# Ensembles

« Huit notes composent ensemble une seule harmonie. »
La République, livre X, Platon

## 1 Appartenance et inclusion

**Définition 1.1**

Un ensemble $E$ est une collection d'objets distincts appelés **éléments** de $E$.
Un **singleton** est un ensemble à un seul élément : $\{a\}$.
L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé **l'ensemble vide**.
Il est noté $\emptyset$ ou $\{\}$.

On peut définir un ensemble de deux manières : en extension et en compréhension.

- Définir un ensemble en **extension**, c'est donner la liste complète des éléments qui le composent.
- Définir un ensemble en **compréhension**, c'est le considérer comme l'ensemble des éléments qui vérifient une certaine propriété[1].

**Exemple**

L'ensemble $\{1, 2, \pi\}$ est défini en extension.
$\{x \in \mathbf{R} \,|\, \exists n \in \mathbf{N},\ x = 2^n\}$ est l'ensemble qui contient $1, 2, 2^2, 2^3 \cdots$, il est défini en compréhension. On peut aussi le définir en extension par $\left\{2^n,\ n \in \mathbf{N}\right\}$.

**Méthode** *(Montrer qu'un ensemble est vide)*

Pour montrer qu'un ensemble $A$ est vide, on raisonne souvent par l'absurde (on suppose qu'il existe un élément $x \in A$ et on montre que c'est absurde) :

> « Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in A$,
> alors, ...
> $\vdots$
> absurde, donc $A = \emptyset$. »

**Exemple**

Montrer que $\{x > 0,\ \forall y > 0, x < y\} = \emptyset$.
**Solution :**
Supposons par l'absurde qu'il existe $x$ dans l'ensemble.
Alors $x > 0$ et $\forall y > 0,\ x < y$.
le « $\forall$ » invite à particulariser $y$ : pour $y = \frac{x}{2}$, on a $y > 0$ et $y < x$ (car $x > 0$).
C'est absurde, donc $\{x > 0,\ \forall y > 0, x < y\} = \emptyset$.

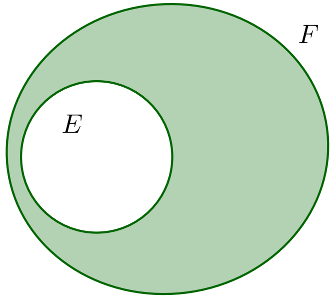
1. La définition par compréhension suppose de savoir où nous « piochons » les éléments auxquels s'applique la propriété.

**Définition 1.2**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.
On dit que $E$ et $F$ sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments.

$$E = F \iff \forall x \quad \big(x \in E \iff x \in F\big).$$

On dit que $E$ **est inclus dans** $F$,
ou que $F$ **contient** $E$,
ou que $E$ est **une partie** de $F$,
ou que $E$ est **un sous-ensemble** de $F$,
si les éléments de $E$ appartiennent tous à $F$.




$E \subset F$

$$E \subset F \iff \forall x \quad \big(x \in E \Rightarrow x \in F\big).$$

L'égalité entre deux ensembles correspond à une équivalence, l'inclusion traduit une implication.

**Propriété 1.3** *(Double inclusion)*

$$E = F \iff \big(E \subset F \textbf{ et } F \subset E\big).$$

## Explications

C'est simplement la propriété de double implication vue en logique. On utilise très souvent cette propriété pour montrer l'égalité de deux ensembles.
L'égalité correspond à une équivalence et chaque inclusion traduit une implication.

**Méthode** *(Montrer une inclusion)*

Pour montrer l'inclusion $A \subset B$, en général, on montre que tous les éléments de $A$ sont aussi dans $B$.
Concrètement, on prend $x$ quelconque dans $A$ et on montre que $x \in B$.

Soit $x \in A$
$\vdots$
donc $x \in B$.
Donc $A \subset B$.

## Exemple

Donner l'écriture en extension de l'ensemble

$$A = \left\{ x \in \mathbf{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbf{N}^*,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \right\}$$

*Sans utiliser le théorème des gendarmes*

**Solution :**
On peut déjà chercher intuitivement à quoi va ressembler cet ensemble. Cela revient à chercher des conditions nécessaires sur les éléments de cet ensemble.
D'abord, on sait que $x \in A \Rightarrow x \geqslant 0$ ou en vocabulaire ensembliste, $A \subset \mathbf{R}_+$.
Ensuite, on voit que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ tend vers 0 et que les éléments de $A$ doivent être plus petits que tous les termes de cette suite.
Donc la seule possibilité est 0.
On cherche donc à montrer que $A = \{0\}$.
L'inclusion $\{0\} \subset A$ est évidente.
En effet si $x = 0$, alors $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$, donc $\frac{1}{n} \geqslant x \geqslant 0$.
Montrons l'inclusion réciproque, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbf{R}$, $x \in A \Rightarrow x = 0$.
Ici, la prémisse de l'implication est compliquée alors que le résultat de l'implication « $x = 0$ » est très simple à exprimer. On est donc tenté de raisonner par **contraposée.**
On cherche à montrer que si $x \neq 0$, alors $x \notin A$, c'est-à-dire que $\exists n \in \mathbf{N}^*$ tel que $x > \frac{1}{n}$ (puisque la condition $x \geqslant 0$ est vraie).
Posons donc $x > 0$ quelconque.
alors pour $n \in \mathbf{N}^*$, $x > \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{x}$ (car $n > 0$ et $x > 0$).
Donc si on pose $n_0$ le plus petit entier strictement supérieur à $\frac{1}{x}$ (il existe), alors $x > \frac{1}{n_0}$.
On a donc bien montré que $\exists n \in \mathbf{N}^*$, tel que $x > \frac{1}{n}$.
Donc $x \notin A$.
Ainsi par contraposée, $A \subset \{0\}$.
Donc par double inclusion

$$A = \{0\}$$

*Remarque :* l'utilisation du théorème des gendarmes simplifie la rédaction. Mais cela revient à cacher la difficulté sous le tapis. En effet, la démonstration du théorème des gendarmes requiert un raisonnement du type de celui que nous venons de conduire...

⚠ Ne pas confondre le signe $\in$ et le signe $\subset$. Le signe $\in$ indique que l'on pioche un élément dans un ensemble, alors que le signe $\subset$ désigne une partie de l'ensemble : un sous-ensemble qui est inclus. Dans le premier cas, on « compare » un élément à un ensemble, dans le second, on compare deux ensembles entre eux.

## Exemple

$\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, $5 \in \mathbf{R}$, $\{5\} \subset \mathbf{R}$.

**Définition 1.4**

Soit $E$ un ensemble, l'**ensemble des parties** de $E$ est noté $\mathcal{P}(E)$.
Pour tout ensemble $A$, $\quad A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$.

## Exemple

Soit $E = \{1, \pi, 5\}$, décrire $\mathcal{P}(E)$.
**Solution :**

$$\mathcal{P}(E) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{\pi\}, \{5\}, \{1,\pi\}, \{1,5\}, \{\pi,5\}, E\Big\}.$$

*Remarques :*

- $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble d'ensembles.
- Pour tout ensemble $E$, l'ensemble vide $\emptyset$ et l'ensemble complet $E$ appartiennent

à $\mathcal{P}(E)$.

- Si $E$ est vide, alors $\mathcal{P}(E)$ est non vide. En effet $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$ ($\mathcal{P}(E)$ contient l'ensemble vide qui est un de ses éléments. Il n'est donc pas vide lui-même).

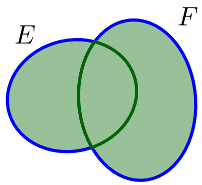
⚠ Si $a \in E$, $a \notin \mathcal{P}(E)$ (en général), par contre $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$.

## 2 Opérations sur les ensembles

**Définition 2.1** *(Réunion)*

On appelle **réunion** de $E$ et $F$, l'ensemble formé des éléments de $E$ et des éléments de $F$

$$E \cup F = \{x \text{ tel que } x \in E \textbf{ ou } x \in F\}.$$




$E \cup F =$ aire colorée.

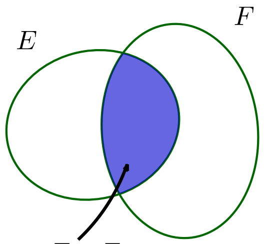
**Exemple**

$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \{-n\}_{n \in \mathbf{N}}$.

**Définition 2.2** *(Intersection)*

On appelle **intersection** de $E$ et $F$, l'ensemble formé des éléments appartenant **à la fois** à $E$ et à $F$

$$E \cap F = \{x \text{ tel que } x \in E \textbf{ et } x \in F\}.$$




$E \cap F$

**Exemple**

Soient $A$ et $B$ deux ensembles, voici quelques relations triviales :
$A \subset A \cup B$, $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset A \cup B$.
$E \in \mathcal{P}(A)$ et $E \subset B \ \Rightarrow\ E \subset A \cap B$.

**Exemple**

Soient deux parties $A$ et $B$ de $E$ telles que $A \cup B = A \cap B$. Montrer que $A = B$.

**Solution :**
On raisonne par double inclusion. On commence par montrer que $A \subset B$.
Pour cela on choisit $x \in A$ et on montre que $x \in B$.
Soit $x \in A$, par définition de l'union $x \in A \cup B$.
Donc par hypothèse, $x \in A \cap B$, donc $x \in B$ par définition de l'intersection.
Ceci est vrai pour tous les $x \in A$, donc $A \subset B$.
Or $A$ et $B$ jouent des rôles symétriques dans l'énoncé,
on peut donc échanger $A$ et $B$ dans le raisonnement précédent.
Donc $B \subset A$. Donc par double inclusion : $A = B$.

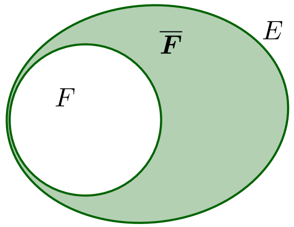
**Définition 2.3** *(Ensembles disjoints)*

Deux ensembles $E$ et $F$ sont dits **disjoints** si $E \cap F = \emptyset$, c'est-à-dire s'ils n'ont aucun élément commun.

**Définition 2.4** *(Complémentaire)*

On appelle **complémentaire** de $F$ dans $E$ et on note

$$E \setminus F \text{ ou } \complement_E F \text{ ou } F^c \text{ ou } \overline{F}.$$




les éléments de $E$ qui n'appartiennent pas à $F$.
C'est-à-dire $E \setminus F = \{x \in E \text{ tel que } x \notin F\}$.
$E \setminus F$ que l'on note aussi $E - F$ se nomme la **différence** entre $E$ et $F$.

**Définition 2.5** *(Différences)*

On appelle **différence** de $A$ et $B$ et on note $A \setminus B$, le complémentaire de $A$ dans $B$.

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \cap \overline{B}.$$

*Remarque :* La différence n'est pas commutative, et la dénomination plus haut est donc potentiellement ambigüe telle qu'écrite : est-ce $B$ que l'on soustrait à $A$ ou le contraire.
On privilégira donc des écritures sous la forme « $A$ privé de $B$ », « complémentaire de $B$ dans $A$ » par exemple.

*Remarque :* La notation $\overline{F}$ suppose qu'il n'y ait pas d'ambigüité sur l'ensemble $E$.

**Exemple**

$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ désigne les irrationnels (nombres réels qui ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux entiers).
$\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$, $\mathbf{R} \setminus \mathbf{R}_+ = \mathbf{R}_-^*$.

**Propriété 2.6** *(Involutivité du complémentaire)*

Soit $A$ une partie d'un ensemble $E$.

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

On dit que le passage au complémentaire est **involutif**.

**Preuve**

C'est une double négation. ■

**Propriété 2.7**

Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$.

$$A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}.$$

**Preuve**

C'est la simple expression ensembliste de la contraposée.

$$(x \in A \Rightarrow x \in B) \iff (x \notin B \Rightarrow x \notin A).$$

■

**Théorème 2.8** *(Formules de De Morgan)*

Soit $A$ et $B$ des sous-ensembles de $E$,

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

**Preuve**

$$x \in \overline{A \cup B} \iff \neg(x \in A \vee x \in B) \iff \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \iff (x \notin A) \wedge (x \notin B)$$
$$\iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

Pour le complémentaire de l'intersection, il suffit de remarquer que si on remplace $A$ et $B$ par leur complémentaire, on retrouve la relation avec l'union écrite dans l'autre sens. *Les notations de complémentaires $\overline{A}$ et $A^c$ sont volontairement mélangées pour faciliter la lecture de la preuve.*

$$\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \overline{\overline{(A^c \cap B^c)}} && \text{(involutivité de la négation)}\\
&= \overline{(A^c \cup B^c)} && \text{(relation précédente)}\\
&= \overline{\overline{A^c \cup B^c}} = \overline{A} \cup \overline{B}
\end{aligned}$$

On peut aussi démontrer la négation de l'intersection en repassant aux $x$ comme pour l'union. ■

**Rappelez-vous** que le complémentaire échange l'union et l'intersection.

*Remarque :* Les propriétés vues pour le « **ou** » et pour le « **et** » logiques, sont valables pour l'union et l'intersection (qui en sont la traduction ensembliste).

Ainsi en est-il de l'associativité, de la commutativité et de la distributivité de l'une par rapport à l'autre.

**Définition 2.9**

On considère un ensemble non vide d'indices $I$, et pour tout $i \in I$, on définit un ensemble $A_i$.

- On appelle **réunion**[2]**des** $A_i$ pour $i$ *décrivant* $I$, l'ensemble des $x$ qui appartiennent à au moins un $A_i$.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \left\{x \middle| \exists i \in I, x \in A_i\right\}.$$

- On appelle **intersection des** $A_i$ pour $i$ *décrivant* $I$, l'ensemble des $x$ qui appartiennent à la fois à tous les $A_i$.

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \left\{x \middle| \forall i \in I, x \in A_i\right\}.$$

*Remarque :* On peut étendre ces définitions dans le cas où $I$ est vide.

- Pour la réunion, si $I = \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$.
- Pour l'intersection, si l'exercice se place dans un ensemble $\Omega$ de référence, alors pour $I = \emptyset$, $\bigcap_{i \in I} A_i = \Omega$. désigne l'ensemble complet.
  Cela servira en probabilités.

**Rappelez-vous** que l'union correspond à $\exists$ et que l'intersection correspond à $\forall$.

**Exemple** *(Approfondissement)*

Trouver à quoi sont égaux chacun de ces deux ensembles (l'écrire sous une forme très simple), et le démontrer.

$$U = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} [-n; n] \qquad \text{et} \qquad N = \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right].$$

**Solution :**

**Solution pour l'union :**

Pour pouvoir trouver intuitivement à quoi sont égaux ces ensembles, il est *nécessaire* de faire un schéma (mais est-ce suffisant ?)

On conjecture que $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} [-n; n] = \mathbf{R}$.

On le montre par double inclusion.

D'abord, $\forall n \in \mathbf{N}$, $[-n, n] \subset \mathbf{R}$, donc $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} [-n; n] \subset \mathbf{R}$.

L'inclusion réciproque est plus dure :

Soit $x \in \mathbf{R}$,

Supposons $x \geqslant 0$, si on pose $n_0 = \lfloor x \rfloor + 1$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x$ (le plus

2. On parle parfois plus simplement d'union.

grand entier inférieur à $x$ ), alors on a $x \in [-n_0, n_0]$.
donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $x \in [-n_0, n_0]$,
donc $x$ est dans l'union $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} [-n; n]$.
De même si $x < 0$, (on prend alors $n_0 = \lfloor x \rfloor$) et le raisonnement est similaire,
Ainsi,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad x \in \bigcup_{n\in\mathbf{N}} [-n; n].$$

Donc $\mathbf{R} \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} [-n; n]$.
Donc par double inclusion,

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} [-n; n] = \mathbf{R}.$$

**Solution pour l'intersection :**
On conjecture que $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right] = \{0\}$
La première inclusion est triviale : $\forall n \in \mathbf{N}^*, 0 \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$,
donc $\{0\} \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$.
Réciproquement, on cherche à montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right] \subset \{0\}$.
En d'autres termes, que si $x$ est dans l'intersection, alors $x = 0$ :
On veut montrer que

$$\text{Si} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \ -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{alors} \quad x = 0.$$

Cela se montre par contraposée.
On suppose donc $x \neq 0$ et on cherche à trouver $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $x \notin \left[-\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}\right]$
Si par exemple $x > 0$, alors on pose $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1$. Ainsi $n_0 > \frac{1}{x}$, et $x > \frac{1}{n_0}$.
Donc $x \notin \left[-\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}\right]$.
On fait de même si $x < 0$.
D'où le résultat voulu par contraposée.
Ainsi par double inclusion on obtient :

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right] = \{0\}.$$

**Propriété 2.10**

Soient $A$ et $(A_i)_{i\in I}$ des ensembles.

- Si $\forall i \in I$, $A \subset A_i$, alors $A \subset \bigcap_{i\in I} A_i$.
- Si $\exists i \in I$, $A \subset A_i$, alors $A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.
- Si $\forall i \in I$, $A_i \subset A$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i \subset A$.
- Si $\exists i \in I$, $A_i \subset A$, alors $\bigcap_{i\in I} A_i \subset A$.

**Propriété 2.11** *(Distributivité)*

Si $\{A_i\}_{i\in I}$, et $B$ sont des ensembles, alors

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B) \quad \text{et} \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B).$$

**Preuve**
Écrire de façon formelle les ensembles à partir des $x$ en utilisant la définition 2.9. ■

**Propriété 2.12** *(Formules de De Morgan)*

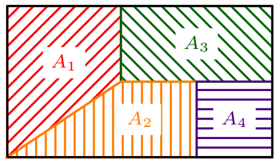
Si $\{A_i\}_{i\in I}$ sont des sous-ensembles de $E$, alors

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

**Preuve**
Écrire de façon formelle les ensembles à partir des $x$. ■
Comme cela a déjà été rappelé dans le chapitre sur les sommes :

**Définition 2.13** *(Partition)*

Soit $E$ un ensemble non vide.
Une **partition** de $E$ est une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de $E$ telle que




- $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = E$,
- $\forall (i, j) \in I^2, \ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$,
- $\forall i \in I, \ A_i \neq \emptyset$.

**Explications**
En français, les $(A_i)_{i\in I}$ forment une partition de $E$ si

- pour tout $x \in E$, $x$ est élément d'un unique $A_i$.
- aucun $A_i$ n'est vide.

Une partition n'est qu'une façon élégante de réaliser une disjonction des cas : on traite tous les $x$ une et une seule fois.

**Définition 2.14** *(Recouvrement disjoint)*

Soit $E$ un ensemble non vide.
Un **recouvrement disjoint** de $E$ est une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de $E$ telle que

- $\bigcup_{i\in I} A_i = E$,
- $\forall (i,\, j) \in I^2,\, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$,

C'est une partition à laquelle on peut ajouter des ensembles vides.

Cette notion sera utile en probabilités lorsque celle de partition est trop restrictive.

*Remarque :* On peut fusionner les deux dernières conditions en une seule :

$$\forall (i,\, j) \in I^2,\, i \neq j \iff A_i \cap A_j = \emptyset.$$

## 3 Produit cartésien

**Définition 3.1** *(Couples)*

Soient $E$ et $F$ deux ensembles,
On appelle **produit cartésien** de $E$ et $F$ et on note $E\times F$ l'ensemble des **couples** :

$$E \times F = \big\{(x, y) \text{ tel que } x \in E,\, y \in F\big\}.$$

**Exemple**

Lorsque l'on choisit un entier $p$ et un réel $x$ on peut noter $p \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}$ ou noter $(p, x) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$.

**Notation**

Lorsque les ensembles $E$ et $F$ sont les mêmes, au lieu de noter $E\times E$, on note $E^2$ par analogie avec un produit numérique.

**Exemple**

Pour désigner un couple d'entiers naturels $p$ et $q$ on note $(p, q) \in \mathbf{N}^2$.

**Exemple**

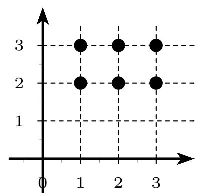
Tout point du plan peut être désigné de manière unique par deux coordonnées : l'abscisse $x$ et l'ordonnée $y$. Ainsi les points du plans sont parfaitement décrits par des couples $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. C'est la raison pour laquelle on note le plan $\mathbf{R}^2$.

**Exemple**

Représenter graphiquement le produit cartésien $[\![1, 3]\!] \times [\![2, 3]\!]$.

**Solution :**
C'est l'ensemble des couples

$$\{(1, 2); (1, 3); (2, 2); (2, 3); (3, 2); (3, 3)\}$$




La première coordonnée est prise dans $[\![1, 3]\!]$ et la seconde dans $[\![2, 3]\!]$.
Géométriquement, si on place ces points dans le plan, avec la première coordonnée en abscisse et la seconde en ordonnée, on obtient la figure ci-contre.

**Définition 3.2** *(Triplets)*

Soient $E, F$ et $G$ trois ensembles, on appelle **produit cartésien** de $E, F$ et $G$ et on note $E \times F \times G$ l'ensemble des **triplets** :

$$E \times F \times G = \big\{(x, y, z) \text{ tel que } x \in E,\, y \in F,\, z \in G\big\}.$$

**Exemple**

L'espace à trois dimensions correspond à l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.
L'espace est noté $\mathbf{R}^3$.

**Définition 3.3** *(Généralisation aux n-uplets)*

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et $E_1, E_2, \cdots E_n$ des ensembles.
On appelle **produit cartésien** de $E_1, E_2, \cdots E_n$ l'ensemble des **n-uplets**

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \prod_{i=1}^{n} E_i = \big\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \ \text{ tel que } \ \forall i \in [\![1, n]\!],\, x_i \in E_i\big\}.$$

**Définition 3.4** *(Famille d'éléments)*

Soit $I$ un ensemble appelé ensemble des **indices**, et $E$ un ensemble.

Une **famille** $(x_i)_{i\in I}$ désigne une suite d'éléments de $E$ indexés par $I$.

On note $E^I$ l'ensemble des familles de $E$ indexées par $I$.

**Explications**

C'est simplement une façon de désigner les $x_i$ par leur indice $i$. On peut faire des familles indexées par

- $[\![1; p]\!]$ ce sont les p-uplets.
- $\mathbf{N}$ ce sont les suites : $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ désigne les suites réelles (à chaque indice dans $\mathbf{N}$, correspond un réel que l'on peut noter $u_n$ par exemple).

⚠ Il ne faut pas confondre l'ensemble $\{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$ et la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$.

Dans une famille, les éléments ont un ordre, contrairement à un ensemble.
Ainsi, dans une famille, on peut avoir deux fois le même élément à des indices différents (les indices permettent de les différencier) alors que dans un ensemble, chaque élément

n'apparaît qu'une seule fois.

## 4 Transcription logique/langage ensembliste

| **Logique** | **Ensembles** |
|---|---|
| Négation : $\neg p$ | Complémentaire : $\overline{A}$ |
| Conjonction et : $p \wedge q$ | Intersection : $A \cap B$ |
| Disjonction ou : $p \vee q$ | Réunion : $A \cup B$ |
| Implication : $p \Rightarrow q$ | Inclusion : $A \subset B$ |
| Équivalence : $p \iff q$ | Égalité : $A = B$ |