $(x,\, y) \neq (0,\, 0)$, alors par exemple, $x \neq 0$, donc $x^2 > 0$, donc $x^2 + y^2 \geqslant x^2 > 0$.
3. D'après le point précédent, $|z - z'| = 0 \iff z - z' = 0 \iff z = z'$.
4. Pour $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, alors

$$\begin{aligned}
|zz'| &= \sqrt{(xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2} \\
&= \sqrt{(xx')^2 + (yy')^2 - 2 \times xx'yy' + (xy')^2 + (x'y)^2 + 2xx'yy'} \\
&= \sqrt{(xx')^2 + (yy')^2 + (xy')^2 + (x'y)^2} \\
&= \sqrt{x^2\left(x'^2 + y'^2\right) + y^2\left(x'^2 + y'^2\right)} \\
&= \sqrt{\left(x^2 + y^2\right)\left(x'^2 + y'^2\right)} \\
&= \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2} = |z|\ |z'|.
\end{aligned}$$

   Pour $z' = x' + iy' \neq 0$, $|z'| \neq 0$ et on peut donc passer à l'inverse.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{z'}\right| &= \left|\frac{1}{|z'|^2}\,\overline{z'}\right| = \frac{1}{|z'^2|}\left|\overline{z'}\right| && \text{formule du produit montrée au dessus} \\
&= \frac{1}{|z'|^2}\left|z'\right| && \text{produit (pour le carré) et propriété 2.3 pour le conjugé} \\
&= \frac{1}{|z'|}.
\end{aligned}$$

   On en déduit le quotient en combinant, produit et passage à l'inverse. ∎

Théorème 2.6 *(Inégalité triangulaire et son corollaire)*

1. (*inégalité triangulaire*)

$$\forall (z, z') \in \mathbf{C},\ \left|z + z'\right| \leqslant |z| + \left|z'\right|.$$

   Cas d'égalité :

$$\begin{aligned}
\left|z + z'\right| = |z| + \left|z'\right| &\iff z \text{ et } z' \text{ sont colinéaires de même sens}, \\
&\iff \begin{cases} z = 0 \\ \text{ou} \quad \exists \lambda \in \mathbf{R}_+,\ z' = \lambda z, \end{cases} \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbf{R}_+, \text{ tel que } z = \lambda z' \text{ ou } z' = \lambda z.
\end{aligned}$$

2. (*corollaire de l'inégalité triangulaire*)

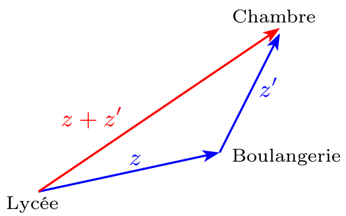
$$\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2,\ \Big|\, |z| - \left|z'\right| \,\Big| \leqslant \left|z - z'\right| \leqslant |z| + \left|z'\right|.$$

Dans le cas où les vecteurs sont colinéaires de même sens, on dit aussi qu'ils sont **positivement liés.**

Explications

L'inégalité triangulaire traduit le fait que le plus court chemin est la ligne droite. Ainsi, il est plus rapide d'aller en ligne droite directement du lycée à sa chambre que de passer par la boulangerie.

$$LC \leqslant LB + BC.$$



Par contre, on ne rallonge pas le chemin si la boulangerie se trouve déjà située sur le segment qui relie le lycée à la chambre.

⚠ Dans le cas d'égalité (pour l'inégalité triangulaire), le réel doit être positif.
En effet, avec l'exemple précédent, si $\lambda < 0$, alors les trois points seraient bien alignés, mais la boulangerie se trouverait au delà de la chambre ou en deçà du lycée, et cela conduirait donc à revenir sur ses pas.
De plus, il ne suffit pas de donner une seule égalité $z' = \lambda z$ par exemple car cela ne traiterait pas le cas $z' \neq 0$ et $z = 0$ pour lequel l'égalité est vérifiée.

Preuve

$$\begin{aligned}
\left|z+z'\right|^2 &= \left(z+z'\right)\overline{(z+z')} && \text{d'après la propriété 2.3}\\
&= z\overline{z} + z'\overline{z'} + z\,\overline{z'} + \overline{z}\,z' \\
&= |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + \overline{z\,\overline{z'}} \\
&= |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathfrak{Re}\left(z\,\overline{z'}\right) && \text{d'après la propriété 1.10}\\
&\leqslant |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||\overline{z'}| && \text{d'après la propriété 2.4}\\
&\leqslant (|z|+|z'|)^2.
\end{aligned}$$

Les deux éléments mis au carré étant des nombres réels positifs, on a donc (par croissance de la fonction racine carrée)

$$\left|z+z'\right| \leqslant |z| + |z'|.$$

On a l'égalité si, et seulement si $2\,\mathfrak{Re}\left(z\,\overline{z'}\right) = 2|zz'|$ (ayant partout ailleurs des égalités).
C'est donc réalisé à la seule condition que $z\overline{z'} \in \mathbf{R}_+$ (d'après la définition 2.1 du module).
Nous verrons plus loin dans le cours, que cela veut dire que z et z' sont colinéaires de même sens.
En effet, si l'un est nul, l'égalité est immédiatement vérifiée.
Sinon, on multiplie par z' et on obtient $\frac{z}{z'} \times |z'|^2 \in \mathbf{R}_+$.
Or $|z'|^2 > 0$, donc on peut simplifier en disant $\frac{z}{z'} \in \mathbf{R}_+$.
Ce qui revient à dire qu'il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $z = \lambda z'$. ■

B Description du cercle trigonométrique

Définition 2.7 *(Rappel : cercle trigonométrique)*

Le **cercle trigonométrique** est un cercle du plan de rayon 1 et de centre 0.

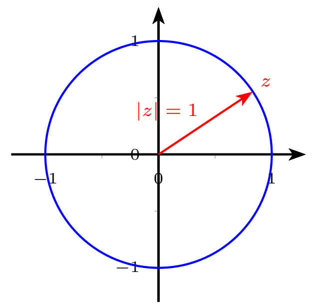
Propriété 2.8 *(Paramétrage cartésien du cercle trigonométrique)*

Dans le plan $\mathbf{R}^2$, le cercle trigonométrique est décrit par l'ensemble des points :

$$\mathscr{C}(0,1) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2, x^2+y^2 = 1\right\}.$$

Dans le plan complexe, il est décrit par l'ensemble noté $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}.$$



Explications

C'est le même cercle sur $\mathbf{R}^2$ et sur $\mathbf{C}$, même si l'écriture diffère.

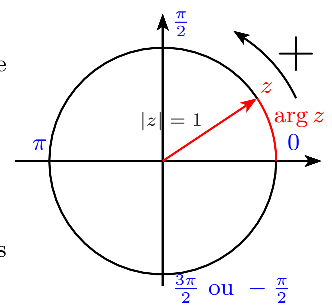
C Argument d'un nombre complexe

Définition 2.9 *(Argument)*

Pour un point z du cercle trigonométrique,
on définit l'**argument** de z par la longueur algébrique de l'arc entre le point $1+0i$ et le point z.

Le sens positif est tel que l'argument de i soit égal à $+\frac{\pi}{2}$.
L'argument est exprimé en **radians**.

Remarque : L'argument d'un point n'est pas unique, mais il est exprimé à 2π près.



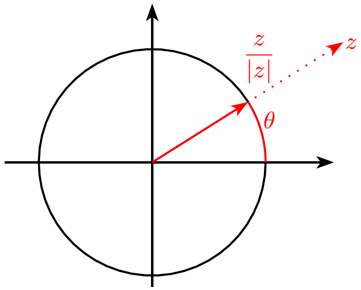
Explications

C'est la définition de l'angle qui avait été donnée dans le chapitre de trigonométrie.
Ici, nous n'avons défini l'argument que pour un point du cercle.
La définition suivante permet d'étendre cette notion à tout point non nul du plan complexe.

Définition 2.10

Soit $z \in \mathbf{C}^*$,
l'argument de z est défini par l'argument de $\dfrac{z}{|z|}$.

Le nombre complexe 0 n'admet pas d'argument.



Explications

Géométriquement, cela revient à se rapporter au point où le vecteur « *coupe* » le cercle trigonométrique. Cette idée de se ramener à un nombre de module 1 (sur le cercle trigonométrique) en divisant par le module est très commune en mathématiques.

Définition 2.11 *(Argument principal)*

Pour $z \in \mathbf{C}^*$, on désigne par **argument principal**, l'unique argument $\theta \in]-\pi, \pi]$.
On le note $\arg(z)$.

⚠ L'intervalle est ouvert en $\theta = -\pi$ pour avoir l'unicité. En effet on atteint déjà le point $(-1, 0)$ avec l'argument $+\pi$ (intervalle fermé), il ne faut donc pas qu'il soit aussi possible de l'atteindre par les négatifs en $-\pi$.

Explications

Choisir l'argument principal revient à prendre le plus court chemin pour atteindre l'affixe du point : soit en partant dans le sens positif si le point est dans le demi-plan supérieur (la droite réelle comprise), soit en partant dans le sens négatif s'il est dans le demi-plan inférieur. Et bien sûr, à ne pas faire plusieurs tours avant de s'arrêter !

Propriété 2.12 *(Identification)*

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement s'ils ont le même module et le même argument principal (s'il est défini[4]).

Preuve

L'argument définit une demi-droite sur lequel est le vecteur, et le module donne la distance à 0, c'est-à-dire la position sur cette demi-droite. ■

Les propriétés suivantes ne sont pas à apprendre bêtement : il suffit de se représenter un cercle trigonométrique pour que se manifeste leur évidence.

4. Cas particulier du nombre complexe nul

Propriété 2.13

1. $\forall z \in \mathbf{C}^*$, $\quad \arg(-z) = \arg(z) + \pi \ \ [2\pi]$,
2. $\forall z \in \mathbf{C}^*$, $\quad \arg(\overline{z}) = -\arg(z) \ \ [2\pi]$,
3. $\forall z \in \mathbf{C}^*, \forall \lambda \in \mathbf{R}_+^*$, $\quad \arg(\lambda z) = \arg(z)$,
4. $\arg(z) = \arg(z') \ \ [2\pi]$ si, et seulement si z et z' sont non nuls et positivement liés : $\dfrac{z}{z'} \in \mathbf{R}_+^*$,
5. $\arg(z) = \arg(z') \ \ [\pi]$ si, et seulement si z et z' sont non nuls et liés : $\frac{z}{z'} \in \mathbf{R}^*$.

Preuve

1. $-z$ est sur la demi-droite opposée, ce qui revient à faire un demi-tour (ajout de π).
2. $\overline{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des abscisses, on prend donc l'opposé de l'argument.
3. Si $\lambda > 0$, alors les nombres complexes sont positivement liés, c'est-à-dire sur la même demi-droite (stricte). Donc ils ont le même argument.
   La réciproque tient du même raisonnement.
4. Cela correspond aux points sur la même droite (à un demi-tour près).

■

Remarque : Comme on le verra, on peut écrire $\frac{z}{z'} \in \mathbf{R}_+^*$ sous la forme $z\,\overline{z'} \in \mathbf{R}_+^*$ (ce qui est équivalent). De même, $\frac{z}{z'} \in \mathbf{R}^*$ s'écrit de façon équivalente : $z\,\overline{z'} \in \mathbf{R}^*$.
Comme nous le verrons plus bas, pour montrer cela il suffit de multiplier au numérateur et au dénominateur par $\overline{z'} \neq 0$. Le dénominateur étant un nombre réel strictement positif (module au carré), il suffit de caractériser le numérateur.

3 Forme trigonométrique

Théorème 3.1 *(Forme trigonométrique)*

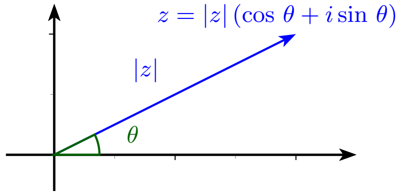
Soit $z \in \mathbf{C}^*$, alors z s'écrit de manière unique sous la forme

$$z = \rho\,(\cos\,\theta + i\sin\,\theta)$$

avec $\rho > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Dans ce cas, $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

Cette écriture s'appelle la **forme trigonométrique**.

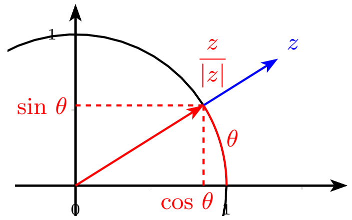


Remarque : Si $z = 0$, on peut aussi considérer que c'est une forme trigonométrique avec $\rho = 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$, mais il n'y a plus d'unicité.

⚠ L'angle doit être le même dans le cosinus et le sinus.

Preuve

Si $z = 0$, c'est évident,
si $z \neq 0$, $\frac{z}{|z|} \in \mathbf{U}$,
et on pose $\theta = \arg(z) = \arg\left(\frac{z}{|z|}\right)$.
Ainsi $\mathfrak{Re}\left(\frac{z}{|z|}\right) = \cos\,\theta$ et $\mathfrak{Im}\left(\frac{z}{|z|}\right) = \sin\,\theta$,
donc $z = |z|\,(\cos\,\theta + i\sin\,\theta)$.



■

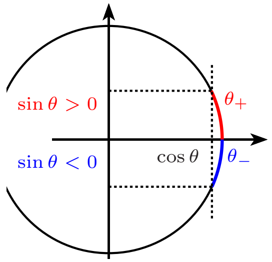
Méthode *(Mettre sous forme trigonométrique)*

Pour mettre un nombre complexe $z = a + ib$ sous forme trigonométrique,

- **Module :** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- **Argument :** on cherche θ tel que $\cos\,\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\,\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
  - pour $a > 0$, on pose $\theta = \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)\ [2\pi]$,
  - pour $a < 0$, on pose $\theta = \pi + \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)\ [2\pi]$.

Remarque : C'est la même méthode que pour le calcul de la phase vu en trigonométrie.
À nouveau, on n'a pas donné la formule pour $a = 0$, pour ne pas surcharger car c'est trivial.
En effet, pour $a = 0$, $b \neq 0$ pour que le nombre soit non nul (sinon pas d'arguement).
Dans ce cas, z est imaginaire pur, et si $b > 0$, son argument est $\frac{\pi}{2}$ (vers le « haut »), sinon, $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Dans certains cas, on pourra préférer l'usage de l'arccosinus ou de l'arcsinus (plutôt que l'arctangente).
Par exemple,
si $\sin(\theta) > 0$, alors $\theta = \text{Arccos}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$,
et si $\sin(\theta) < 0$, alors $\theta = -\text{Arccos}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.



Exemple

Donner la forme trigonométrique de $z = -3 + \sqrt{3}i$.
Solution :
On cherche le module $|z| = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
On en déduit que $\cos\,\theta = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$. Donc $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

$$z = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

Exemple

Donner la forme trigonométrique de $z = 4 - 3i$.
Solution :
$|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$, et $\theta = \text{Arctan}\left(\frac{4}{5}\right)$.
Ce qui donne, $z = 5\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.
On peut aussi voir que $\cos(\theta) = \frac{4}{5}$ et $\sin(\theta) = -\frac{3}{5} < 0$,
ainsi, on peut poser $\theta = -\text{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right)$.

4 Exponentielle complexe

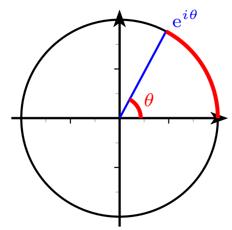
A Forme polaire

Définition 4.1 *(Exponentielle complexe)*

Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on note

$$e^{i\theta} = \cos\,\theta + i\sin\,\theta.$$

$e^{i\theta}$ est le point du cercle trigonométrique d'argument θ.



Exemple

$$e^{i0} = e^0 = 1, \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \qquad e^{i\pi} = -1, \qquad e^{\frac{3i\pi}{2}} = e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i.$$

⚠ Pour $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $a = b \Rightarrow e^{ia} = e^{ib}$ par contre la réciproque est **fausse !**
L'angle est déterminé à 2π près.

Propriété 4.2

1. $\forall\theta\in\mathbf{R}, \forall k\in\mathbf{Z},\ \ e^{i(\theta+2k\pi)}=e^{i\theta}$,
2. $\forall(\theta,\theta')\in\mathbf{R}^2,\ \ e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta}e^{i\theta'}$,
3. $\forall\theta\in\mathbf{R},\ \ \overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$,
4. $\forall\theta\in\mathbf{R}, \forall n\in\mathbf{Z},\ \ e^{in\theta}=\left(e^{i\theta}\right)^n$,
5. $\forall\theta\in\mathbf{R},\ \ \left|e^{i\theta}\right|=1$,
6. $\mathbf{U}=\left\{e^{i\theta},\ \theta\in]-\pi,\pi]\right\}=\left\{e^{i\theta},\ \theta\in\mathbf{R}\right\}$.

Preuve

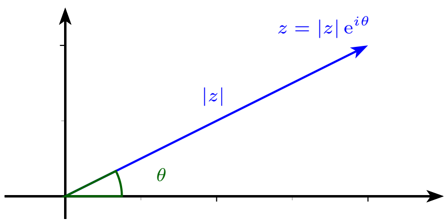
1. θ et $\theta+2k\pi$ représentent le même argument à 2π près. cos et sin sont 2π périodiques.
2. Ce sont les formules d'addition des cosinus et sinus de la propriété 4.2 de la page 4 du cours de trigonométrie.
$$\begin{aligned}e^{i(\theta+\theta')}&=\cos\left(\theta+\theta'\right)+i\sin\left(\theta+\theta'\right)\\&=\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'+i\left(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta'\right)\\&=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')=e^{i\theta}e^{i\theta'}.\end{aligned}$$
3. Par parité du cosinus, et imparité du sinus pour la première égalité, la deuxième est simplement déduite du point précédent.
4. Découle des deux points précédents par récurrence.
5. $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ d'après la propriété 4.1 de la page 4 du cours de trigonométrie.
6. D'après le théorème 3.1. ∎

Explications

Ces propriétés, en particulier le point 2, justifient que l'on utilise la notation exponentielle pour cet objet car il possède les mêmes propriétés (transforme la somme en produit).

Théorème 4.3 *(Forme polaire)*

Soit $z\in\mathbf{C}^*$, z s'écrit de manière unique sous la forme
$$z=\rho\,e^{i\theta},$$
avec $\rho\in\mathbf{R}_+^*$ et $\theta\in]-\pi,\pi]$.
Dans ce cas, $\rho=|z|$ et $\theta=\arg(z)$,



Cette écriture s'appelle la **forme exponentielle** ou **forme polaire.**

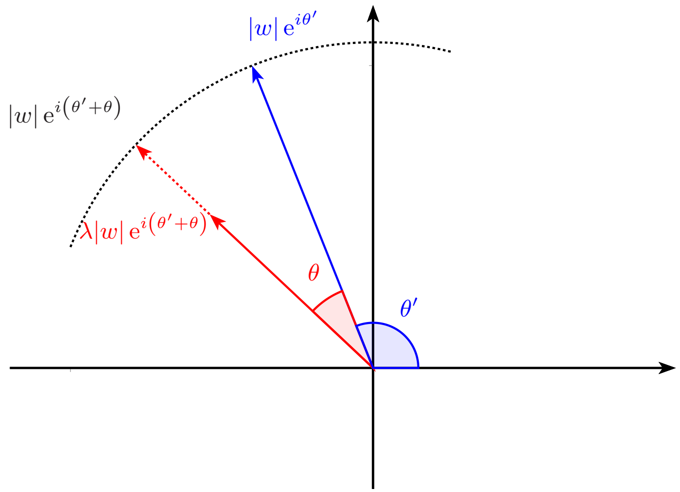
Remarque : Si $z=0$, alors on peut aussi trouver une forme exponentielle en prenant θ quelconque, mais il n'y a plus d'unicité.

Propriété 4.4 *(Interprétation géométrique du produit entre complexes)*

Soit $z\in\mathbf{C}$ avec $z=\lambda\,e^{i\theta}$,
Multiplier un nombre complexe w par z revient à appliquer au vecteur $\overrightarrow{w}$ une rotation d'angle θ et une homothétie de rapport λ.

Preuve

si $w=|w|\,e^{i\theta'}$, alors $wz=\lambda|w|\,e^{i\theta}e^{i\theta'}=\lambda|w|\,e^{i(\theta'+\theta)}$.
On bien multiplié la longueur du vecteur par λ et on a ajouté θ à son argument : on l'a fait tourner de θ.



∎

Corollaire 4.5

$\forall(z,z')\in(\mathbf{C}^*)^2$,
$$\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')\ \ [2\pi],$$
et
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')\ \ [2\pi].$$

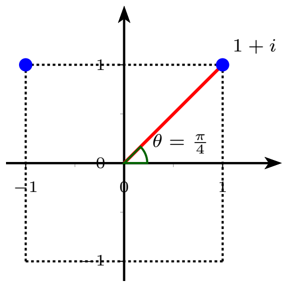
Explications

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$ correspond à l'angle orienté entre les vecteurs z et z'.

Exemple

Donner la forme exponentielle de $1+i$, interpréter géométriquement.
Solution :

$1+i$ correspond à l'angle en « haut à droite » du carré de de côté 1 et délimité par les deux axes.
On a donc un angle de $\frac{\pi}{4}$ (c'est-à-dire 45^o) et une longueur de $\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1 d'après Pythagore).
Donc $1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.



On peut aussi le démontrer de façon purement calculatoire : $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.
Donc $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Il va sans dire que l'interprétation géométrique est préférable aux calculs aveugles (et

va plus vite). Mais, ça, ce n'est pas nouveau : il est toujours plus simple de faire les calculs quand on comprend ce que l'on fait.

Méthode *(Quelle forme dans quelle situation ?)*

Comme expliqué plus haut :

- Lorsqu'il y a des **produits** ou **puissances**, utiliser la forme exponentielle.
- Lorsqu'il y a des **sommes**, utiliser la forme algébrique.

Ensuite, comme pour toute méthode, il y a des exceptions...

Exemple

Donner la forme cartésienne de $(1+i)^n$ pour $n \in \mathbf{Z}$.

Solution :

Pour passer à la puissance n, on utilise la forme trigonométrique (ne vous amusez pas à faire un binôme de Newton si vous souhaitez en sortir vivant).

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \sqrt{2}^n\, e^{i\frac{n\pi}{4}} = \sqrt{2}^n \left(\cos n\frac{\pi}{4} + i \sin n\frac{\pi}{4}\right).$$

B Vecteurs du plan et nombres complexes

Propriété 4.6

Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est alors d'affixe $z_B - z_A$.

Preuve

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ ce qui donne bien l'affixe voulue. ∎

Corollaire 4.7 *(Distance et angle entre deux points ou vecteurs)*

Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B.
Dans un repère *orienté*,

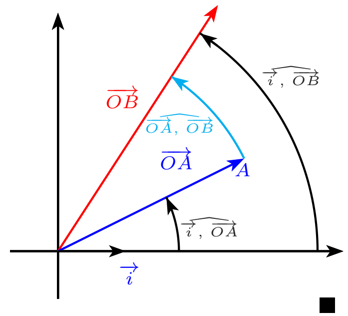
$$AB = |z_B - z_A| \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg z_B - \arg z_A = \widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}.$$

Explications

L'angle obtenu avec les arguments, est un angle orienté : il est positif dans le sens direct, et négatif sinon. L'orientation de l'angle correspond à l'orientation du cercle trigonométrique (sens des angles θ croissants). Échanger les deux vecteurs, revient à prendre l'angle opposé.

Preuve

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |z_B - z_A|.$$



$\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}$ est l'angle qui va de $\overrightarrow{OA}$ à $\overrightarrow{OB}$.
On peut donc l'écrire

$$\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}} = \widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OB}} - \widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OA}}.$$

Ainsi $\arg Z_B - \arg z_A = \widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}$.
On peut aussi l'interpréter à l'aide de la propriété suivante. ∎

Propriété 4.8 *(Rotation, homothétie)*

Soient, A, B, C, D quatre points distincts du plan complexe d'affixe respectives z_A, z_B, z_C, z_D.
On note alors $\dfrac{z_C - z_B}{z_C - z_A} = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Dans ce cas, $\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}} = \theta$ et $CB = \rho\, CA$.

Preuve

Immédiat avec l'interprétation de la forme polaire donnée plus haut. ∎

Nous en détaillons à présent quelques cas particuliers avec l'alignement et l'orthogonalité.

Propriété 4.9 *(Alignement)*

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives z_1 et z_2

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ colinéaires} &\iff \exists \lambda \in \mathbf{R} \text{ tel que } z_1 = \lambda z_2 \text{ ou } z_2 = \lambda z_1, \\
&\iff \begin{cases} & z_2 = 0, \\ \text{ou} & \exists \lambda \in \mathbf{R} \text{ tel que } z_1 = \lambda z_2, \end{cases} \\
&\iff z_1 \overline{z_2} \in \mathbf{R}.
\end{aligned}$$

Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

$$\begin{aligned}
A, B \text{ et } C \text{ alignés} &\iff \exists \lambda \in \mathbf{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC} \text{ ou } \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}, \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbf{R} \text{ tel que } z_B - z_A = \lambda (z_C - z_A) \\
&\qquad\qquad \text{ou } z_C - z_A = \lambda (z_B - z_A), \\
&\iff \begin{cases} & z_C = z_A, \\ \text{ou} & \exists \lambda \in \mathbf{R} \text{ tel que } z_B - z_A = \lambda (z_C - z_A), \end{cases} \\
&\iff (z_B - z_A)\left(\overline{z_C - z_A}\right) \in \mathbf{R}.
\end{aligned}$$

⚠ Il ne faut pas oublier la double condition de colinéarité $z_1 = \lambda z_2$ **ou** $z_2 = \lambda z_1$ si on ne considère pas la cas $z_2 = 0$ à part.

Preuve

Pour obtenir la dernière équivalence, il suffit de multiplier par $\overline{z_2}$, et comme $z_2\overline{z_2} = |z_2|^2 \in \mathbf{R}$, alors il peut être retiré de la relation. ■

Exemple

Déterminer les points M d'affixe z tels que les points d'affixe i, z, iz soient alignés.

Solution :

Les points sont alignés si, et seulement si $(iz-i)\,\overline{(z-i)} \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}(iz-i)\,\overline{(z-i)} \in \mathbf{R} &\iff (iz-i)\,(\overline{z}+i) \in \mathbf{R}\\ &\iff i\,(z\,\overline{z}+iz-\overline{z}-i) \in \mathbf{R}\\ &\iff \mathfrak{Re}\,\left(|z|^2+iz-\overline{z}-1\right) = 0.\end{aligned}$$

Si on note $z = x+iy$, alors on trouve la condition $x^2+y^2-x-y=0$.

On met l'expression sous forme canonique pour faire apparaître l'équation d'un cercle :

$$x^2+y^2-x-y = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}.$$

On trouve donc que les solutions sont l'ensemble des points $x+iy$ tels que

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

On reconnaît l'équation d'un cercle de centre $\left(\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Propriété 4.10 *(Orthogonalité)*

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives z_1 et z_2

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ orthogonaux} &\iff \exists \lambda \in \mathbf{R} \text{ tel que } z_1 = i\lambda z_2 \text{ ou } z_2 = i\lambda z_1,\\ &\iff \begin{cases} & z_2 = 0,\\ \text{ou} & \exists \lambda \in \mathbf{R} \text{ tel que } z_1 = i\lambda z_2,\end{cases}\\ &\iff z_1\overline{z_2} \in i\mathbf{R}.\end{aligned}$$

Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

$$\begin{aligned}(AB) \perp (AC) &\iff \exists \lambda \in \mathbf{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AB} = i\lambda\overrightarrow{AC} \text{ ou } \overrightarrow{AC} = i\lambda\overrightarrow{AB},\\ &\iff \exists \lambda \in \mathbf{R} \text{ tel que } z_B - z_A = i\lambda\,(z_C - z_A)\\ &\qquad\qquad \text{ou } z_C - z_A = i\lambda\,(z_B - z_A)\,,\\ &\iff \begin{cases} & z_C = z_A,\\ \text{ou} & \exists \lambda \in \mathbf{R} \text{ tel que } z_B - z_A = i\lambda\,(z_C - z_A)\,,\end{cases}\\ &\iff (z_B - z_A)\,\overline{(z_C - z_A)} \in i\mathbf{R}.\end{aligned}$$

Preuve

Les vecteurs (non nuls) $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\arg z_2 - \arg z_1 = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Or, $\arg z_2 - \arg z_1 = \arg \frac{z_2}{z_1}$.

On obtient donc $\frac{z_2}{z_1} \in i\mathbf{R}$. ■

Exemple

Pour $z \in \mathbf{C}$, on note M le point d'affixe z, M' le point d'affixe iz, et I le point d'affixe i.

Déterminer z pour que $(MM') \perp (IM)$.

Solution :

La condition d'orthogonalité est $(iz-z)\,\overline{(z-i)} \in i\mathbf{R}$,

c'est-à-dire $\mathfrak{Re}\,\left((iz-z)\,\overline{(z-i)}\right) = 0$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{Re}\,\left((iz-z)\,\overline{(z-i)}\right) = 0 &\iff \mathfrak{Re}\,\left(z\,(i-1)\,(\overline{z}+i)\right) = 0\\ &\iff \mathfrak{Re}\,\left(|z|^2\,(i-1) - z(1+i)\right) = 0\\ &\iff -|z|^2 - x + y = 0 \quad \text{avec } z = x+iy\\ &\iff x^2+y^2+x-y = 0\\ &\iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

On reconnaît l'équation d'un cercle de centre $\left(-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Théorème 4.11 *(Similitudes directes)*

Soit $(a,\, b) \in \mathbf{C}^2$, on considère

$$f\ :\ \begin{cases} \mathbf{C} & \to \quad \mathbf{C}\\ z & \mapsto \quad az+b\end{cases}.$$

1. Si $a = 1$, alors l'application est une translation de vecteur b.
2. Sinon on écrit $a = |a|\ \mathrm{e}^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbf{R}$.
   Dans ce cas,
   - l'application admet un point invariant ω (son centre),
   - f est la composée de
     - la rotation de centre ω et d'angle θ,
     - l'homothétie de centre ω et de rapport $|a|$.

   L'ordre entre la rotation et l'homothétie est égal : elles commutent.

Preuve

Pour $a = 1$, c'est trivial.

Sinon, on résout $f(z) = z$ et on trouve une unique solution $\omega = \frac{b}{1-a}$ $(a \neq 1)$.

$$\forall z \in \mathbf{C},\ f(z) - \omega = az + b - (a\omega + b) = a\,(z-\omega)\,.$$

Ainsi, $f\,(z) - \omega = |a|\ \mathrm{e}^{i\theta}\,(z-\omega)\,.$ ■

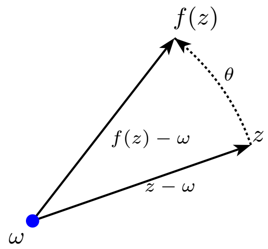
Explications

Pour considérer une rotation de centre ω, on se place dans le repère de centre ω dans lequel la coordonnée du point devient $z-\omega$.

On multiplie ensuite par $\mathrm{e}^{i\theta}$ pour réaliser la rotation, et on obtient $f(z)-\omega$.

On obtient donc

$$f(z) - \omega = \mathrm{e}^{i\theta}\,(z-\omega)\,.$$



On fait de même pour l'homothétie.

Exemple

Étude de la fonction $f : z \mapsto 2iz - 4$.
Solution :
$f(z) = z \iff z = \frac{4}{2i-1} = -\frac{4}{5}(1+2i)$.
Donc f est la similitude directe de centre $-\frac{4}{5}(1+2i)$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2.

Exemple

Donner l'expression de la rotation centre $1+i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Solution :
Pour tout $z \in \mathbf{C}$, $f(z) - (1+i) = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}(z - (1+i)) = i(z-1-i) = iz + 1 - i$.
Donc $f(z) = iz + 1 - i + 1 + i = iz + 2$.

Exemple

On considère la rotation centre ω_1 et d'angle θ, notée r et l'homothétie h de centre ω_2 et de rapport $\rho \geqslant 0$.
On suppose que ni r, ni h ne sont l'identité, c'est-à-dire que $\rho \neq 1$.
Déterminer l'expression de $h \circ r$ et montrer qu'il s'agit d'une similitude directe dont on donnera le centre, l'angle et le rapport.
Solution :
Soit $z \in \mathbf{C}$, $r(z) = \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega_1) + \omega_1$. Donc

$$\begin{aligned}(h \circ r)(z) &= h\left(\mathrm{e}^{i\theta} z + \left(1 - \mathrm{e}^{i\theta}\right)\omega_1\right)\\ &= \rho\left(\mathrm{e}^{i\theta} z + \left(1 - \mathrm{e}^{i\theta}\right)\omega_1 - \omega_2\right) + \omega_2\\ &= \rho\,\mathrm{e}^{i\theta} z + \rho\left(1 - \mathrm{e}^{i\theta}\right)\omega_1 + (1-\rho)\omega_2.\end{aligned}$$

On voit donc bien qu'il s'agit d'une similitude directe.
On cherche un point fixe ω.

$$\begin{aligned}(h \circ r)(\omega) = \omega &\iff \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}\omega + \rho\left(1 - \mathrm{e}^{i\theta}\right)\omega_1 + (1-\rho)\omega_2 = \omega\\ &\iff \left(1 - \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)\omega = \rho\left(1 - \mathrm{e}^{i\theta}\right)\omega_1 + (1-\rho)\omega_2.\end{aligned}$$

Or $\rho \neq 1$ et $\rho \geqslant 0$ donc $\rho\,\mathrm{e}^{i\theta} \neq 1$.

$$\begin{aligned}(h \circ r)(\omega) = \omega &\iff \omega = \frac{\rho\left(1 - \mathrm{e}^{i\theta}\right)\omega_1 + (1-\rho)\omega_2}{1 - \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}}\\ &\iff \omega = \omega_1 + \frac{1-\rho}{1 - \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}}(\omega_2 - \omega_1).\end{aligned}$$

$h \circ r$ est la similitude directe de centre ω d'angle θ et de rapport ρ.

C Exponentielle complexe

Définition 4.12 *(Exponentielle complexe)*

Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, $\theta \in \mathbf{R}$, on pose

$$\mathrm{e}^{\lambda + i\theta} = \mathrm{e}^{\lambda}\,\mathrm{e}^{i\theta}.$$

Autre formulation :
Soit $z \in \mathbf{C}$, on pose

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{\mathfrak{Re}\,(z)}\,\mathrm{e}^{i\,\mathfrak{Im}\,z}.$$

Propriété 4.13

1. L'exponentielle complexe coïncide avec la définition de l'exponentielle réelle sur $\mathbf{R}$.
2. $\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2$,
$$\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{z}\,\mathrm{e}^{z'} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{z-z'} = \frac{\mathrm{e}^{z}}{\mathrm{e}^{z'}}.$$
3. $\forall z \in \mathbf{C}$, $\forall n \in \mathbf{Z}$,
$$\mathrm{e}^{nz} = (\mathrm{e}^{z})^n.$$

Preuve

Trivial ■

Remarque : On voit que l'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbf{C}$ (comme pour $\mathbf{R}$).

⚠

1. Sur $\mathbf{C}$, parler de croissance ou de décroissance d'une fonction n'a **aucun sens** (les inégalités ne sont pas définies).
2. De même, on ne peut **pas dire** que sur $\mathbf{C}$ l'exponentielle serait positive.
3. Le logarithme **n'existe pas**[5] sur $\mathbf{C}$.

Propriété 4.14

Soit $z \in \mathbf{C}^*$, si on pose $\theta = \arg(z)$, alors $z = \exp(\ln|z| + i\theta)$.

Remarque : Pour pouvoir prendre le logarithme du module, il faut que z soit non nul.
Ici, il s'agit bien du logarithme d'un nombre réel strictement positif (un module).

Corollaire 4.15

Soit $a \in \mathbf{C}$, on considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbf{C}$

$$\exp z = a.$$

1. Si $a = 0$, alors l'équation n'a pas de solutions.
2. Si $a \neq 0$, alors l'équation admet une infinité de solutions :
$$\mathscr{S} = \{\ln|a| + i\arg(a) + 2ik\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Propriété 4.16 *(Non injectivité)*

$\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2$,

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{z'} \iff z - z' \in 2i\pi\mathbf{Z}.$$

où $2i\pi\mathbf{Z} = \{2ik\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

Preuve

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{z'} \iff \frac{\mathrm{e}^{z}}{\mathrm{e}^{z'}} = 1 \iff \mathrm{e}^{z-z'} = 1.$$

5. En tout cas pas pour vous : c'est un problème compliqué et il y a plusieurs définitions de logarithmes possibles.

Si on note $z - z' = x + iy$, alors $1 = e^{z-z'} = e^x e^{iy}$.
e^x represente alors le module, et y l'argument.
Ainsi, par unicité de l'écriture sous forme polaire, on a $x = 0$ et $y = 0\ [2\pi]$. ■

5 Application à la trigonométrie

Les formules trigonométriques se trouvent fortement simplifiées par l'usage de l'exponentielle complexe. C'est ce que nous allons voir.

Propriété 5.1

$\forall \theta \in \mathbf{R}$,

$$\cos\theta = \mathfrak{Re}\left(e^{i\theta}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \mathfrak{Im}\left(e^{i\theta}\right).$$

Preuve

C'est la définition du sinus et du cosinus en utilisant l'exponentielle complexe. ■

Propriété 5.2 *(Formules d'Euler)*

$\forall \theta \in \mathbf{R}$,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

⚠ Ne par oublier le i au dénominateur pour le sinus.

Preuve

C'est la propriété 1.10 de la page 5 qui est utilisée pour exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de la propriété 5.1. ■

Il peut arriver que l'on soit contraint de faire la somme de deux formes exponentielles (de même module), on a alors souvent recours à la technique suivante :

Méthode *(Factorisation par l'angle moyen)*

Soient $(a, b) \in \mathbf{R}^2$,

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

On fait de même avec une différence.

Remarque : Les deux exponentielles sont unitaires.

Exemple *(À savoir refaire)*

Pour $\theta \neq \pi[2\pi]$, simplifier l'expression de $1 - e^{i\theta}$.

Solution :

$$\begin{aligned} 1 - e^{i\theta} &= e^0 - e^{i\theta} && \text{(Étape inutile sur une copie)} \\ &= e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}\right) \quad = -2i\, e^{i\theta/2}\sin(\theta/2). \end{aligned}$$

Il faut savoir faire de même pour trouver $1 + e^{i\theta} = 2\, e^{i\theta/2}\cos(\theta/2)$.

Exemple

Pour $\theta \neq \pi[2\pi]$, simplifier l'expression de $\dfrac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}$.

Solution :

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}} &= \frac{e^0 - e^{i\theta}}{e^0 + e^{i\theta}} && \text{(Étape inutile sur une copie)} \\ &= \frac{e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}\right)}{e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right)} \\ &= \frac{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}} \\ &= -i\frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} && \text{(Formule d'Euler)} \\ &= -i\tan(\theta/2). \end{aligned}$$

On retrouve facilement beaucoup de formules trigonométriques avec l'exponentielle complexe en cas d'oubli.

Exemple

Retrouver la formule de factorisation de $\sin(p) - \sin(q)$.

Solution :

$$\begin{aligned} \sin(p) - \sin(q) &= \mathrm{Im}\left(e^{ip} - e^{iq}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(2i\, e^{i\frac{p+q}{2}}\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right). \end{aligned}$$

Exercice

Retrouver les autres formules trigonométrique de factorisation, duplication...

Propriété 5.3 *(Formule de Moivre)*

Soit $\theta \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{Z}$,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Preuve

$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ puis on passe en écriture cartésienne. ■

⚠ Ne pas se tromper sur la formule, en particulier $\cos^n\theta \neq \cos(n\theta)$.

Méthode *(Linéarisation)*

On transforme une expression de type $\cos^p\theta\sin^q\theta$ en somme de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$.
(on supprime les puissances et produits de fonctions trigonométriques.)

- On utilise **la formule d'Euler** sous la puissance :
$$\cos^p\theta\sin^q\theta = \left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}\right)^p\left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}\right)^q.$$
- On développe avec la **formule du binôme**,
- On rassemble les termes de même exposant pour retrouver des sin et cos.

Remarque : La linéarisation permet le calcul de certaines intégrales.

Exemple

Pour $\theta\in\mathbf{R}$, linéariser $\sin^5\theta$.

Solution :
$$\begin{aligned}
\sin^5\theta &= \left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}\right)^5 && \text{(Euler)}\\
&= \frac{1}{32i}\left(\mathrm{e}^{5i\theta}-5\,\mathrm{e}^{3i\theta}+10\,\mathrm{e}^{i\theta}-10\,\mathrm{e}^{-i\theta}+5\,\mathrm{e}^{-3i\theta}-\mathrm{e}^{-5i\theta}\right) && \text{(Newton)}\\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{\mathrm{e}^{5i\theta}-\mathrm{e}^{5i\theta}}{2i}\right)-\frac{5}{16}\left(\frac{\mathrm{e}^{3i\theta}-\mathrm{e}^{-3i\theta}}{2i}\right)+\frac{10}{16}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}\right)\\
&= \frac{\sin(5\theta)-5\sin(3\theta)+10\sin\theta}{16}.
\end{aligned}$$

Astuces pour calculer plus rapidement et vérifier les formules :

- Ne pas oublier de mettre le dénominateur à la bonne puissance.
- Les coefficients binomiaux sont symétriques : si on a la terme $n\,\mathrm{e}^{ip\theta}$, on a aussi le terme symétrique $\pm n\,\mathrm{e}^{-ip\theta}$ (permet de recomposer les fonctions trigonométriques).
  $\rightarrow$ il suffit de faire la moitié du développement.
- La présence du signe « $-$ » dans le binôme, donne une alternance de signes « $+$ » et « $-$ » dans le développement.
  $\rightarrow$ si la fonction est paire, elle s'exprimera avec cos,
  $\rightarrow$ si la fonction est impaire, elle s'exprimera avec sin.
  Pour savoir si le terme symétrique est affecté d'un $+$ ou d'un $-$, il suffit de remplacer θ par $-\theta$ dans l'expression à développer.
- Les coefficients en exposant vont de 2 en 2.
  $\rightarrow$ tous les termes en argument ont la même parité.

Exemple

Pour $\theta\in\mathbf{R}$, linéariser $\sin^2\theta\cos^4\theta$.

Solution :
$$\begin{aligned}
\sin^2\theta\cos^4\theta &= \left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}\right)^2\left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}\right)^4 && \text{(Euler)}\\
&= -\frac{1}{64}\left(\mathrm{e}^{2i\theta}-2+\mathrm{e}^{-2i\theta}\right)\left(\mathrm{e}^{4i\theta}+4\,\mathrm{e}^{2i\theta}+6+4\,\mathrm{e}^{-2i\theta}+\mathrm{e}^{-4i\theta}\right) && \text{(Newton)}\\
&= -\frac{1}{64}\left(\mathrm{e}^{6i\theta}+2\,\mathrm{e}^{4i\theta}-\mathrm{e}^{2i\theta}-4-\mathrm{e}^{2i\theta}+2\,\mathrm{e}^{4i\theta}+\mathrm{e}^{6i\theta}\right) && \text{(Développement)}\\
&= -\frac{\cos(6\theta)+2\cos(4\theta)-\cos(2\theta)-2}{32}.
\end{aligned}$$

Remarque : Il ne faut pas faire le développement comme au collège : pour chaque exposant il suffit de compter le nombre de fois qu'on le trouve.
Par exemple, pour l'exposant 4, on l'obtient avec $\mathrm{e}^{2i\theta}\times 4\,\mathrm{e}^{2i\theta}$ et $-2\times\mathrm{e}^{4\theta}$, ce qui en donne $4-2=2$ au total.

Méthode *(Factorisation ou « dé-linéarisation »)*

La délinéarisation consiste à transformer une expression de type $\sin(n\theta)$ ou $\cos(n\theta)$ en produits et puissances de $\sin\theta$ et $\cos\theta$.
C'est l'opération inverse de la linéarisation.
Pour cela

- On utilise la formule de Moivre
$$\cos(n\theta)=\mathfrak{Re}\left((\cos\theta+i\sin\theta)^n\right)\qquad\text{et}\qquad\sin(n\theta)=\mathfrak{Im}\left((\cos\theta+i\sin\theta)^n\right).$$
- On utilise la formule du binôme de Newton.

Exemple

Délinéariser $\sin(5\theta)$.

Solution :
$$\begin{aligned}
\sin(5\theta) &= \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{5i\theta}\right)=\mathrm{Im}\left((\cos\theta+i\sin\theta)^5\right) \qquad \text{(formule de Moivre)}\\
&= \mathrm{Im}\big(\cos^5\theta+5i\cos^4\theta\sin\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta-10i\cos^2\theta\sin^3\theta+5\cos\theta\sin^4\theta+i\sin^5\theta\big)\\
&= 5\cos^4\theta\sin\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^5\theta \quad \text{⚠ Ne pas s'arrêter là, il faut simplifier.}\\
&= 5(1-\sin^2\theta)^2\sin\theta-10(1-\sin^2\theta)\sin^3\theta+\sin^5\theta\\
&= 5(1-2\sin^2\theta+\sin^4\theta)\sin\theta-10\sin^3\theta+10\sin^5\theta+\sin^5\theta\\
&= 16\sin^5\theta-20\sin^3\theta+5\sin\theta.
\end{aligned}$$

⚠ $\qquad \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{in\theta}\right)\neq\left(\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right)^n \qquad$ et $\qquad \sin(n\theta)\neq\sin^n\theta.$

Astuce pour calculer plus rapidement et vérifier les formules :
La troisième ligne dans le calcul de l'exemple est inutile : puisqu'on sait qu'on prendra la partie imaginaire, ne calculer que les termes avec i en facteur.
$\rightarrow$ il suffit de ne calculer que la moitié du binôme.

Exemple *(Cas général)*

Délinéariser $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$.

Solution :

$$\cos(n\theta) = \mathfrak{Re}\left(\mathrm{e}^{ni\theta}\right) = \mathfrak{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right) \qquad \text{(formule de Moivre)}$$
$$= \mathfrak{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}(\theta)\times i^k\sin^k(\theta)\right) \qquad \text{(binôme de Newton)}$$
$$= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2j}\cos^{n-2j}(\theta)\,(-1)^j\sin^{2j}(\theta)\,.$$

On n'a gardé que les termes réels : puissances paires, en posant $k = 2j$.

$$\sin(n\theta) = \mathfrak{Im}\left(\mathrm{e}^{ni\theta}\right) = \mathfrak{Im}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right) \qquad \text{(formule de Moivre)}$$
$$= \mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}(\theta)\,i^k\sin^k(\theta)\right) \qquad \text{(binôme de Newton)}$$

On n'a gardé que

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2j+1}\cos^{n-2j-1}(\theta)\,(-1)^j\sin^{2j+1}(\theta)\,.$$

les termes imaginaires : puissances impaires, en posant $k = 2j+1$.

Exemple *(à savoir refaire)*

Soient $\theta \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$, donner une expression, sans le signe $\sum$, de

$$C_n = \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta).$$

Solution :

Calcul de C_n.

Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, alors $\forall k \in \mathbf{N}$, $\cos(k\theta) = 1$, donc $C_n = n+1$.

Si $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, alors $\mathrm{e}^{i\theta} \neq 1$ et on peut écrire

$$C_n = \sum_{k=0}^{n}\mathfrak{Re}\ \mathrm{e}^{ik\theta}$$
$$= \mathfrak{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{ik\theta}\right) \quad \text{par linéarité}$$
$$= \mathfrak{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k\right)$$
$$= \mathfrak{Re}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}\right) \quad \text{somme géométrique car } \mathrm{e}^{i\theta} \neq 1,$$
$$= \mathfrak{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}}\,\frac{2i}{2i}\,\frac{-\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \quad \text{factorisation par l'angle moyen}$$
$$= \mathfrak{Re}\left(\mathrm{e}^{i\frac{n\theta}{2}}\right)\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$= \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Calcul de S_n.

On procède de la même façon avec la partie imaginaire. Sans reprendre tous les calculs intermédiaires, on trouve immédiatement :

Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, alors $\forall k \in \mathbf{N}$, $\sin(k\theta) = 1$, donc $S_n = 0$.

Si $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, alors $\mathrm{e}^{i\theta} \neq 1$ et on obtient

$$S_n = \mathfrak{Im}\left(\mathrm{e}^{i\frac{n\theta}{2}}\right)\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

6 Résolution d'équations polynomiales

A Racines carrées complexes

Définition 6.1 *(Racine carrée complexes)*

Soit $\Delta \in \mathbf{C}$, **les racines carrées complexes** de Δ sont l'ensemble des $\delta \in \mathbf{C}$ tels que

$$\delta^2 = \Delta\,.$$

⚠ Sauf pour 0, la racine carrée complexe n'est pas unique. Il ne faut pas utiliser la notation « $\sqrt{\cdot}$ » pour une racine carrée complexe.

Exemple

Les racines carrés complexes de 49 sont 7 et -7.
Les racines carrés complexes de -49 sont $7i$ et $-7i$.

Théorème 6.2 *(Description des racines carrées complexes)*

Soit $\Delta \in \mathbf{C}^*$, alors Δ peut être mis sous la forme $\Delta = \rho\, e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$,
Δ admet exactement deux racines carrées complexes distinctes :

$$\delta_1 = \sqrt{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad \delta_2 = -\sqrt{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\rho}\, e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}.$$

Remarque : On remarque que ces deux racines carrées complexes sont opposées l'une de l'autre (pour 0, elles sont confondues).

Exemple *(Cas particuliers)*

Appliquer la formule pour $\Delta \in \mathbf{R}_+^*$ puis pour $\Delta \in \mathbf{R}_-^*$.
Solution :

- Si $\Delta \in \mathbf{R}_+^*$, alors $\Delta = \rho$ et $\theta = 0$.
  Les racines carrées complexes sont les deux réels opposés : $\delta_1 = \sqrt{\Delta}$ et $\delta_2 = -\sqrt{\Delta}$.
- Si $\Delta \in \mathbf{R}_-^*$, alors $\rho = \Delta$ et $\theta = \pi$: $\Delta = |\Delta|\, e^{i\pi}$
  Les racines carrées complexes sont les deux imaginaires purs opposés :
  $\delta_1 = \sqrt{|\Delta|}\, e^{i\pi/2} = i\sqrt{|\Delta|}$ et $\delta_2 = -\sqrt{|\Delta|}\, e^{i\pi/2} = -i\sqrt{|\Delta|}$.

Preuve

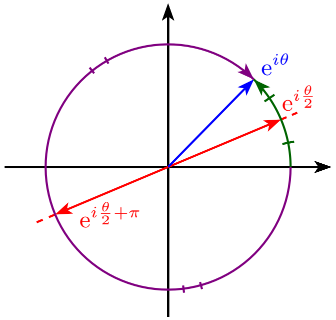
Il est évident que si δ est racine carrée complexe de Δ, alors $\delta \neq 0$.
On peut donc écrire $\delta = \alpha\, e^{i\varphi}$, avec $\alpha > 0$ et $\varphi \in]-\pi,\, \pi]$.
Ainsi, $\Delta = \delta^2 = \alpha^2\, e^{2i\varphi}$.
Par identification des modules et arguments, on résout :

$$\begin{cases} \alpha^2 = \rho \\ 2\varphi = \theta\ [2\pi]. \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \sqrt{\rho} \text{ car } \alpha > 0 \\ \phi = \frac{\theta}{2}\ [\pi]. \end{cases}$$

On obtient donc deux possibilités pour φ (à 2π près), $\varphi = \frac{\theta}{2}$ ou $\varphi = \frac{\theta}{2} + \pi$. ∎

Explications

Un produit multiplie les modules et ajoute les arguments. Donc l'opération de mise au carré met le module au carré et multiplie par deux l'argument.
Pour trouver les racines carrées complexes, il suffit donc de faire l'opération inverse : on prend la racine carrée (réelle) du module et on divise l'argument par deux.
La *duplicité* des racines carrées provient du fait que l'argument peut être obtenu en tournant soit dans un sens, soit dans l'autre :



- si on tourne dans le sens direct, on obtient $\theta/2$,
- si on tourne dans l'autre sens, c'est que nous sommes partis avec un tour en trop : $\theta + 2\pi$. Lorsque l'on prend l'angle moitié on trouve donc $\theta/2 + \pi$. Le supplément d'argument π revient à prendre l'opposé de la racine car $e^{i\pi} = -1$.

Si on considère, des complexes de module 1, cela donne la figure ci-contre.

Exemple

Chercher les racines carrées complexes de i.
Solution :
On met sous forme exponentielle : $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et on obtient les deux racines carrées : $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-3i\frac{\pi}{4}}$ (avec l'argument principal).

Exemple

Chercher les racines carrées complexes de $1 + i$.
Solution :
On met sous forme exponentielle : $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ et on obtient les deux racines carrées : $\sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $-\sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$.

Méthode *(Lorsque Δ est sous forme cartésienne)*

Soit $\Delta = a + ib$ et on cherche $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

$$\delta^2 = \Delta \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} & \text{car } \left|\delta^2\right| = |\Delta| \\ x^2 - y^2 = a & \text{car } \mathfrak{Re}\left(\delta^2\right) = a \\ 2xy = b & \text{car } \mathfrak{Im}\left(\delta^2\right) = b \end{cases}$$

1. On trouve x^2 grâce aux deux premières relations.
2. On trouve y avec la dernière relation.

Remarque : D'un point de vue logique, la première relation n'est pas nécessaire, mais elle est très pratique à l'usage.

Exemple

Résoudre $\delta^2 = 5 - 12i$.
Solution :
On pose $\delta = x + iy$, alors δ est solution si et seulement si

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 5 \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13 \\ 2xy &= -12 \end{cases}$$

Les deux premières relations donnent $x^2 = \frac{13+5}{2} = 9$ donc $x = \pm 3$.

Si $x = +3$, alors $y = \frac{-6}{3} = -2$, et si $x = -3$, alors $y = 2$.
Donc $\delta = \pm(3 - 2i)$.

B Résolution des équations du second degré

Théorème 6.3 *(Résolution des équations de degré 2)*

Soient $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$, avec $a \neq 0$.
On définit l'équation (complexe) de degré 2

$$(E) \;:\; \quad az^2 + bz + c = 0.$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et δ est une racine complexe de Δ (n'importe laquelle).
(E) admet deux solutions (éventuellement confondues)

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

Preuve

(c'est la même preuve que pour le cas réel vue en lycée)
On note δ une des racines carrées complexes de Δ (n'importe laquelle).
On met alors le trinôme sous forme canonique en faisant apparaître un carré (permet de n'avoir qu'un seul z dans l'équation), puis on factorise :

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) \\
&= a\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right)
\end{aligned}$$

d'après l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
Ainsi

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c = 0 &\iff \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right) = 0 \quad \text{car } a \neq 0 \\
&\iff z = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b + \delta}{2a}.
\end{aligned}$$

■

Théorème 6.4 *(Lien entre les racines et la factorisation)*

Soient $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$, avec $a \neq 0$. (z_1, z_2) sont un couple solution de $az^2 + bz + c = 0$ si, et seulement si $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Remarque : Sauf dans le cas d'une racine double, z_1 et z_2 sont supposées être deux solutions disctinctes.

Explications
Trouver les racines revient à factoriser le polynôme.

Preuve

C'est la preuve ci-dessus. ■

On peut généraliser cette relation à un degré quelconque :

Méthode *(Équations de degré supérieur)*

« z_1 est racine si, et seulement si $z - z_1$ factorise l'expression polynomiale ».

Pour résoudre une équation de degré 3 ou supérieur, commencer par chercher des racines évidentes.

Remarque : admis actuellement (on le démontrera dans le chapitre sur les polynômes).

Exemple

Résoudre sur $\mathbf{C}$, $z^3 - z^2 - z\,\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} = 0$.
Solution :
$z = 1$ est solution car $1 - 1 - \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} = 0$.
On peut donc factoriser par $(z - 1)$: $z^3 - z^2 - z\,\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} = (z - 1)(z^2 - \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}})$.
Pour finir la résolution, on voit qu'apparaît directement une deuxième factorisation :

$$(z - 1)(z^2 - \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}) = (z - 1)(z - \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}})(z + \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}).$$

Les solutions de l'équation sont donc $\mathscr{S} = \left\{1, \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}, -\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}\right\}$.

Exemple

Résoudre sur $\mathbf{C}$, $2z^3 - 2 = 0$.
Solution :
On divise l'équation par 2 et on voit que 1 est racine évidente, on factorise donc :

$$z^3 - 1 = (z - 1)\left(z^2 + z + 1\right).$$

On trouve les solutions du second degré avec le calcul de Δ, et on a au total trois solutions :

$$\mathscr{S} = \left\{1, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right\} = \left\{1, \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}, \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{3}}\right\}$$

Corollaire 6.5 *(Relations coefficients-racines)*

Pour $a \neq 0$,
z_1 et z_2 sont les deux racines de $az^2 + bz + c$ si et seulement si

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Preuve

$(\Rightarrow)$ Il suffit d'utiliser les expressions trouvées pour z_1 et z_2 ou de développer la forme factorisée. À noter que si $z_1 = z_2$, alors on compte la même racine deux fois.

$(\Leftarrow)$ $az^2+bz+c = a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right) = a\left(z^2-(z_1+z_2)\,z - z_1z_2\right) = a(z-z_1)(z-z_2)$
donc z_1 et z_2 sont les deux racines. ∎

On peut reformuler le corollaire précédent sous la forme

Corollaire 6.6

Soient $S \in \mathbf{C}$ et $P \in \mathbf{C}$, on définit le système d'équation

$$(E)\ :\quad \left\{\begin{array}{rl} z_1+z_2 &= S \\ z_1z_2 &= P. \end{array}\right.$$

(z_1,z_2) est solution de (E) si et seulement si ce sont les solutions de l'équation

$$z^2 - Sz + P = 0.$$

Exemple

Résoudre le système : $(E)\ :\ \left\{\begin{array}{l} z_1+z_2 = 4 \\ z_1z_2 = -5 \end{array}\right.$

Solution :
(z_1,z_2) est solution de (E) si et seulement si z_1 et z_2 ce sont les deux solutions de l'équation $z^2-4z-5=0$.
On trouve deux racines (-1 est racine évidente) : -1 et 5.
Donc $z_1=-1$ et $z_2=5$ sont les seules solutions (à l'ordre près).

Exemple

Résoudre le système : $(E)\ :\ \left\{\begin{array}{l} z_1+z_2 = 6-10i \\ z_1z_2 = -4(4+7i). \end{array}\right.$

Solution :
(z_1,z_2) est solution de (E) si, et seulement si ce sont les solutions de l'équation

$$z^2-(6-10i)z-4(4+7i)=0\,.$$

On calcule le discriminant Δ : $\Delta = (6-10i)^2+16(4+7i) = 4\left((3-5i)^2+16+28i\right)$

$$= -8i = 8\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} = \left(2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2$$

$$= (2-2i)^2$$

Les solutions sont $z_1 = \dfrac{-6+10i-2+2i}{2} = 2-4i$ et $z_2 = 4-6i$ (à l'ordre près).

C Racines n-ièmes de l'unité

Le but de cette partie est de généraliser ce nous avons fait avec la racine carrée pour une racine n-ième.

Définition 6.7 *(Racine n-ième)*

Soit $c\in\mathbf{C}$, on appelle **racine n-ième** de c, tout nombre complexe z tel que

$$z^n = c.$$

Lorsque $c=1$, on parle de racines n-ièmes de l'unité.

Exemple

0 possède une seule racine n-ième : 0.

Pour $n=2$, les racines n-ièmes sont les racines carrées complexes.

Théorème 6.8 *(Racines n-ièmes de l'unité)*

On se place dans le cas particulier où $c=1$.

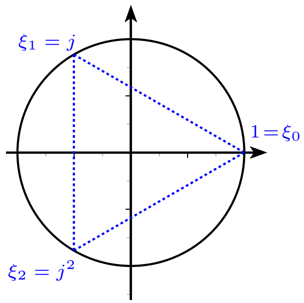
$c=1$ possède exactement n racines n-ièmes qui sont

$$\mathbf{U}_n = \left\{\xi_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}.$$

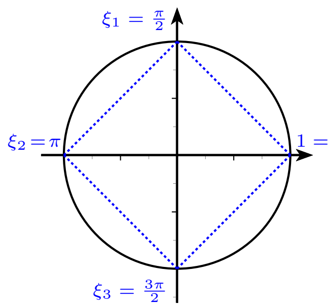
Remarque : Si on note $\xi_1 = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$, alors $\mathbf{U}_n = \left\{\xi_1^k,\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$.
$\xi_1 = \mathrm{e}^{2i\frac{\pi}{n}}$ s'appelle une racine n-ième *primitive* de l'unité (car toutes les autres s'obtiennent avec ses puissances).
Nous verrons plus tard qu'une racine $n-$ième est primitive si elle s'écrit sous la forme ξ_1^k avec k premier avec n.

Explications

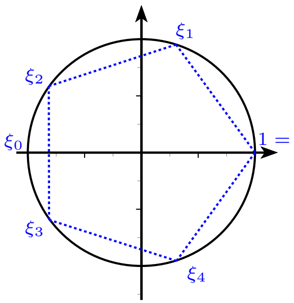
Les racines n-ièmes de l'unité correspondent aux sommets des polygones réguliers à n côtés.



Triangle - racines 3e



Carré - racines 4e



Pentagone - racines 5e

Preuve

($\textit{sens réciproque}$) Si $z \in \mathbf{U}_n$, alors z est racine n-ième de l'unité (trivial).
($\textit{sens direct}$) Si $z^n = 1$, alors en particulier $|z|^n = 1$.
Or l'équation $x^n = 1$ admet une seule solution sur $\mathbf{R}_+$: $x = 1$.
Donc $|z| = 1$, z s'écrit donc sous la forme $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbf{R}$.
Or

$$\mathrm{e}^{in\theta} = 1 \iff n\theta \equiv 0\ [2\pi] \iff \theta \equiv 0\ [\frac{2\pi}{n}].$$

C'est-à-dire $\theta \in \left\{\frac{2ik\pi}{n},\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$. Donc $\mathscr{S} \subset \mathbf{U}_n$.
Et les solutions ainsi décrites sont distinctes deux à deux.
On a déjà montré l'autre inclusion lors du sens réciproque, donc

$$\mathscr{S} = \mathbf{U}_n = \left\{\xi_1^k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.$$

On remarque que pour décrire $\mathbf{U}$, on peut choisir $k \in [\![0, n-1]\!]$ ou $k \in [\![1, n]\!]$, ou avec tout autre ensemble tel que k prenne n valeurs entières consécutives : on obtiendra exactement les mêmes solutions (grâce au modulo 2π), seul l'ordre sera affecté. ∎

Propriété 6.9 *(Somme et produit des racines de l'unité)*

On se place dans le cas particulier où $c = 1$.

Soit $n \geqslant 2$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $\xi_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = 0 \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=0}^{n-1} \xi_k = (-1)^{n-1}.$$

Remarque : Cette relation pourrait être interprétée comme une relation coefficients/racines pour un degré supérieur à 2 : dans l'équation $z^n = 1$, le coefficient de z^{n-1} est 0 et le coefficient constant est -1.

Preuve

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k \\ &= \frac{1 - \mathrm{e}^{\frac{2in\pi}{n}}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0.\end{aligned}$$

(somme géométrique, $\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$ car $n \neq 1$)

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} \xi_k &= \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k \\ &= \left(\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^{\sum_{k=0}^{n-1} k} \\ &= \left(\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^{n(n-1)/2} \\ &= \left(\mathrm{e}^{i\pi}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}.\end{aligned}$$

∎

Propriété 6.10 *(Racines n-ièmes d'un nombre complexe)*

On se place dans le cas général

Soit $c \in \mathbf{C}^*$, c admet exactement n racines n-ièmes distinctes qui sont

$$\left\{\sqrt[n]{|c|}\exp\left(i\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.$$

avec $\theta = \arg(c)$ et pour $x > 0$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \in \mathbf{R}$.

Preuve

Comme d'habitude, on se ramène au cas $|c| = 1$ en divisant par $|c| \neq 0$ (car $c \in \mathbf{C}^*$).
Si on pose $\theta = \arg(c)$, alors $\frac{c}{|c|} = \mathrm{e}^{i\theta}$.

$$z^n = c = |c|e^{i\theta} \iff \left(\frac{z}{\sqrt[n]{|c|}}\right)^n = \mathrm{e}^{i\theta}.$$

Résoudre $z^n = c$, revient donc à résoudre $Z^n = \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $Z = \dfrac{z}{\sqrt[n]{|c|}}$.

Comme pour les racines n-ièmes de l'unité : si Z est solution de $Z^n = \mathrm{e}^{i\theta}$, alors $|Z| = 1$.
Donc les solutions sont incluses dans $\mathbf{U}$ et peuvent donc s'écrire $Z = \mathrm{e}^{i\varphi}$ avec $\varphi \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{e}^{i\varphi}\right)^n = \mathrm{e}^{i\theta} &\iff \mathrm{e}^{in\varphi} = \mathrm{e}^{i\theta} \iff n\varphi \equiv \theta\ [2\pi] \iff \varphi \equiv \frac{\theta}{n}\ [\frac{2\pi}{n}] \\ &\iff \varphi \in \left\{\frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.\end{aligned}$$

Donc en multipliant $Z = \mathrm{e}^{i\varphi}$ par $\sqrt[n]{|c|}$, on obtient bien les solutions énoncées dans le théorème. ∎