

ENSEMBLES

« Les mathématiques sont un jeu qu'on exerce selon des règles simples en manipulant des symboles et des concepts qui n'ont en soi, aucune importance particulière. » D. Hilbert (1862-1943)

1 APPARTENANCE ET INCLUSION

Définition 1.1

Un ensemble E est une collection d'objets distincts appelés **éléments** de E .
 Un **singleton** est un ensemble à un seul élément : $\{a\}$.
 L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé **l'ensemble vide**.
 Il est noté \emptyset ou $\{\}$.

On peut définir un ensemble de deux manières : en extension et en compréhension.

- Définir un ensemble en **extension**, c'est donner la liste complète des éléments qui le composent.
- Définir un ensemble en **compréhension**, c'est le considérer comme l'ensemble des éléments qui vérifient une certaine propriété¹.

Exemple

L'ensemble $\{1, 2, \pi\}$ est défini en extension.
 $\{x \in \mathbf{R} \mid \exists n \in \mathbf{N}, x = 2^n\}$ est l'ensemble qui contient $1, 2, 2^2, 2^3 \dots$, il est défini en compréhension. On peut aussi le définir en extension par $\{2^n, n \in \mathbf{N}\}$.

Méthode (Montrer qu'un ensemble est vide)

Pour montrer qu'un ensemble A est vide, on raisonne souvent par l'absurde (on suppose qu'il existe un élément $x \in A$ et on montre que c'est absurde) :

« Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in A$,
 alors, ...
 \vdots
 absurde, donc $A = \emptyset$. »

Exemple

Montrer que $\{x > 0, \forall y > 0, x < y\} = \emptyset$.

Solution :

Supposons par l'absurde qu'il existe x dans l'ensemble.

Alors $x > 0$ et $\forall y > 0, x < y$.

👁 le « \forall » invite à particulariser y : pour $y = \frac{x}{2}$, on a $y > 0$ et $y < x$ (car $x > 0$).

C'est absurde, donc $\{x > 0, \forall y > 0, x < y\} = \emptyset$.

1. La définition par compréhension suppose de savoir où nous « piochons » les éléments auxquels s'applique la propriété.

Définition 1.2

Soient E et F deux ensembles.

On dit que E et F sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments.

$$E = F \iff \forall x \quad (x \in E \iff x \in F).$$

On dit que E est **inclus dans** F ,

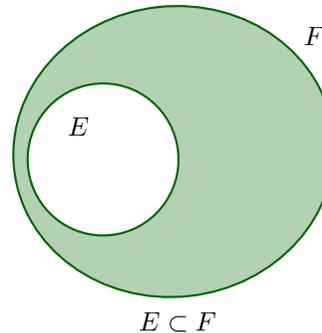
ou que F **contient** E ,

ou que E est **une partie** de F ,

ou que E est **un sous-ensemble** de F ,

si les éléments de E appartiennent tous à F .

$$E \subset F \iff \forall x \quad (x \in E \Rightarrow x \in F).$$



L'égalité entre deux ensembles correspond à une équivalence, l'inclusion traduit une implication.

Propriété 1.3 (Double inclusion)

$$E = F \iff (E \subset F \text{ et } F \subset E).$$

Explications

C'est simplement la propriété de double implication vue en logique. On utilise très souvent cette propriété pour montrer l'égalité de deux ensembles.

L'égalité correspond à une équivalence et chaque inclusion traduit une implication.

Méthode (Montrer une inclusion)

Pour montrer l'inclusion $A \subset B$, en général, on montre que tous les éléments de A sont aussi dans B .

Concrètement, on prend x quelconque dans A et on montre que $x \in B$.

Soit $x \in A$

\vdots

donc $x \in B$.

Donc $A \subset B$.

Exemple

Donner l'écriture en extension de l'ensemble

$$A = \left\{ x \in \mathbf{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbf{N}^*, 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \right\}$$

Sans utiliser le théorème des gendarmes

Solution :

On peut déjà chercher intuitivement à quoi va ressembler cet ensemble. Cela revient à chercher des conditions nécessaires sur les éléments de cet ensemble.

D'abord, on sait que $x \in A \Rightarrow x \geq 0$ ou en vocabulaire ensembliste, $A \subset \mathbf{R}_+$.

Ensuite, on voit que la suite $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbf{N}^*}$ tend vers 0 et que les éléments de A doivent être plus petits que tous les termes de cette suite.

Donc la seule possibilité est 0.

On cherche donc à montrer que $A = \{0\}$.

L'inclusion $\{0\} \subset A$ est évidente.

En effet si $x = 0$, alors $\forall n \in \mathbf{N}^*, \frac{1}{n} > 0$, donc $\frac{1}{n} \geq x \geq 0$.

Montrons l'inclusion réciproque, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbf{R}, x \in A \Rightarrow x = 0$.

Ici, la prémisse de l'implication est compliquée alors que le résultat de l'implication « $x = 0$ » est très simple à exprimer. On est donc tenté de raisonner par **contraposée**.

On cherche à montrer que si $x \neq 0$, alors $x \notin A$, c'est-à-dire que $\exists n \in \mathbf{N}^*$ tel que $x > \frac{1}{n}$ (puisque la condition $x \geq 0$ est vraie).

Posons donc $x > 0$ quelconque.

alors pour $n \in \mathbf{N}^*, x > \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{x}$ (car $n > 0$ et $x > 0$).

Donc si on pose n_0 le plus petit entier strictement supérieur à $\frac{1}{x}$ (il existe), alors $x > \frac{1}{n_0}$.

On a donc bien montré que $\exists n \in \mathbf{N}^*$, tel que $x > \frac{1}{n}$.

Donc $x \notin A$.

Ainsi par contraposée, $A \subset \{0\}$.

Donc par double inclusion

$$A = \{0\}$$

Remarque : l'utilisation du théorème des gendarmes simplifie la rédaction. Mais cela revient à cacher la difficulté sous le tapis. En effet, la démonstration du théorème des gendarmes requiert un raisonnement du type de celui que nous venons de conduire...

⚠ Ne pas confondre le signe \in et le signe \subset . Le signe \in indique que l'on pioche un élément dans un ensemble, alors que le signe \subset désigne une partie de l'ensemble : un sous-ensemble qui est inclus. Dans le premier cas, on « compare » un élément à un ensemble, dans le second, on compare deux ensembles entre eux.

Exemple

$$\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}, 5 \in \mathbf{R}, \{5\} \subset \mathbf{R}.$$

Définition 1.4

Soit E un ensemble, l'**ensemble des parties** de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Pour tout ensemble A , $A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$.

Exemple

Soit $E = \{1, \pi, 5\}$, décrire $\mathcal{P}(E)$.

Solution :

$$\mathcal{P}(E) = \left\{ \emptyset, \{1\}, \{\pi\}, \{5\}, \{1, \pi\}, \{1, 5\}, \{\pi, 5\}, E \right\}.$$

Remarques :

- $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble d'ensembles.
- Pour tout ensemble E , l'ensemble vide \emptyset et l'ensemble complet E appartiennent

à $\mathcal{P}(E)$.

- Si E est vide, alors $\mathcal{P}(E)$ est non vide. En effet $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$ ($\mathcal{P}(E)$ contient l'ensemble vide qui est un de ses éléments. Il n'est donc pas vide lui-même).

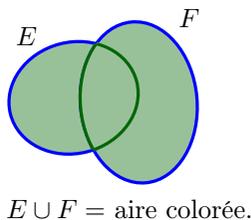
⚠ Si $a \in E$, $a \notin \mathcal{P}(E)$ (en général), par contre $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$.

2 OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES

Définition 2.1 (Réunion)

On appelle **réunion** de E et F , l'ensemble formé des éléments de E et des éléments de F

$$E \cup F = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ ou } x \in F\}.$$



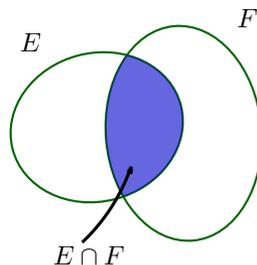
Exemple

$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \{-n\}_{n \in \mathbf{N}}.$$

Définition 2.2 (Intersection)

On appelle **intersection** de E et F , l'ensemble formé des éléments appartenant **à la fois** à E et à F

$$E \cap F = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ et } x \in F\}.$$



Exemple

Soient A et B deux ensembles, voici quelques relations triviales :

$$A \subset A \cup B, A \cap B \subset A, A \cap B \subset A \cup B.$$

$$E \in \mathcal{P}(A) \text{ et } E \subset B \Rightarrow E \subset A \cap B.$$

Exemple

Soient deux parties A et B de E telles que $A \cup B = A \cap B$. Montrer que $A = B$.

Solution :

On raisonne par double inclusion. On commence par montrer que $A \subset B$.

Pour cela on choisit $x \in A$ et on montre que $x \in B$.

Soit $x \in A$, par définition de l'union $x \in A \cup B$.

Donc par hypothèse, $x \in A \cap B$, donc $x \in B$ par définition de l'intersection.

Ceci est vrai pour tous les $x \in A$, donc $A \subset B$.

Or A et B jouent des rôles symétriques dans l'énoncé, on peut donc échanger A et B dans le raisonnement précédent.

Donc $B \subset A$. Donc par double inclusion : $A = B$.

Définition 2.3 (Ensembles disjoints)

Deux ensembles E et F sont dits **disjoints** si $E \cap F = \emptyset$, c'est-à-dire s'ils n'ont aucun élément commun.

Définition 2.4 (Complémentaire)

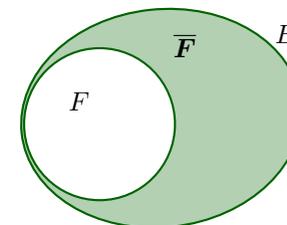
On appelle **complémentaire** de F dans E et on note

$$E \setminus F \text{ ou } \complement_E F \text{ ou } F^c \text{ ou } \overline{F}.$$

les éléments de E qui n'appartiennent pas à F .

C'est-à-dire $E \setminus F = \{x \in E \text{ tel que } x \notin F\}$.

$E \setminus F$ que l'on note aussi $E - F$ se nomme la **différence** entre E et F .



Définition 2.5 (Différences)

On appelle **différence** de A et B et on note $A \setminus B$, le complémentaire de A dans B .

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \cap \overline{B}.$$

Remarque : La différence n'est pas commutative, et la dénomination plus haut est donc potentiellement ambiguë telle qu'écrite : est-ce B que l'on soustrait à A ou le contraire.

On privilégiera donc des écritures sous la forme « A privé de B », « complémentaire de B dans A » par exemple.

Remarque : La notation \overline{F} suppose qu'il n'y ait pas d'ambiguïté sur l'ensemble E .

Exemple

$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ désigne les irrationnels (nombres réels qui ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux entiers).

$$\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}, \mathbf{R} \setminus \mathbf{R}_+ = \mathbf{R}_-.$$

Propriété 2.6 (Involutivité du complémentaire)

Soit A une partie d'un ensemble E .

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

On dit que le passage au complémentaire est **involutif**.

Preuve

C'est une double négation. ■

Propriété 2.7

Soient A et B deux parties de E .

$$A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}.$$

Preuve

C'est la simple expression ensembliste de la contraposée.

$$(x \in A \Rightarrow x \in B) \iff (x \notin B \Rightarrow x \notin A).$$

■

Théorème 2.8 (Formules de De Morgan)

Soit A et B des sous-ensembles de E ,

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Preuve

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\iff \neg(x \in A \vee x \in B) \iff \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \iff (x \notin A) \wedge (x \notin B) \\ &\iff x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

Pour le complémentaire de l'intersection, il suffit de remarquer que si on remplace A et B par leur complémentaire, on retrouve la relation avec l'union écrite dans l'autre sens. Les notations de complémentaires \overline{A} et A^c sont volontairement mélangées pour faciliter la lecture de la preuve.

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{\overline{\overline{A \cap B}}} && \text{(involutivité de la négation)} \\ &= \overline{\overline{A^c \cap B^c}} && \text{(relation précédente)} \\ &= \overline{A^c \cup B^c} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

On peut aussi démontrer la négation de l'intersection en repassant aux x comme pour l'union. ■

Rappelez-vous que le complémentaire échange l'union et l'intersection.

Remarque : Les propriétés vues pour le « **ou** » et pour le « **et** » logiques, sont valables pour l'union et l'intersection (qui en sont la traduction ensembliste).

Ainsi en est-il de l'associativité, de la commutativité et de la distributivité de l'une par rapport à l'autre.

Définition 2.9

On considère un ensemble non vide d'indices I , et pour tout $i \in I$, on définit un ensemble A_i .

- On appelle **réunion**² des A_i pour i décrivant I , l'ensemble des x qui appartiennent à au moins un A_i .

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \left\{ x \mid \exists i \in I, x \in A_i \right\}.$$

- On appelle **intersection** des A_i pour i décrivant I , l'ensemble des x qui appartiennent à la fois à tous les A_i .

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \left\{ x \mid \forall i \in I, x \in A_i \right\}.$$

Remarque : On peut étendre ces définitions dans le cas où I est vide.

- Pour la réunion, si $I = \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$.
- Pour l'intersection, si l'exercice se place dans un ensemble Ω de référence, alors pour $I = \emptyset$, $\bigcap_{i \in I} A_i = \Omega$. désigne l'ensemble complet.

Cela servira en probabilités.

Rappelez-vous que l'union correspond à \exists et que l'intersection correspond à \forall .

Exemple (Approfondissement)

Trouver à quoi sont égaux chacun de ces deux ensembles (l'écrire sous une forme très simple), et le démontrer.

$$U = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} [-n; n] \quad \text{et} \quad N = \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n} \right].$$

Solution :**Solution pour l'union :**

Pour pouvoir trouver intuitivement à quoi sont égaux ces ensembles, il est *nécessaire* de faire un schéma (mais est-ce suffisant ?)

On conjecture que $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} [-n; n] = \mathbf{R}$.

On le montre par double inclusion.

D'abord, $\forall n \in \mathbf{N}$, $[-n; n] \subset \mathbf{R}$, donc $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} [-n; n] \subset \mathbf{R}$.

L'inclusion réciproque est plus dure :

Soit $x \in \mathbf{R}$,

Supposons $x \geq 0$, si on pose $n_0 = [x] + 1$, où $[x]$ désigne la partie entière de x (le plus

2. On parle parfois plus simplement d'union.

grand entier inférieur à x), alors on a $x \in [-n_0, n_0]$.

donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $x \in [-n_0, n_0]$,

donc x est dans l'union $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} [-n; n]$.

De même si $x < 0$, (on prend alors $n_0 = \lfloor x \rfloor$) et le raisonnement est similaire, Ainsi,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad x \in \bigcup_{n \in \mathbf{N}} [-n; n].$$

Donc $\mathbf{R} \subset \bigcup_{n \in \mathbf{N}} [-n; n]$.

Donc par double inclusion,

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}} [-n; n] = \mathbf{R}.$$

Solution pour l'intersection :

On conjecture que $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right] = \{0\}$

La première inclusion est triviale : $\forall n \in \mathbf{N}^*, 0 \in \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$,

donc $\{0\} \subset \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$.

Réciproquement, on cherche à montrer que $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right] \subset \{0\}$.

En d'autres termes, que si x est dans l'intersection, alors $x = 0$:

On veut montrer que

$$\text{Si } \forall n \in \mathbf{N}^*, -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \quad \text{alors } x = 0.$$

Cela se montre par contraposée.

On suppose donc $x \neq 0$ et on cherche à trouver $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $x \notin \left[-\frac{1}{n_0}; \frac{1}{n_0}\right]$

Si par exemple $x > 0$, alors on pose $n_0 = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1$. Ainsi $n_0 > \frac{1}{x}$, et $x > \frac{1}{n_0}$.

Donc $x \notin \left[-\frac{1}{n_0}; \frac{1}{n_0}\right]$.

On fait de même si $x < 0$.

D'où le résultat voulu par contraposée.

Ainsi par double inclusion on obtient :

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right] = \{0\}.$$

Propriété 2.10

Soient A et $(A_i)_{i \in I}$ des ensembles.

- Si $\forall i \in I, A \subset A_i$, alors $A \subset \bigcap_{i \in I} A_i$.
- Si $\exists i \in I, A \subset A_i$, alors $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.
- Si $\forall i \in I, A_i \subset A$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \subset A$.
- Si $\exists i \in I, A_i \subset A$, alors $\bigcap_{i \in I} A_i \subset A$.

Propriété 2.11 (Distributivité)

Si $\{A_i\}_{i \in I}$, et B sont des ensembles, alors

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) \quad \text{et} \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B).$$

Preuve

Écrire de façon formelle les ensembles à partir des x en utilisant la définition 2.9. ■

Propriété 2.12 (Formules de De Morgan)

Si $\{A_i\}_{i \in I}$ sont des sous-ensembles de E , alors

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}.$$

Preuve

Écrire de façon formelle les ensembles à partir des x . ■

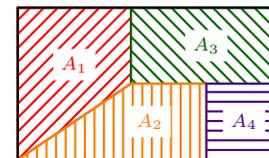
Comme cela a déjà été rappelé dans le chapitre sur les sommes :

Définition 2.13 (Partition)

Soit E un ensemble non vide.

Une **partition** de E est une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E telle que

- $\bigcup_{i \in I} A_i = E$,
- $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$,
- $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$.



Explications

En français, les $(A_i)_{i \in I}$ forment une partition de E si

- pour tout $x \in E$, x est élément d'un unique A_i .
- aucun A_i n'est vide.

Une partition n'est qu'une façon élégante de réaliser une disjonction des cas : on traite tous les x une et une seule fois.

Définition 2.14 (*Recouvrement disjoint*)

Soit E un ensemble non vide.

Un **recouvrement disjoint** de E est une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E telle que

- $\bigcup_{i \in I} A_i = E$,
- $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$,

C'est une partition à laquelle on peut ajouter des ensembles vides.

Cette notion sera utile en probabilités lorsque celle de partition est trop restrictive.

Remarque : On peut fusionner les deux dernières conditions en une seule :

$$\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \iff A_i \cap A_j = \emptyset.$$

3 PRODUIT CARTÉSIEN**Définition 3.1** (*Couples*)

Soient E et F deux ensembles,

On appelle **produit cartésien** de E et F et on note $E \times F$ l'ensemble des **couples** :

$$E \times F = \{(x, y) \text{ tel que } x \in E, y \in F\}.$$

Exemple

Lorsque l'on choisit un entier p et un réel x on peut noter $p \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}$ ou noter $(p, x) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$.

Notation

Lorsque les ensembles E et F sont les mêmes, au lieu de noter $E \times E$, on note E^2 par analogie avec un produit numérique.

Exemple

Pour désigner un couple d'entiers naturels p et q on note $(p, q) \in \mathbf{N}^2$.

Exemple

Tout point du plan peut être désigné de manière unique par deux coordonnées : l'abscisse x et l'ordonnée y . Ainsi les points du plans sont parfaitement décrits par des couples $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. C'est la raison pour laquelle on note le plan \mathbf{R}^2 .

Exemple

Représenter graphiquement le produit cartésien $\llbracket 1, 3 \rrbracket \times \llbracket 2, 3 \rrbracket$.

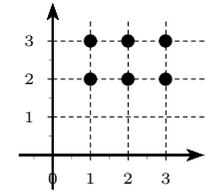
Solution :

C'est l'ensemble des couples

$$\{(1, 2); (1, 3); (2, 2); (2, 3); (3, 2); (3, 3)\}$$

La première coordonnée est prise dans $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ et la seconde dans $\llbracket 2, 3 \rrbracket$.

Géométriquement, si on place ces points dans le plan, avec la première coordonnée en abscisse et la seconde en ordonnée, on obtient la figure ci-contre.

**Définition 3.2** (*Triplets*)

Soient E, F et G trois ensembles, on appelle **produit cartésien** de E, F et G et on note $E \times F \times G$ l'ensemble des **triplets** :

$$E \times F \times G = \{(x, y, z) \text{ tel que } x \in E, y \in F, z \in G\}.$$

Exemple

L'espace à trois dimensions correspond à l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. L'espace est noté \mathbf{R}^3 .

Définition 3.3 (*Généralisation aux n-uplets*)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et E_1, E_2, \dots, E_n des ensembles.

On appelle **produit cartésien** de E_1, E_2, \dots, E_n l'ensemble des **n-uplets**

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \prod_{i=1}^n E_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ tel que } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in E_i\}.$$

Définition 3.4 (*Famille d'éléments*)

Soit I un ensemble appelé ensemble des **indices**, et E un ensemble.

Une **famille** $(x_i)_{i \in I}$ désigne une suite d'éléments de E indexés par I .

On note E^I l'ensemble des familles de E indexées par I .

Explications

C'est simplement une façon de désigner les x_i par leur indice i . On peut faire des familles indexées par

- $\llbracket 1; p \rrbracket$ ce sont les p -uplets.
- \mathbf{N} ce sont les suites : $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ désigne les suites réelles (à chaque indice dans \mathbf{N} , correspond un réel que l'on peut noter u_n par exemple).

⚠ Il ne faut pas confondre l'ensemble $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ et la famille (x_1, x_2, \dots, x_p) .

Dans une famille, les éléments ont un ordre, contrairement à un ensemble.

Ainsi, dans une famille, on peut avoir deux fois le même élément à des indices différents (les indices permettent de les différencier) alors que dans un ensemble, chaque élément

n'apparaît qu'une seule fois.

4 TRANSCRIPTION LOGIQUE/LANGAGE ENSEMBLISTE

Logique	Ensembles
Négation : $\neg p$	Complémentaire : \bar{A}
Conjonction et : $p \wedge q$	Intersection : $A \cap B$
Disjonction ou : $p \vee q$	Réunion : $A \cup B$
Implication : $p \Rightarrow q$	Inclusion : $A \subset B$
Équivalence : $p \Leftrightarrow q$	Égalité : $A = B$