Matrices

« **Morpheus :** Unfortunately, no one can be told what The Matrix is.
You'll have to see it for yourself. »
The Matrix

Notation : Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1 Calcul matriciel

Cette première partie se contente de définir ce qu'est une matrice et les différentes opérations que l'on peut réaliser avec : somme, produit avec un nombre, produit entre matrices..

A L'ensemble $\mathscr{M}_{np}(\mathbf{K})$

Définition 1.1 *(Matrice)*

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
Une **matrice** à n lignes et p colonnes est une famille d'éléments de $\mathbf{K}$ indicée par les couples $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.
On note

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Les $a_{i,j}$ sont appelés les **coefficients** de la matrice A.
On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbf{K}$.

Explications
$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ représente l'ensemble des systèmes homogènes à n équations et p inconnues dans $\mathbf{K}$.

Définition 1.2 *(Matrice nulle)*

On appelle **matrice nulle** et on note $0_{n,p}$ ou 0 s'il n'y a pas de risque de confusion, la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Définition 1.3 *(Matrices ligne et colonne)*

- Si $p \geqslant 1$ et $n = 1$, alors A est une matrice **ligne** (ou un *vecteur ligne*) :
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_p \end{pmatrix}.$$
En général, on l'identifie au p-uplet
$$A = (a_1\,, a_2\,, a_3\,, \cdots\,, a_p).$$
- Si $p = 1$ et $n \geqslant 1$, alors A est une matrice **colonne** (ou un *vecteur colonne*) :
$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Remarque : La terminologie « vecteur » sera précisée avec les espaces vectoriels.

B Addition matricielle

Définition 1.4 *(Addition matricielle)*

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
On définit alors la matrice somme par $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$:
$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \cdots & a_{2,p}+b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & a_{n,2}+b_{n,2} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Explications
On fait simplement la somme, coefficient par coefficient.
Bien sûr, cela requiert que les deux matrices aient **la même dimension** $n \times p$.

Définition 1.5 *(Matrice opposée)*

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
On appelle **matrice opposée** de A et on note $-A$ la matrice $(-a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$.

Explications
Ainsi, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $A + (-A) = 0$. Cette définition permet d'obtenir facilement la différence de deux matrices : $A - B = A + (-B)$.

La propriété suivante permet de s'assurer que « tout se passe bien » pour l'addition, un peu à l'image de l'addition dans $\mathbf{Z}$.
Cette liste de propriétés vérifie que l'opération « $+$ » donne une structure de groupe sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$: tout ceci sera plus clair après le chapitre sur les structure algébriques.

Propriété 1.6

La somme est une opération

- *Interne :* si $(A, B) \in (\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}))^2$ alors $A + B \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$.
- *Associative :* si $(A, B, C) \in (\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}))^3$ alors $(A + B) + C = A + (B + C)$.
(justifie l'absence de parenthèses)
- *Admet* $0_{n,p}$ *pour élément neutre :*
si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ alors $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$.
- *Tout élément admet un opposé :*
si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, alors $(-A) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $A + (-A) = 0_{n,p}$.
- *Commutative :* si $(A, B) \in (\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}))^2$ alors $A + B = B + A$.

$\to$ $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +)$ est un groupe commutatif.

C Multiplication par les scalaires

Définition 1.7

Soient $\lambda \in \mathbf{K}$ (un **scalaire**) et $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
On définit la matrice $\lambda \cdot A$ ou plus simplement λA par $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$.

Explications
On multiplie tous les coefficients de la matrice par λ.
On remarque que cette multiplication *externe* est cohérente avec l'addition :
Si $n \in \mathbf{N}$ alors $nA = A + A + \cdots + A$ (n fois).

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 3 & 3 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Propriété 1.8

La multiplication *externe* [1] « . » vérifie

- $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $1 \cdot A = A$.
- *Associative :* $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $(\lambda \times \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$
- *Distributive par rapport à + (scalaires) :*
  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $(\lambda + \mu).A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$.
- *Distributive par rapport à + (matrices) :*
  $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}))^2$, $\lambda \cdot (A + B) = \lambda.A + \lambda \cdot B$.

$\to \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel (sera vu plus tard dans l'année).

Définition 1.9 *(Combinaison linéaire)*

Soient $A_1, A_2, \cdots, A_m$, m matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Une *combinaison linéaire* de ces matrices est une matrice obtenue sous la forme

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k A_k$$

où $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) \in \mathbf{K}^m$.

Propriété 1.10 *(Stabilité par combinaison linéaire)*

Toute combinaison linéaire de matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est bien une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Preuve

On sait que tout produit de matrice par un scalaire est encore une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et que la somme de deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est encore une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
On en déduit le résultat par récurrence sur le nombre de termes dans la somme. ■

D Matrices élémentaires

Les matrices élémentaires peuvent être vues comme les briques élémentaires naturelles à partir desquelles toutes les autres matrices sont construites : chaque matrice élémentaire sert à identifier un coefficient, parmi les $n \times p$ que contient la matrice.

Définition 1.11 *(Symbole de Kronecker)*

$\delta_{i,j}$ est appelé le **symbole de Kronecker**, il vaut 1 pour $i = j$ et 0 si $i \neq j$.

1. On dit que la multiplication est externe, parce qu'on multiplie une matrice par un élément qui n'est pas une matrice, mais un scalaire.

Exemple

$\delta_{2,3} = 0$, mais $\delta_{3,3} = 1$.

Définition 1.12

On note E_{i_0,j_0} la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice i_0, j_0 qui vaut 1.

$$E_{i_0,j_0} = (\delta_{k,i_0}\delta_{\ell,j_0})_{k,\ell} = \begin{array}{cc} \begin{array}{r} j_0^{\text{ème}}\text{colonne} \\ \downarrow \qquad \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow i_0^{\text{ème}}\text{ligne} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

La notation E_{i_0,j_0} n'a rien d'officiel.

Explications

Dans toutes les notations, il faut toujours bien distinguer les indices qui sont « fixes » de ceux qui « bougent ».
Ici, i_0, j_0 sont deux nombres fixes qui permettent de définir la matrice.
k, ℓ sont les indices qui « bougent » et nous permettent de parcourir tous les coefficients de la matrice.
Il faut comprendre ainsi cette notation :
• Tant que $k \neq i_0$, δ_{k,i_0} prend la valeur 0 : le coefficient est donc nul.
Ainsi les coefficients de toutes les lignes $k \neq i_0$ sont nuls.
Le premier symbole de Kronecker sert à « sélectionner » la ligne i_0.
• Sur la ligne $k = i_0$, tant que $\ell \neq j_0$, le coefficient est nul.
Les coefficients sont donc tous nuls, sauf celui de la colonne $\ell = j_0$.
Le second symbole de Kronecker sert à « sélectionner » la colonne j_0.
• Conclusion : tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indices (i_0, j_0) qui vaut 1.

Exemple

Toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ s'écrit comme combinaison linéaire des matrices élémentaires.
En effet, si on écrit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$, alors

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j}.$$

E Multiplication entre matrices

La multiplication coefficient par coefficient des matrices n'est pas l'opération intéressante ici.

il s'agit plutôt de construire une multiplication qui s'accorde avec les méthodes de résolution de systèmes.

Définition 1.13

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$.
On définit la **matrice produit** $A \times B$ ou $AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ par

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}.$$

Méthode

Pour visualiser le calcul, on écrit (au brouillon) :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{p,1} \end{matrix}} & \cdots & \begin{matrix} b_{1,q} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{p,q} \end{matrix} \end{pmatrix} \\ & \downarrow \\ \begin{pmatrix} \boxed{a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \cdots \quad a_{1,p}} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n,1} \quad a_{n,2} \quad \cdots \quad a_{n,p} \end{pmatrix} \rightarrow & \begin{pmatrix} \boxed{\sum_{k=1}^{p} a_{1,k} b_{k,1}} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{1,k} b_{k,q} \\ \vdots & \vdots & \\ \sum_{k=1}^{p} a_{n,k} b_{k,1} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{n,k} b_{k,q} \end{pmatrix} \end{array}.$$

⚠ Les deux matrices ne sont pas de même taille. Il faut multiplier une matrice $n \times p$ avec une matrice $p \times q$ pour obtenir une matrice $n \times q$.
Les coefficients de AB sont combinaisons linéaires des coefficients de A et de B.

Explications

Pour comprendre l'intérêt de cette multiplication, il faut revenir aux systèmes linéaires :

$$\left\{\begin{array}{llllll} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\cdots & +a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\cdots & +a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & +a_{n,2}x_2 & +\cdots & +a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right..$$

Si on pose les matrices suivantes :

$$A = (a_{i,j})_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

on a alors

$$AX = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\cdots & +a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\cdots & +a_{2,p}x_p \\ \vdots & & & \\ a_{n,1}x_1 & +a_{n,2}x_2 & +\cdots & +a_{n,p}x_p \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système, c'est donc résoudre l'équation d'inconnue X : $AX = B$.
On vient de transformer un système de n équations à p inconnues, en un simple système linéaire à une seule inconnue.
Si on travaillait dans $\mathbf{R}$, ou $\mathbf{C}$, il suffirait de diviser l'équation par a (s'il est non nul) pour obtenir x. Malheureusement, ce n'est pas aussi facile avec les matrices car en général on ne peut pas *diviser* par A, c'est-à-dire multiplier par l'inverse A^{-1}, car cette matrice inverse n'existe pas en général. Et même quand cette matrice existe, elle est difficile à calculer. Ce sera un des problèmes majeurs de ce chapitre.

Dans ce cas où X est une matrice colonne, on voit que $B = AX$ est combinaison linéaire des colonnes de A.
En effet, on peut écrire $A = (C_1|C_2|\cdots|C_p)$ où C_i est la $i-$ème colonne de A. Et on obtient donc

$$B = \sum_{i=1}^{p} x_i C_i.$$

On en déduit que :

le système $AX = B$ est **compatible** si, et seulement si B est combinaison linéaire des colonnes de A.

Propriété 1.14

La multiplication matricielle est

- *Associative :* $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
- *Bilinéaire :*
  - *Linéaire à gauche :* $(A + \lambda A') \times B = A \times B + \lambda A' \times B$.
  - *Linéaire à droite :* $A \times (B + \lambda B') = A \times B + \lambda A \times B'$.

avec $(A, A') \in (\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}))^2$, et $(B, B') \in (\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K}))^2$, et $C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

⚠ Le produit matriciel n'est **pas commutatif.**
D'une part, cela n'a aucun sens en raison des tailles des matrices. Si le produit matriciel AB existe, en général BA n'existe pas car les tailles des matrices ne sont pas compatibles.
Et même pour les matrices carrées où ce problème disparait, le produit n'est en général pas commutatif.

Exemple

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer AB et BA.
Solution :
$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $AB \neq BA$: le produit n'est pas commutatif.

⚠ On peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$.
La phrase apprise en collège « un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul » est fausse avec les matrices.
Dans une équation avec un produit on ne pourra donc **pas simplifier** par A (sauf si A est inversible, ce qui sera vu plus loin).

Exemple

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$.
Calculer AB et AC.
Solution :
$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AC$.

$$AB = 0 \not\Rightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)$$
$$AB = AC \not\Rightarrow B = C.$$

Exemple *(À connaître)*

Calculer $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$ avec $E_{i,\,j} \in \mathscr{M}_{n,\,p}(\mathbf{K})$ et $E_{k,\,\ell} \in \mathscr{M}_{p,\,q}(\mathbf{K})$.
Solution :
$E_{i,\,j} \times E_{k,\,\ell} \in \mathscr{M}_{n,\,q}(\mathbf{K})$.
$\forall (r,\, s) \in [\![1,\, n]\!] \times [\![1,\, p]\!]$,

$$(E_{i,\,j}E_{k,\,\ell})_{r,\,s} = \sum_{t=1}^{p} (E_{i,\,j})_{r,\,t}\,(E_{k,\,\ell})_{t,\,s} = \sum_{t=1}^{p} \delta_{i,\,r}\delta_{j,\,t}\delta_{k,\,t}\delta_{\ell,\,s}.$$

Pour $j \neq k$ le coefficient est toujours nul car t ne peut être à la fois égal à j et k, ainsi $\delta_{j,\,t}\delta_{k,\,t} = 0$.
Donc pour $j \neq k$

$$E_{i,\,j}E_{k,\,\ell} = 0.$$

Pour $k = j$, alors tous les termes dans la somme sont nuls, sauf pour $t = j = k$.

$$(E_{i,\,j}E_{k,\,\ell})_{r,\,s} = \sum_{t=1}^{p} \delta_{i,\,r}\delta_{j,\,t}\delta_{j,\,t}\delta_{\ell,\,s} = \delta_{i,\,r}\delta_{\ell,\,s}.$$

Donc :

$$E_{i,\,j}E_{j,\,\ell} = E_{i,\,\ell}.$$

Ce résultat est à connaître.

F Transposée d'une matrice

Dans cette partie, on notera souvent $A_{i,j}$ le coefficient de A d'indice i, j.

Définition 1.15 *(Transposée)*

Soit la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, alors on note A^T la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ telle que

$$\forall (j, i) \in [\![1,\, p]\!] \times [\![1,\, n]\!], \qquad \left(A^T\right)_{j,i} = A_{i,j}.$$

A^T est **la transposée** de la matrice A.

⚠ On change d'espace de matrice : si la matrice A est de taille $n \times p$ alors la matrice A^T est de taille $p \times n$.
Traditionnellement, on notait la transposée A^T en France, il se peut que cette notation apparaisse encore ici ou là...

Méthode

Cela revient à faire une symétrie suivant une diagonale virtuelle de la matrice : on échange les lignes et les colonnes.
Par exemple pour la transposée d'une matrice $2 \times p$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1,p} & a_{2,p} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \end{pmatrix}$$

Exemple

Transposée de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -7 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 8 \\ 3 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Propriété 1.16 *(Propriétés de la transposition)*

Pour A, B des matrices de tailles compatibles (selon l'opération) et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$,

1. *linéarité :* $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$.
2. *involutivité :* $\left(A^T\right)^T = A$.
3. *produit :* $(AB)^T = B^T A^T$.

⚠ La transposition échange l'ordre d'un produit.

Preuve

1. 2. immédiat
3. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. D'un côté, $\left((AB)^T\right)_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{j,k} b_{k,i}$.

   D'un autre côté, $\left(B^T A^T\right)_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} (B^T)_{i,k} (A^T)_{k,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{k,i} a_{j,k} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{j,k} b_{k,i}$.

   Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $\quad \left((AB)^T\right)_{i,j} = \left(B^T A^T\right)_{i,j}$. D'où le résultat voulu. ■

Exemple

Soit $n \geqslant 1$, pour $i \in [\![1,\, n]\!]$, on note U_i la matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,\,1}(\mathbf{K})$ qui possède des zéros partout sauf à la ligne i avec le coefficient 1.

$$U_i = (\delta_{k,\,i})_{k \in [\![1,\,n]\!]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Pour tout $(i,\, j) \in [\![1,\, n]\!]^2$, $E_{i,\,j} = U_i {U_j}^T$.
2. Pour tout $(i,\, j) \in [\![1,\, n]\!]^2$, ${U_i}^T U_j = \delta_{i,\,j}$.
3. On en déduit que pour tout $(i,\, j,\, k,\, \ell) \in [\![1,\, n]\!]^4$, $E_{i,\,j} E_{k,\,\ell} = \delta_{j,\,k} E_{i,\,\ell}$.

Solution :

1. $\forall (p,\, q) \in [\![1,\, n]\!]$, $\left(U_i {U_j}^T\right)_{p,\,q} = (\delta_{p,\,i} \delta_{j,\,q})_{p,\,q} = E_{i,\,j}$.
2. ${U_i}^T U_j = \delta_{i,\,j}$ par définition du produit matriciel.
3. $E_{i,\,j} E_{k,\,\ell} = U_i {U_j}^T U_k {U_\ell}^T = \delta_{j,\,k} U_i U_\ell^T = \delta_{j,\,k} E_{i,\,\ell}$.

2 Matrices carrées

L'avantage des matrices carrées est que l'on peut faire toutes les opérations matricielles voulues entre elles (somme, produit, transposition...) et que le résultat est alors une matrice carrée qui a la même taille.

A L'algèbre des matrices carrées

Définition 2.1 *(Matrices carrées)*

On note $\mathscr{M}_n(\mathbf{K}) = \mathscr{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices carrées **d'ordre** n dans $\mathbf{K}$. Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, les **coefficients diagonaux** de la matrice sont ceux qui apparaissent sur la diagonale : $a_{i,i}$.

$$A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{1,1}} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \boxed{a_{2,2}} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \boxed{a_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

- Si $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ alors A est une matrice **diagonale**.

$$D = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & (0) \\ & a_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

- Si $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$ alors A est une matrice **triangulaire supérieure**.

$$A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ (0) & & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

- Si $a_{i,j} = 0$ pour $i < j$ alors A est une matrice **triangulaire inférieure**.

$$A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & (0) \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Lorsque les coefficients diagonaux sont aussi nuls, on parle de matrice triangulaire supérieure *stricte* ou triangulaire inférieure *stricte*.

Exemple

Par définition, une matrice carrée échelonnée est triangulaire supérieure.

Définition 2.2

On appelle matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et on note I_n, la matrice ayant des 1 sur la diagonale et tous les autres coefficients nuls.

$$I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}.$$

Explications

Le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.
Ainsi, il indique que le coefficient est nul sauf s'il est sur la diagonale ($i = j$), auquel cas, il vaut 1.

Propriété 2.3

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$,

$$A\,I_n = I_n\,A = A.$$

La matrice identité est l'*élément unité* pour la multiplication matricielle.

Propriété 2.4

Sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, le produit matriciel est (en plus des propriétés déjà énoncées)

1. *interne :* si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, alors $AB \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
2. *admet un élément unité :* I_n.

$\rightarrow$ $(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), +, \times)$ est un anneau (non commutatif pour $n \geqslant 2$).

Remarque : On dit que $(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), +, \times, .)$ est une **K**-algèbre associative unifère.

B Matrices triangulaires et diagonales

Propriété 2.5 *(Sous-algèbre des matrices triangulaires supérieures)*

Si on note $T_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, alors

1. $I_n \in T_n(\mathbf{K})$.
2. T_n est stable par combinaison linéaire :
   Si $(A, B) \in T_n(\mathbf{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ alors $\lambda A + \mu B \in T_n(\mathbf{K})$.
3. T_n est stable par produit :
   Si $(A, B) \in T_n(\mathbf{K})$ alors $AB \in T_n(\mathbf{K})$.

La transposée d'un matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure.

Propriété 2.6

Les mêmes propriétés de stabilité s'appliquent aux matrices inférieures (par application de la transposition) et aux matrices diagonales (qui sont à la fois supérieures et inférieures).

C Transposées de matrices carrées

Définition 2.7

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

- On dit que A est **symétrique** si $A = A^T$,
  c'est-à-dire pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} = a_{j,i}$.
- On dit que A est **antisymétrique** si $A = -A^T$,
  c'est-à-dire pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} = -a_{j,i}$.

On note $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n.
On note $\mathscr{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques de taille n.

Remarque : Pour qu'une matrice soit symétrique, ou antisymétrique, il faut qu'elle ait le même nombre de lignes que de colonnes : $n = p$. La matrice est donc nécessairement carrée.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ est symétrique, } B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est antisymétrique.}$$

Propriété 2.8

Une matrice antisymétrique a des 0 sur sa diagonale.

Preuve

$a_{i,i} = -a_{i,i}$ donc $a_{i,i} = 0$ ∎

Propriété 2.9

1. La matrice nulle est la seule matrice à la fois symétrique et antisymétrique.
2. Toute matrice peut s'écrire de manière **unique** comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
   Cette décomposition est
$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Preuve

1. Si $A \in \mathscr{S}_n \cap \mathscr{A}_n$ alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\quad a_{i,j} = a_{j,i} = -a_{i,j}$. Donc $a_{i,j} = 0$
   Donc 0_n est la seule matrice à la fois symétrique et antisymétrique.
2. On raisonne par analyse-synthèse. Cet exercice doit faire penser à l'exercice de décomposition d'une fonction quelconque en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
   Analyse :
   Si $A = S + T$ avec $S \in \mathscr{S}_n$ et $T \in \mathscr{A}_n$.
   Alors $A^T = S^T + T^T = S - T$.
   On a donc
$$\begin{cases} A & = S + T \\ A^T & = S - T \end{cases}.$$
   La demi-somme des deux lignes précédentes donne $\frac{1}{2}\left(A + A^T\right) = S$.
   De même, la demi-différence donne $\frac{1}{2}\left(A - A^T\right) = T$.
   Synthèse :
   Si on note $S = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ et $T = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$, alors
$$S^T = \left(\frac{1}{2}\left(A + A^T\right)^T\right) = \frac{1}{2}(A^T + A) = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) = S.$$
$$T^T = \left(\frac{1}{2}\left(A - A^T\right)\right)^T = \frac{1}{2}\left(A^T - A\right) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -T.$$
   donc $S \in \mathscr{S}_n$ et $T \in \mathscr{A}_n$.
   Et $S + T = \frac{1}{2}\left(A + A^T + A - A^T\right) = A$. Donc S et T conviennent.

∎

D Trace d'une matrice carrée

La notion de trace est introduite ici, mais elle sera surtout utile plus tard dans l'année quand interviendront les changements de base et matrices semblables.

Définition 2.10

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on appelle **trace** de A, le scalaire :
$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Explications

C'est simplement la somme des coefficients diagonaux.

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, alors $\operatorname{tr}(A) = 1 + 5 - 2 = 4$.

Exemple

$\operatorname{tr}(I_n) = n$.

Propriété 2.11

Soient $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbf{K}))^2$, et $\lambda \in \mathbf{K}$,

1. la trace est linéaire : $\operatorname{tr}(A + \lambda B) = \operatorname{tr}(A) + \lambda\operatorname{tr}(B)$.
2. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
   (et ce, même si les matrices ne commutent pas !)

Preuve

1. $\operatorname{tr}(A + \lambda B) = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_{i,i} + \lambda b_{i,i}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i} + \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} b_{i,i} = \operatorname{tr}(A) + \lambda\operatorname{tr}(B)$.
2. $$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}a_{i,i} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (BA)_{k,k} \\ &= \operatorname{tr}(BA).\end{aligned}$$

∎

Exemple

Montrer qu'il n'existe pas de matrices A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.
Solution :
$\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(AB) = 0$.
Or $\operatorname{tr}(I_n) = n \geqslant 1$, donc on ne peut avoir l'égalité.

Exemple

En général $\operatorname{tr}(ABC) \neq \operatorname{tr}(ACB)$.

Par exemple pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors on a $\operatorname{tr}(ABC) = 0$, mais $\operatorname{tr}(ACB) = 1$.

3 Puissances d'une matrice carrée

Définition 3.1

Soit $p \in \mathbf{N}$, on définit **la puissance** p-ième d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ par récurrence avec

- $A^0 = I_n$.
- $\forall p \in \mathbf{N},\ A^{p+1} = A \times A^p$.

Définition 3.2 *(Matrice nilpotente)*

Un matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est dite **nilpotente** s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ telle que $A^p = 0_n$. L'indice de nilpotence est le plus petit exposant $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

Explications

Il est donc facile de calculer ses puissances car elles s'annulent toutes à partir d'un certain rang.

Exemple

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{alors } A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple *(À connaître)*

On définit la matrice $J \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, calculer J^p.

Solution :

On essaie de calculer J^2, J^3 et on conjecture que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $J^p = n^{p-1}J$.
On le montre par récurrence sur $p \in \mathbf{N}^*$.
Initialisation : Pour $p = 1$, la relation est vraie.
Hérédité : On suppose que pour $p \in \mathbf{N}^*$ fixé, $J^p = n^{p-1}J$.
Alors $J^{p+1} = J^pJ = n^{p-1}J^2 = n^{p-1}nJ = n^pJ$
(le calcul de J^2 se fait facilement à la main, on observe que multiplier à droite par J, c'est ajouter tous les éléments de chaque ligne).
Donc la propriété est vérifiée au rang $p+1$.
Conclusion : par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $p \in \mathbf{N}^*$.

$$J^0 = I_n \qquad \text{et} \qquad \forall p \geqslant 1,\ J^p = n^{p-1}J.$$

(Ne pas oublier le cas $p = 0$ qui est traité à part).

Propriété 3.3 *(Puissance d'une matrice diagonale)*

Soit $D \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice diagonale de coefficients diagonaux $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$. On note

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Pour $p \in \mathbf{N}$, on a alors

$$D^p = \operatorname{diag}(\lambda_1^p, \lambda_2^p, \cdots, \lambda_n^p) = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & & (0) \\ & \lambda_2^p & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n^p \end{pmatrix}.$$

Preuve

Par récurrence. ■

Propriété 3.4 *(Formule du binôme de Newton)*

Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ **commutent**, alors la formule du binôme de Newton est valable $\forall p \in \mathbf{N}$,

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k.$$

⚠ Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, alors en général

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

L'identité remarquable n'est vraie que si A et B commutent, c'est-à-dire si $AB = BA$.

Preuve

C'est exactement la même preuve que sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. ■

Propriété 3.5 *(Égalité de Bernoulli)*

Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ **commutent**, alors la l'égalité de Bernoulli est valable $\forall p \in \mathbf{N}$,

$$A^{p+1} - B^{p+1} = (A - B) \sum_{k=0}^{p} A^k B^{p-k}.$$

Preuve

Comme sur $\mathbf{R}$.

■

Méthode *(Calculer la puissance d'une matrice grâce au binôme)*

On utilise souvent cette formule avec la matrice I_n (qui commute avec toutes les autres matrices) :

$$(A + I_n)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k.$$

En particulier :

$$\begin{aligned} B^p = (B - I_n + I_n)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (B - I_n)^k \\ = (B + I_n - I_n)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} (B + I_n)^k. \end{aligned}$$

Exemple

On définit la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & (1) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (1) & & & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice a des 1 partout sauf sur la diagonale où elle a des 0. Calculer A^p pour $p \in \mathbf{N}^*$.

Solution :

$A = J - I_n$, donc $A^p = (J - I_n)^p$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} J^k \\ &= (-1)^p I_n + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} J^k \\ &= (-1)^p I_n + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} n^{k-1} J \\ &= (-1)^p I_n + \left(\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} n^{k-1} \right) J \\ &= (-1)^p I_n + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} n^{k} \right) J \qquad (n \neq 0) \\ &= (-1)^p I_n + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} n^{k} - (-1)^p \right) J \\ &= (-1)^p I_n + \frac{1}{n} \left((n-1)^p - (-1)^p \right) J \\ &= \frac{(-1)^p}{n} (n I_n - J) + \frac{(n-1)^p}{n} J. \end{aligned}$$

Si on veut l'exprimer en fonction de A, alors on remplace J par $A + I_n$ et on trouve

$$A^p = \frac{(-1)^p}{n} (-A + (n-1) I_n) + \frac{(n-1)^p}{n} (A + I_n).$$

Propriété 3.6 *(Puissance de matrices triangulaires)*

Si A est une matrice triangulaire supérieure [res. inférieure], alors pour tout $p \in \mathbf{N}$, A^p est aussi triangulaire supérieure [res. inférieure].

Si A est de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Alors pour tout $p \in \mathbf{N}$, A^p est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1^p & & & * \\ & \lambda_2^p & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^p \end{pmatrix}$

Preuve

En exercice.

■

Méthode *(Récapitulatif des méthodes de calcul des puissances de A)*

Plusieurs méthodes sont possibles pour calculer les puissances d'une matrice. En particulier :

1. Par calcul direct, avec une récurrence,
   On calcule les premières puissances à la main et on en déduit une conjecture sur la forme des puissances de A.
   On démontre ensuite cette conjecture à l'aide d'une récurrence.

2. Par le binôme de Newton,
   On écrit $A = B + C$ avec B et C deux matrices **qui commutent** et dont on sait calculer facilement les puissances. En particulier, il faut penser aux matrices :

   - les matrices scalaires : λI_n dont on sait qu'elles commutent avec toutes les matrices. $(\lambda I_n)^p = \lambda^p I_n$.
   - la matrice J composée que de 1 : pour $p \geqslant 1$, $J^p = n^{p-1}J$.
     Attention à bien vérifier la commutativité et à traiter à part le cas $J^0 = I_n$ pour lequel la formule précédente est fausse.
   - une matrice nilpotente N telle que $N^r = 0$ pour une certaine puissance r.
     On sait que toutes les matrices triangulaires supérieures strictes (ou inférieures strictes) sont nilpotentes d'indice $r \leqslant n$ (voir exercice).
     Attention à bien vérifier la commutativité.

3. (Deuxième année) par une diagonalisation. Voir plus loin.

4. Avec un polynôme annulateur. On en parlera au moment du chapitre sur les polynômes.

5. Par une interprétation avec les applications linéaires : vous ne comprenez rien ? C'est normal, nous verrons plus tard dans l'année qu'une matrice est une écriture particulière d'une application linéaire de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}^n$ et que les produit de matrices correspondent aux compositions de ces applications entre elles.

Exemple

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer les puissances de A avec

1. conjecture, puis récurrence,
2. la méthode du binôme de Newton.

Solution :
Solution par conjecture puis récurrence :

On calcule à la main les premières puissances de A :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On conjecture que la matrice A^p a des 1 sur la diagonale, p sur la sur-diagonale, et un autre coefficient non nul dans le coin.
(*par stabilité des matrices triangulaires, on est sûr que les coefficients sous la diagonale resteront nuls*).
Sauf si l'on a beaucoup d'intuition, il est difficile d'imaginer la valeur du coefficient dans le coin et on le pose comme une inconnue dans notre récurrence :
On cherche donc à montrer qu'il existe une suite (α_p) telle que $\forall p \in \mathbf{N}$, $A^p = \begin{pmatrix} 1 & p & \alpha_p \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Initialisation : pour $p = 0$ le résultat est vrai et $\alpha_0 = 0$.
Hérédité : on suppose le résultat vrai au rang p, et on cherche à le montrer au rang $p+1$.

$$A^{p+1} = A^p\, A = \begin{pmatrix} 1 & p+1 & \alpha_p + p + 1 \\ 0 & 1 & p+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, par principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout $p \in \mathbf{N}$, avec la suite (α_p) définie par $\alpha_0 = 0$ et $\forall p \in \mathbf{N}$, $\alpha_{p+1} = \alpha_p + (p+1)$.
Il reste à trouver la forme de α_p en fonction de p.
Assez simplement, on calcule successivement

$$\begin{array}{ll} p=0 & \alpha_0 = 0 \\ p=1 & \alpha_1 = 0+1 \\ p=2 & \alpha_2 = 0+1+2 \\ p=3 & \alpha_3 = 0+1+2+3 \\ \vdots & \\ p & \alpha_p = 0+1+2+3+\cdots+p = \frac{p(p+1)}{2} \end{array}.$$

Une méthode un peu plus élégante pour obtenir ce résultat est d'écrire que $\forall p \in \mathbf{N}$, $\alpha_{p+1} - \alpha_p = p + 1$. On reconnait alors le terme général d'une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{p-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) = \sum_{k=0}^{p-1} (k+1) \iff \alpha_p - \alpha_0 = \sum_{k=1}^{p} k \iff \alpha_p = \frac{p(p+1)}{2}.$$

Solution avec la méthode du binôme de Newton :

On écrit $A = I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les deux matrices commutent et N est nilpotente d'indice 3. En effet,

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc pour tout $k \geqslant 3$, $N^k = 0$, ainsi, d'après le binôme de Newton,

$$A^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k I^{p-k} = I + pN + \frac{p(p-1)}{2} N^2.$$

Donc

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & p & \frac{p(p+1)}{2} \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4 Matrices carrées inversibles

A Définition et propriétés

Définition 4.1

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est dite **inversible**, s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ se note $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$: c'est le **groupe général linéaire**.

⚠ Puisque l'on multiplie tantôt à droite et tantôt à gauche, la notion d'inverse n'est valable que pour des matrices **carrées.**

Exemple

Étudier l'inversibilité de I_n et de la matrice nulle.

Solution :
$I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ car $I_n\, I_n = I_n$.
$0 \notin \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$: Toute matrice comportant une ligne ou une colonne nulle n'est pas inversible (car alors la matrice produit comporte aussi une ligne ou une colonne nulle et ne peut pas être égale à l'identité).

Théorème 4.2 *(Propriétés de l'inverse)*

1. *Unicité :* si A est inversible, alors son inverse est unique. On le note A^{-1}.
2. *Involutivité :* pour $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. *Produit :* Si $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, alors $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

$\rightarrow$ $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}), \times)$ est un groupe.

⚠ Comme avec la transposition, pour le produit, il faut échanger l'ordre des termes.

Preuve

1. On suppose qu'il y en a deux, et on trouve qu'ils sont égaux.
2. Trivial.
3. Faire le produit $ABB^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1}AB = I_n$.

∎

⚠ Le produit de deux matrices inversibles est inversible, par contre, en général leur somme ne l'est pas. (prendre I_n et $-I_n$). L'inverse n'est **PAS linéaire**.

Exemple

Montrer que si A et B sont deux matrices non nulles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, alors

$$AB = 0 \Rightarrow A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \text{ et } B \notin \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}).$$

Solution :
Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, alors $AB = 0 \Rightarrow A^{-1}AB = 0$, donc $B = 0$.
De même, si $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

Propriété 4.3 *(Inversibilité d'une matrice diagonale)*

Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ la matrice diagonale correspondante.

$$D \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i \neq 0.$$

Dans le cas où la matrice est inversible, sont inverse est alors $D^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$

Preuve

Si un des coefficients diagonaux est nul, alors la matrice possède une ligne nulle, donc tout produit avec une autre matrice à droite donne également une ligne nulle, et ne peut donc pas donner l'identité.
Ainsi, la matrice n'est pas inversible.
A contrario, si tous les coefficients sont non nuls, alors, avec la matrice diagonale des inverses, le produit matriciel donne immédiatement l'identité. Ce qui prouve l'inversibilité et la matrice inverse. ∎

Propriété 4.4 *(Inverse d'une transposée)*

Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, alors $A^T \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

Preuve

Il suffit de vérifier : $A^T\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = {I_n}^T = I_n$. De même pour le produit à droite. ∎

Théorème 4.5

Pour qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ soit inversible, il suffit qu'il existe un inverse à gauche, ou un inverse à droite.
C'est-à-dire A inversible $\iff (\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \text{ tel que } AB = I_n)$,
$\iff (\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \text{ tel que } BA = I_n)$.

Preuve

Admis, cela sera démontré au chapitre sur les applications linéaires. ∎

Exemple

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, pour $n \geqslant 2$.

1. Si $AB = 0$, peut-on avoir A et B non nulles ? Prouver.
2. Si $AB = 0$, peut-on avoir A ou B inversible ?
3. Si $AB = I_n$, que peut-on dire de l'inversibilité de A et/ou B ?
4. Si $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ que peut-on dire de l'inversibilité de A et/ou B ?

Solution :

1. Oui, on l'a vu en exemple plus haut dans le cours.
2. C'est uniquement possible si l'autre matrice est nulle (multiplier par l'inverse).
3. $A = B^{-1}$, donc les deux sont inversibles.
4. $AB = C$, donc $ABC^{-1} = I_n$, donc $A^{-1} = BC^{-1}$. De même pour B.

Méthode *(Méthode du polynôme annulateur)*

Objectif : Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et calculer A^{-1}.

Méthode : Calculer A^2, A^3... et rechercher une relation polynomiale simple entre les puissances de A. Par exemple $A^3 + 3A^2 - A + 2I_n = 0$.
Si la relation polynomiale fait intervenir l'**identité**, alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et A^{-1} facile à calculer :

Obtention de A^{-1} (permet de montrer l'inversibilité de A en même temps).

- On met l'identité d'un côté de l'égalité.
- De l'autre, on factorise par A.

Dans l'exemple : $A\left(A^2 + 3A - I_n\right) = -2I_n$.
Si on pose $B = -\frac{1}{2}\left(A^2 + 3A - I_n\right)$, alors on a $AB = BA = I_n$.
Ainsi on a montré que A est inversible, et que $A^{-1} = B$.

Remarque : On pourra exploiter plus en avant cette méthode lorsqu'on aura traité du chapitre sur les polynômes.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A^3 - 4A^2 + 7A - 4I = 0$.
Solution :
$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 10 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

En faisant la somme, on vérifie bien que $A^3 - 4A^2 + 7A - 4I = 0$.
Donc $A^3 - 4A^2 + 7A = 4I$, c'est-à-dire : $A\left(A^2 - 4A + 7I\right) = 4I$.
Si on pose $B = \frac{1}{4}\left(A^2 - 4A + 7I\right)$, alors $AB = BA = I$.
Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}\left(A^2 - 4A + 7I\right)$.

Remarque : Si on trouve une relation polynomiale **de degré minimal** qui ne fait pas intervenir I_n, alors A n'est pas inversible.

Preuve de la remarque sur un exemple :
Par exemple si $A^3 + 3A^2 - A = 0$, alors on a $A\left(A^2 + 3A - I_n\right) = 0$.
Si par l'absurde, A était inversible, alors en multipliant par A^{-1}, on obtiendrait $A^2 + 3A - I_n = 0$.
On a donc une relation polynomiale de degré 2 sur les puissances de A.
C'est absurde car on a supposé que la relation trouvée initialement était de degré minimal ! Donc A n'est pas inversible.

Exemple

En s'aidant de la méthode précédente, montrer que la matrice J d'ordre $n \geqslant 2$ (matrice uniquement composée de 1) n'est pas inversible.
Solution :
On a vu que $J^2 = nJ$, donc $J\,(J - nI) = 0$.
Or, $J \neq 0$ et $J \neq nI$ (car $n \geqslant 2$) ; et d'après un exemple plus haut, on a donc nécessairement $J \notin \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

Remarque : Vous verrez en deuxième année, que toute matrice admet un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à n, l'ordre de la matrice.
Et même, que tous les polynômes annulateurs sont multiples d'un polynôme dit *minimal.*

B Cas des matrices d'ordre 2

Théorème 4.6 *(Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2)*

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbf{K}^4$, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K})$.

A est inversible si et seulement si $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ et dans ce cas

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} \boldsymbol{d} & -b \\ -c & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}.$$

$\det(A)$ est le **déterminant** de A.

Explications

Retour au collège : le critère $ad - bc \neq 0$ correspond à un produit en croix.
Si le produit en croix « fonctionne », c'est-à-dire si $ad = bc$ alors c'est que les deux lignes sont proportionnelles. La matrice n'est donc par inversible. La réciproque est aussi vraie.

Exemple

Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Solution :

$\det A = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$, donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

5 Inversibilité et algorithme de Gauss-Jordan

Nous allons maintenant faire le lien entre les manipulations matricielles que nous avions vu pour les systèmes et le calcul matriciel.

A Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

Définition 5.1 *(Opérations élémentaires)*

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, soient $(i,j) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^2$ et $\lambda \in \mathbf{K}^*$,
On appelle **opération élémentaire sur les lignes** de A, les opérations

- **permutation** (échange) des lignes i et j notée $L_i \leftrightarrow L_j$.
- **dilatation** (produit) de la ligne i par λ notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- **transvection** (somme) de λ fois la ligne j à la ligne i notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

On définit de même les opérations élémentaires sur les colonnes :

$$C_i \leftrightarrow C_j,\ C_i \leftarrow \lambda C_i \text{ et } C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j.$$

Remarque : Comme dans le chapitre sur les systèmes linéaires, on impose au scalaire d'être non nul pour éviter les problèmes d'*inversibilité*.

Définition 5.2

Une **matrice de permutation** est une matrice carrée symétrique $P_{i,j}$ de la forme

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} & & & i\text{-ème} & & & & j\text{-ème} & & & \end{array} \\
\begin{array}{r} \\ \\ \\ i\text{-ème ligne}\rightarrow \\ \\ \\ \\ j\text{-ème ligne}\rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & | & & & & | & & & \\
 & \ddots & & | & & & & | & & & \\
 & & 1 & | & & & & | & & & \\
- & - & - & 0 & - & - & - & 1 & - & - & - \\
 & & & | & 1 & & & | & & & \\
 & & & | & & \ddots & & | & & & \\
 & & & | & & & 1 & | & & & \\
- & - & - & 1 & - & - & - & 0 & - & - & - \\
 & & & | & & & & | & 1 & & \\
 & & & | & & & & | & & \ddots & \\
 & & & | & & & & | & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

C'est la matrice identité dans laquelle on a permuté les lignes i et j.

Définition 5.3

Une **matrice de dilatation** est une matrice carrée symétrique $D_i(\lambda)$ de la forme

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & & i\text{-ème} & & & \end{array} \\
\begin{array}{r} \\ \\ \\ i\text{-ème ligne}\rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & | & & & \\
 & \ddots & & | & & & \\
 & & 1 & | & & & \\
- & - & - & \lambda & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

C'est la matrice identité dans laquelle on a multiplié la ligne i par λ.

Définition 5.4

Une **matrice de transvection** est une matrice carrée $T_{i,j}(\lambda)$ de la forme

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & i\text{-ème} & & j\text{-ème} & & \end{array} \\ i\text{-ème ligne}\rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & & | & & | & & \\ & \ddots & | & & | & & \\ - & - & 1 & - & \lambda & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

C'est la matrice identité dans laquelle on a ajouté λ fois la ligne j à la ligne i.

Théorème 5.5 *(Interprétation matricielle des opérations élémentaires)*

Chaque opération élémentaire sur les lignes correspond à la multiplication à gauche par une matrice particulière :

$$\begin{array}{lcl} L_i \leftrightarrow L_j & \text{“} \iff \text{”} & P_{i,j}. \\ L_i \leftarrow \lambda L_i & \text{“} \iff \text{”} & D_i(\lambda). \\ L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j & \text{“} \iff \text{”} & T_{i,j}(\lambda). \end{array}$$

Les opérations correspondantes sur les colonnes se font par des opérations à droite (avec la transposée de la matrice élémentaire).

Pour se souvenir :

$$\text{Multiplication à gauche} = \text{Opération sur les lignes}$$
$$\textbf{L}\text{eft} = \textbf{L}\text{ignes}$$

Remarque : Les matrices pour faire les opérations sont carrées, mais elles peuvent être utilisées pour « opérer » sur des matrices rectangulaires.

Théorème 5.6 *(Inversibilité des matrices des opérations élémentaires)*

On a pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lambda \in \mathbf{K}^*$,

- La matrice de permutation P_{ij} est inversible et son inverse est elle-même,
- La matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ est inversible[2] d'inverse $D_i(\frac{1}{\lambda})$,
- La matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda)$ est inversible d'inverse $T_{i,j}(-\lambda)$.

Preuve

Il suffit d'écrire les opérations correspondantes sur les lignes : chercher l'inverse correspond à « défaire » le travail. ■

2. C'est ici qu'on a besoin de $\lambda \neq 0$.

Théorème 5.7

Soit un système linéaire représenté sous forme matricielle par $AX = B$ où $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, alors

$$AX = B \qquad \text{est équivalent à} \qquad (PA)X = PB.$$

Preuve

Sens direct : il suffit de multiplier par P cela conserve l'égalité.
Sens réciproque : il suffit de multiplier par P^{-1} car $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. ■

Remarque : La matrice PA a la même taille que A et PB a la même taille que B

Théorème 5.8 *(Matrices équivalentes en ligne)*

Soit un système $AX = B$,
Lorsqu'on effectue une suite finie d'opérations sur les lignes simultanément sur A et B, on obtient un système équivalent $A'X = B'$.
Deux matrices qui se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations sur les lignes sont dites **équivalentes en ligne**.
On note

$$A \underset{L}{\sim} A'.$$

Preuve

Faire des opérations sur les lignes, c'est multiplier à gauche par des matrices inversibles $E_1, E_2, \cdots E_n$. On obtient donc le système

$$E_n E_{n-1} \cdots E_2 E_1 A X = E_n E_{n-1} \cdots E_2 E_1 B.$$

Comme les $E_i \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, leur produit $E \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et les systèmes sont bien équivalents. ■

Propriété 5.9

L'équivalence en ligne est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Preuve

1. réflexivité car I_n peut-être considérée comme une opération élémentaire (par exemple permutation de i avec lui-même), ou encore une suite vide d'opérations élémentaires.
2. transitivité : en mettant à la suite les opérations qui permettent d'aller de A vers B, et celles de B vers C, on obtient une suite finie qui va de A vers C.
3. reflexivité : car l'inverse d'une matrice d'opération élémentaire est encore une matrice d'opération élémentaire, et il suffit donc de prendre l'inverse de la suite qui donne la suite (dans l'ordre contraire) des inverses.

■

Méthode *(Application au pivot de Gauss)*

On effectue matriciellement l'algorithme du pivot de Gauss comme nous l'avons fait dans le chapitre sur les systèmes linéaires.
Plutôt que de multiplier A et B en même temps comme dans le théorème précédent, on peut aussi multiplier directement la matrice augmentée $A|B$. C'est strictement équivalent.

Exemple

Réaliser cet algorithme sur $M = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Solution :

Opération	Résultat	Matrice opération
$L_1 \leftrightarrow L_2$	$M_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$	$E_1 = P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$	$M_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -14 & -3 & 0 \end{pmatrix}$	$E_2 = T_{3,1}(-3)E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2$	$M_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 5 & 2 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -14 & -3 & 0 \end{pmatrix}$	$E_3 = D_2(-\frac{1}{3})E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2$	$M_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -14 & -3 & 0 \end{pmatrix}$	$E_4 = T_{1,2}(-5)E_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 + 14L_2$	$M_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{14}{3} \end{pmatrix}$	$E_5 = T_{3,2}(14)E_4 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{14}{3} & -3 & 1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3$	$M_6 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{14}{9} \end{pmatrix}$	$E_6 = D_3(-\frac{1}{3})E_5 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{14}{9} & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$	$R = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -\frac{22}{9} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{14}{9} \end{pmatrix}$	$E = T_{1,3}(-2)E_6 = \begin{pmatrix} -\frac{13}{9} & -1 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{14}{9} & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

On observe qu'à chaque étape, $M \underset{L}{\sim} M_i$ avec $M_i = E_i M$.
La dernière colonne peut aider à vérifier les calculs au fur et à mesure en effectuant le produit matriciel. En particulier $EM = R$.

B Lien entre la recherche d'un inverse et la résolution matricielle

Chercher l'inverse de A c'est chercher une matrice C telle que $AC = I_n$.
Si on écrit C sous la forme de n vecteurs colonne accolés alors $C = (X_1|X_2|\cdots|X_n)$.

De la même façon, on décompose I_n en n vecteurs colonnes. On note e_i le vecteur colonne avec 1 à la ième ligne et 0 ailleurs :

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $I_n = (e_1|e_2|\cdots|e_n)$ et on peut écrire la recherche d'inverse :

$$AC = I_n \iff A(X_1|X_2|\cdots|X_n) = (e_1|e_2|\cdots|e_n) \iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ AX_i = e_i.$$

Trouver C revient à résoudre les n systèmes linéaires :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi, pour trouver C on peut effectuer le pivot de Gauss sur ces matrices augmentées. Cependant, plutôt que de résoudre n systèmes différents dont seule la dernière colonne change, on peut se contenter de résoudre le système en fonction des paramètres $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & x_i \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \end{array}\right)$$

Ensuite, on obtient la i-ème colonne de $C = A^{-1}$ en prenant $x_i = 1$ et $x_j = 0$ pour $j \neq i$. La matrice est inversible à la seule condition que ces systèmes admettent tous une unique solution : c'est-à-dire pour $\text{rg}(A) = n$.

Exemple

Appliquer cette méthode à la recherche de l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution :

On résout le système avec second membre (volontairement, on aligne a, b, c)

$$
\left\{\begin{array}{llllll}
x & & +2t & = a & & \\
 & -y & +t & = & b & \\
x & -2y & & = & & c
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{lllllll}
x & & +2t & = a & & & \\
 & y & -t & = & -b & & L_2 \leftarrow -L_2 \\
0 & -2y & -2t & = -a & & c & L_3 \leftarrow L_3 - L_1
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{lllllll}
x & & +2t & = a & & & \\
 & y & -t & = & -b & & \\
0 & & -4t & = -a & -2b & +c & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{lllllll}
x & & +2t & = a & & & \\
 & y & -t & = & -b & & \\
0 & & t & = \frac{1}{4}a & +\frac{1}{2}b & -\frac{1}{4}c & L_3 \leftarrow -\frac{L_3}{4}
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{lllllll}
x & & & = \frac{1}{2}a & -b & \frac{1}{2}c & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\
 & y & & = \frac{1}{4}a & -\frac{1}{2}b & -\frac{1}{4}c & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\
 & & t & = \frac{1}{4}a & \frac{1}{2}b & -\frac{1}{4}c &
\end{array}\right.
$$

On obtient ainsi le système sous forme échelonnée réduite. On observe qu'il contient 3 pivots. Cela veut dire que la matrice associée est inversible. Et la partie de droite donne l'inverse.

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.
$$

On peut l'intépréter de plusieurs façons.

- *Interprétation matricielle :* la partie de droite, consiste simplement à réaliser le pivot de Gauss sur la matrice identité (mis en valeur par l'alignement de lettres a, b et c correspondant chacune à une colonne).
- *Interprétation système :* pour trouver B telle que $AB = I_3$, on écrit $B = (X_1|X_2|X_3)$, où X_1, X_2 et X_3 sont les trois colonnes de B.

  On doit alors avoir $AX_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $AX_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $AX_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Quand on met les colonnes côte-à-côte, on retrouve alors $A \times (X_1|X_2|X_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  Ainsi, pour trouver X_1, il suffit de reprendre la solution précédente avec $a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$. Avec la résolution du système, on trouve donc

  $$X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

  De même pour X_2 et X_3, ce qui nous donne l'inverse de la matrice grâce à la résolution du système.

Méthode *(Calcul de l'inverse d'une matrice)*

Trouver l'inverse de A revient à la mettre sous forme échelonnée. Le produit à gauche par les matrices d'opérations élémentaires donne alors la matrice inverse : $EA = I_n \iff E = A^{-1}$.

Concrètement, en effectuant la mise sous forme réduite de A, on multiplie successivement les matrices des opérations élémentaires pour connaître leur produit.

Autre méthode : On résout le système $AX = B$ qui donne $X = A^{-1}B$.

Remarque finale :

Comme nous l'avons vu, il existe de nombreuses façon d'interpréter les résultats et en particulier l'algorithme de Gauss. Ce qui est riche, c'est d'être capable de faire le pont entre ces différentes interprétations, passer facilement de l'une à l'autre.

6 Caractérisation des matrices inversibles

Petit récapitulatif (partiel) sur les matrices inversibles, lien entre la matrice et le système associé.

Théorème 6.1 *(Caractérisation d'une matrice inversible)*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes

1. A est inversible,
2. $A \underset{L}{\sim} I_n$
3. $A \underset{L}{\sim} G$ avec $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$
4. Pour toute matrice $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution,
5. Pour toute matrice $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.
6. Pour une matrice $B_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ fixée, le système $AX = B_0$ admet une unique solution,

Preuve

(1) $\Rightarrow$ (2) si A n'est pas équivalent en ligne à l'identité, alors la matrice échelonnée réduite a strictement moins de pivots que n, donc n'est pas inversible.

Ainsi $PA = R \notin \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, et comme P, la matrice des opérations sur les lignes est inversible, on trouve que $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Ce qui donne le résultat par contraposée.

(2) $\Rightarrow$ (1) car le pivot donne l'inverse.

(2) $\iff$ (3) car l'équivalence en ligne est une relation d'équivalence (donc transitive) et que l'on vient de voir que toute matrice inversible est équivalente en ligne à l'identité.

(1) $\Rightarrow$ (4) $AX = B \iff X = A^{-1}X$ d'où l'existence et l'unicité.

(4) $\Rightarrow$ (5) pas très difficile.

(5) $\Rightarrow$ (1) On peut construire l'inverse en accolant des solutions X_i côte à côte chacune

correspondant à une solution de $AX = e_i$ avec e_i le vecteur colonne qui a 1 à la position i et 0 partout ailleurs. (1) $\Rightarrow$ (6) car (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (6).
(6) $\Rightarrow$ (1) par contraposée : si A n'est pas inversible, alors elle n'est pas équivalente en lignes à l'identité, donc le système correspondant admet strictement moins de pivots que d'inconnues et possède donc au moins une inconnue secondaire.
Dans ce cas, si le système est compatible, les solutions forment au moins une droite affine et non un point, ce qui contredit l'unicité.
Maintenant, si vous faites un petit schéma des implications démontrées, normalement, en utilisant la transitivité de l'implication et le principe de double implication, toutes les propriétés sont bien équivalentes. ■

Corollaire 6.2

Toute matrice inversible s'écrit comme produit de permutations, dilatations et transvections.

Remarque : On dit que les matrices des opérations élémentaires *engendrent* $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$

Preuve

En effet, $A \underset{L}{\sim} I_n$, donc il existe un produit de permutations, dilatations et transvections E, tel que $EA = I_n$, c'est-à-dire $E^{-1} = A$. Or nous avons vu que E^{-1} était alors également exprimable comme un produit de matrice d'opérations élémentaires. ■

Propriété 6.3

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, alors le système $AX = B$ admet une unique solution $X = A^{-1}B$.
Dans ce cas, on dit que le système est un **système de Cramer.**

Propriété 6.4 *(Cas des matrices triangulaires)*

Si A est une matrice triangulaire supérieure, alors A est inversible si, et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
Dans ce cas, sa matrice inverse est aussi triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A.
On a le même résultat pour les matrices triangulaires inférieures.

Preuve

Les coefficients diagonaux non nuls représentent les pivots de la matrice.
La condition d'inversibilité est donc évidente.
Le fait que la matrice inverse soit également triangulaire supérieure peut s'obtenir avec l'application du pivot de Gauss (ou la résolution du système). Cependant, on aura une démonstration plus élégante dans un chapitre ultérieur (applications linéaires). ■

7 Développements & approfondissements

Cette dernière partie est comme une petite introduction à des thèmes qui seront présentés davantage en deuxième année : la diagonalisation, réduction de Jordan et leurs applications.

Le but ici est de montrer en quoi les calculs de puissances de matrices permet de résoudre des récurrence linéaires (homogènes) à coefficients constants, et de retrouver alors les formules données pour les suites récurrentes d'ordre 2 dans le chapitre correspondant.

A Diagonalisation d'une matrice

Cette partie est une petite fenêtre ouverte sur la seconde année (où ce sera vu beaucoup plus élégamment).
Aucun des résultats qui suivent ne peut être réutilisé sans démonstration.

Définition 7.1 *(Matrice diagonalisable)*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$,
On dit que A est diagonalisable sur $\mathbf{K}$ s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

Outre certains intérêts intrinsèques qu'il est trop tôt pour présenter, la diagonalisation d'une matrice permet de calculer facilement ses puissances :

Théorème 7.2 *(Puissance d'une matrice diagonalisée)*

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tels que

$$A = PDP^{-1} \qquad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Alors $\forall p \in \mathbf{N}$,

$$A^p = PD^pP^{-1} \qquad \text{avec} \quad D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & & (0) \\ & \lambda_2^p & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n^p \end{pmatrix}.$$

Preuve

Par récurrence immédiate. ■

Théorème 7.3 *(Condition suffisante de diagonalisabilité)*

Si $A - \lambda I$ n'est pas inversible pour n valeurs de λ **distinctes**, alors A est diagonalisable.

Avec les notations précédentes, on peut alors écrire la matrice diagonale D sous la forme

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ les n valeurs distinctes trouvées pour λ.
La i-ème colonne de la matrice P est solution non nulle de l'équation $AX = \lambda_i X$.
Les (λ_i) s'appellent les **valeurs propres** de A et le i-ème vecteurs colonne de P est un **vecteur propre** associé à la valeur propre λ_i.

⚠ La réciproque est fausse : cette condition est suffisante mais pas nécessaire. Vous verrez cela plus en détail en deuxième année.
Remarque : Si on change l'ordre des λ_i dans l'écriture de D, alors cela revient simplement à échanger l'ordre des colonnes dans la matrice P. La matrice P n'est pas unique : on peut multiplier ses colonnes par des coefficients non nuls sans changer la relation.

Preuve

$$\begin{aligned} & A - \lambda I \notin \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \\ \iff & (A - \lambda I)X = 0 \text{ n'est pas un système de Cramer} \\ \iff & (A - \lambda I)X = 0 \text{ admet une solution } X \text{ non nulle.} \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe n valeurs distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ telles que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad A - \lambda_i I \notin \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}).$$

Alors, l'équivalence précédente nous assure de l'existence de n vecteurs colonnes non nuls $K_1, K_2, \cdots, K_n$ tels que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad (A - \lambda_i I)\, K_I = 0$$

C'est-à-dire

$$AK_i = \lambda_i K_i.$$

On définit la matrice P en plaçant côte à côte les n vecteurs colonne K_i : $P = (K_1|K_2|\cdots|K_n)$. Et on pose

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Alors, un calcul immédiat donne :

$$PD = (K_1|K_2|\cdots|K_n) \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 K_1|\lambda_2 K_2|\cdots|\lambda_n K_n) = AP.$$

(la multiplication à droite de P par la matrice D revient à faire des dilatations sur les colonnes de P).
On admet ici (se démontre très facilement quand on a étudié les applications linéaires) que la matrice P est inversible.
On a donc

$$A = PDP^{-1}.$$

■

B Suites récurrentes linéaires d'ordre p

Définition 7.4

On définit une suite récurrente linéaire d'ordre p (à coefficients constants) dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + a_2 u_{n+p-2} + \cdots + a_p u_n$$

avec $(a_1, a_2, \cdots, a_p) \in \mathbf{K}^p$.

Propriété 7.5

Toute suite récurrence linéaire d'ordre p peut être écrite sous forme matricielle comme une suite linéaire d'ordre 1 :

$$U_{n+1} = AU_n$$

avec $(U_n) \in (\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K}))^{\mathbf{N}}$, et $A \in \mathscr{M}_p(\mathbf{K})$.
Avec les notations précédentes, on définit U_n et A par

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_p & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Preuve
Il suffit de vérifier par le calcul que $U_{n+1} = AU_n$. ■

Propriété 7.6

Soit la suite la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par

$$U_{n+1} = AU_n.$$

Pour tout $m \geqslant 0$, $U_{n+m} = A^m U_n$.
En particulier $U_m = A^m U_0$.

⚠ Les matrices A^m et U_0 ne commutent pas (les dimensions seraient incompatibles).

Preuve

Par récurrence immédiate. ■

Exemple

La suite de Fibonacci définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Exemple

La suite définie par $u_{n+3} = -u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n$.

C Application à l'ordre 2

Théorème 7.7 *(Rappel sur les suites récurrentes d'ordre 2)*

Soit $(b, c) \in \mathbf{K}^2$. On définit la suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants par

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0.$$

On rappelle que **équation caractéristique** est $x^2 + bx + c = 0$. On note Δ son discriminant.

- Si $\Delta \neq 0$, on note (r_1, r_2) les deux solutions de l'équation caractéristique, alors $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, tel que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- Si $\Delta = 0$, on note r la racine double de l'équation caractéristique, alors $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, tel que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \lambda r^n + \mu n r^n.$$

λ et μ sont déterminés de façon unique par u_0 et u_1.

Preuve

Nous avions donné une preuve par récurrence dans le chapitre sur les suites usuelles. Nous proposons ici, une preuve utilisant les matrices. Elle est un peu plus difficile, mais elle permet de mieux comprendre d'où viennent les disjonctions cas $\Delta = 0$, $\Delta > 0$...
Si on pose pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix}.$$

Alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ et par récurrence immédiate, $U_n = A^n U_0$.
Pour calculer les puissances de A, on cherche à la diagonaliser lorsque c'est possible. On étudie donc pour quelles valeurs de λ la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -c & -b-\lambda \end{pmatrix}.$$

Or cette matrice n'est pas inversible si et seulement si son déterminant est nul, c'est-à-dire si et seulement si

$$-\lambda(-b-\lambda) - 1 \times (-c) = 0.$$

On retrouve l'équation caractéristique : $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.
C'est magique ![3]
⋆ Si $\Delta \neq 0$, alors il y a deux valeurs propres distinctes r_1 et r_2, et A est diagonalisable. Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Si on note $V_n = P^{-1}U_n$, alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $V_n = P^{-1}A^n U_0 = P^{-1}PD^nP^{-1}U_0 = D^n V_0$.
On peut écrire pour tout entier naturel n, $V_n = \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Et dans ce cas,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad v_n = r_1^n v_0 \quad \text{et} \quad w_n = r_2^n w_0.$$

Or $\forall n \in \mathbf{N}$, $U_n = PV_n$, donc si on écrit P sous la forme

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}$$

alors

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \alpha v_n + \beta w_n = r_1^n(\alpha v_0) + r_2^n(\beta w_0).$$

Dans le théorème, on a noté $\alpha v_0 = \lambda$ et $\beta w_0 = \mu$ (que l'on trouve grâce aux premiers termes de la suite u).
On remarque en particulier que l'on n'a pas besoin ici de connaître les coefficients de la matrice P.
⋆ Si $\Delta = 0$, alors la condition suffisante de diagonalisabilité n'est pas vérifiée (dans le cas présent, on pourrait montrer très simplement que la matrice ne peut pas être diagonalisable : vous pouvez chercher à le démontrer en exercice).
On note $r = \frac{-b}{2}$ la racine double et on sait donc que $\Delta = b^2 - 4c = 0$, ainsi $c = \frac{b^2}{4} = r^2$.
Dans la suite, on suppose $r \neq 0$ (sinon, la suite est nulle pour $n \geqslant 2$). On peut écrire A sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r^2 & 2r \end{pmatrix}.$$

3. En fait, c'est mathématique, mais selon une acception très courante face au tableau : c'est magique. Et comme pour tout bon tour de magie, ce n'est pas drôle d'aller chercher à dévoiler les ficelles qui le permettent, et on se garde donc bien d'essayer de comprendre ce que dit le prof pour garder intact l'émerveillement.

On s'inspire du cas diagonalisable et on étudie la matrice $N = A - rI$:

$$N = A - rI = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r^2 & 2r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & 1 \\ -r^2 & r \end{pmatrix}.$$

On trouve que $N^2 = 0$.
On peut donc appliquer avec profit le binôme de Newton (les matrices commutent) :

$$\begin{aligned} \forall n \geqslant 1,\ A^n = (N + rI)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k r^{n-k} \\ &= r^n I + nr^{n-1} N \\ &= r^{n-1}\left(r + nN\right) \\ &= r^{n-1} \begin{pmatrix} r(1-n) & p \\ -nr^2 & r(1+n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Or $U_n = A^n U_0$ et donc avec la première ligne du produit :

$$u_n = r^n(1-n)u_0 + nr^{n-1}u_1 = r^n u_0 + nr^n(\frac{u_1}{r} - u_0).$$

Dans le théorème, on a pose $\lambda = u_0$ et $\mu = \frac{u_1}{r} - u_0$. ■

Utilisation similaire :
Cette méthode de diagonalisation peut aussi être utilisée pour des suites ayant des relations linéaire entre elles.
Par exemple, si on définit deux suite (u_n) et (v_n) telles que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n. \end{cases}$$

alors on pourra poser

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } U_{n+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} U_n = A\,U_n.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad U_n = A^n\,U_0.$$

Et le problème revient à calculer les puissances de A par une méthode au choix.
Remarque : Dans le cas présent avec uniquement deux suites, il est souvent plus simple de faire apparaître une relation de récurrence d'ordre 2 pour la suite (u_n) et de résoudre cette récurrence. Si vous avez oublié cette méthode, un petit passage par le chapitre sur les suites usuelles pourrait vous éviter un passage par la case prison.

Neo: Why does my brain hurt ?
Morpheus: You've never used it before.
Librement adapté de The Matrix