Primitives

C'est seulement en soumettant à notre examen une unité infiniment petite, la différentielle de l'histoire, c'est-à-dire les courants homogènes de l'humanité, et en nous rendant maîtres de l'art de les intégrer (de faire la somme des infinitésimaux), que nous pouvons espérer atteindre les lois de l'histoire.
Tolstoï, La Guerre et la Paix.

Après vous avoir appris à dériver, on vous demande de refaire le même trajet, mais à l'envers ! Il faut partir de la fonction dérivée pour retrouver la fonction initiale.
Mais rassurez-vous, on a semé des petits cailloux blancs pour retrouver notre chemin en fonction du type de dérivation que nous avons fait :

- le changement de variable (quand on a dérivé une fonction composée),
- l'intégration par parties (quand on a dérivé un produit).

Ce chapitre se présente donc comme un petit complément calculatoire sur les fonctions usuelles.
Par contre, toute la théorie de l'intégration et le lien avec les calculs de surface sous une courbe sont repoussés à un chapitre ultérieur.

Notations : Dans ce chapitre, I et J désignent des intervalles de $\mathbf{R}$ qui contiennent au moins deux éléments.
La mention du segment $[a, b]$ dans les définitions et théorèmes sous-entend que $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, avec $a < b$ (le segment contient au moins deux points).
$\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1 Définition et structure

Définition 1.1

Soit $f : I \to \mathbf{K}$.
On dit que F est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Explications

Trouver une primitive, c'est faire l'opération inverse de la dérivation. La dérivée de la primitive donne la fonction « initiale ». C'est ainsi qu'il faudra se rappeler les primitives usuelles.

⚠ On a défini une primitive d'une fonction et non d'un réel. On parle donc d'une primitive de f et non de $f(x)$. Néanmoins, pour les expressions explicites, on demandera parfois de trouver des primitives de $f(x)$ par abus de notation.

Propriété 1.2

Une primitive sur I est dérivable sur I et en particulier continue.
Si f est de classe $\mathscr{C}^k(I, \mathbf{K})$, alors les primitives de f sont de classe $\mathscr{C}^{k+1}(I, \mathbf{K})$.

Preuve

Immédiat avec la définition. ∎

Théorème 1.3

Soit $f : I \to \mathbf{K}$, si f admet une primitive F sur un **intervalle** I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est

$$\{F + \text{cste}, \quad \text{cste} \in \mathbf{K}\}.$$

Exemple

Donner les primitives de $x \mapsto x^3 - 5x + 2$ sur $\mathbf{R}$.
Solution :
Ce sont toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{5}{2}x^2 + 2x + c$ avec $c \in \mathbf{R}$.

Explications

La primitive n'est **pas unique**.
Cela provient de ce que la dérivée fait « perdre de l'information » sur la courbe. Connaître la dérivée en tout point de la courbe ne permet pas de reconstruire la courbe. Il faut aussi avoir un point de départ.

Par exemple, si la fonction dérivée est $x \mapsto 2x$, alors on sait que la primitive est « du type » $x \mapsto x^2$. Par contre, cela peut être $x \mapsto x^2+1$ ou $x \mapsto x^2-2\pi$. Ces deux fonctions ont les mêmes pentes en tout point car elles sont translatées verticalement l'une par rapport à l'autre.
Ainsi, lorsqu'on cherche une primitive, on a à disposition toutes les fonctions dont les courbes sont translatées verticalement l'une par rapport à l'autre (qui ont les mêmes pentes en tout point).

Formellement (peut être sauté en première lecture) :
L'application qui à une fonction f – dérivable – associe sa dérivée n'est pas injective. Chaque élément de l'image peut donc avoir potentiellement plusieurs antécédents : plusieurs primitives.
Par contre, les primitives n'étant translatées que d'une constante, il suffit d'avoir une information supplémentaire pour connaître exactement la primitive.
Ainsi, l'application $f \mapsto (f', f(0))$ est injective pour l'ensemble des fonctions dérivables définies sur $\mathbf{R}$: si on impose le passage par un point, par exemple $(0, f(0))$, alors cela fixe la constante c de manière unique et l'application devient injective.
Par contre, si on s'autorise à travailler sur des domaines qui ne sont pas des intervalles, alors une seule constante ne suffit plus comme cela est précisé ci-dessous.

Preuve

Raisonnons par double inclusion : on note $E = \{F + \text{cste}, \quad \text{cste} \in \mathbf{K}\}$ et $\mathcal{P}$ l'ensemble des primitives de f.
$\forall \text{cste} \in \mathbf{K}$, $(F + \text{cste})' = F' = f$, donc $F + \text{cste} \in \mathcal{P}$. Ainsi $E \subset \mathcal{P}$.
Réciproquement si $G \in \mathcal{P}$, alors $G' = f = F'$, donc $(G - F)' = 0$.
Donc $G - F$ est constante sur I. Si on note cste cette constante, alors $G = F + \text{cste} \in E$.
Donc $\mathcal{P} \subset E$, et par double inclusion $\mathcal{P} = E$. ■

⚠ C'est faux si I n'est pas un intervalle. Il faut alors plusieurs constantes car la translation verticale peut différer entre deux parties de I qui ne se touchent pas.

Exemple

Donner toutes les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbf{R}^*$.
Solution :
Sur $\mathbf{R}_+^*$, les primitives de f sont de la forme $x \mapsto \ln x + c_+$ avec $c_+ \in \mathbf{R}$.
Sur $\mathbf{R}_-^*$, les primitives de f sont de la forme $x \mapsto \ln(-x) + c_-$ avec $c_- \in \mathbf{R}$.
Donc les primitives de f sur $\mathbf{R}$ sont de la forme

$$\left\{ x \mapsto \begin{cases} \ln|x| + c_+ & \text{si } x > 0 \\ \ln|x| + c_- & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad (c_+, c_-) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

La réciproque est immédiate.

Théorème 1.4

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une (donc une infinité) de primitives.

⚠ La continuité est une condition suffisante et non nécessaire. Il existe des fonctions non continues admettant des primitives. Pour cela il suffit de trouver une fonction F dérivable, dont la dérivée n'est pas continue (voir le chapitre de dérivation).

Preuve

Admis à ce stade, sera démontré au chapitre d'intégration. ■

2 La notation intégrale

Notation *(signe intégrale)*

Pour f une fonction continue sur un intervalle I, et pour $a \in I$,
on note $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f = \int_a^x f(t)\,dt$ l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Remarque : dans la notation $\int_a^x f(t)\,dt$, la fonction f s'appelle l'**intégrande**.

Preuve

L'existence d'une primitive F est admise à ce stade (théorème 1.4). Pour obtenir une primitive qui s'annule en a, il suffit de lui ajouter la constante $-F(a)$.
Unicité : on suppose qu'il existe deux primitives F et G de f qui s'annulent en a.
D'après le théorème 1.3, il existe une constante $k \in \mathbf{R}$ tel que $F = G + k$.
Or $G(a) + k = F(a) = 0$ et $G(a) = 0$, donc $k = 0$ et $F = G$.
D'où l'unicité de la primitive de f qui s'annule en a. ■

Exemple

Toute primitive d'une fonction continue ne s'écrit pas nécessairement sous la forme d'une intégrale.
Donner un exemple.
Solution :
$x \mapsto x^2 + 1$ est une primitive de $x \mapsto 2x$, mais comme elle ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$, on ne peut l'exprimer sous forme d'une intégrale de $x \mapsto 2x$.

Propriété 2.1 *(Cas complexe)*

Soit $f\ : I \to \mathbf{C}$, continue, $(a, b) \in I^2$,

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathfrak{Re}\,(f)(t)\,dt + i\int_a^b \mathfrak{Im}\,(f)(t)\,dt.$$

Remarque : contrairement au cas réel, on ne pourra pas interpréter l'intégrale complexe comme une surface.

Preuve

On sait que f est continue sur I si, et seulement si ses parties réelles et imaginaires le sont (ce qui justifie l'existence des deux intégrales).
Si on note $G : x \mapsto \int_a^x \mathfrak{Re}\,(f)(t)\,dt$ et $H : x \mapsto \int_a^x \mathfrak{Im}\,(f)(t)\,dt$,
alors $F(a) = 0 = 0 + i \times 0 = G(a) + iH(a)$,
et $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x) = \mathfrak{Re}\,(f)(x) + i\,\mathfrak{Im}\,(f)(x) = G'(x) + iF'(x)$.
I étant un **intervalle,** $G + iH$ est donc l'unique primitive de f qui s'annule en a.
On a donc l'égalité en particulier pour $x = b$. ■

Notation *(Crochet)*

Pour I un intervalle contenant a et b et $f \in \mathscr{C}^1(I)$, on note

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = [f]_a^b = f(b) - f(a).$$

⚠ On fait ici l'hypothèse que la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$, pour s'assurer de l'existence de la primitive.

Preuve

Pour $x \in [a, b]$, $x \mapsto \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ désigne l'unique primitive de f' qui s'annule en a.
Or f est une primitive de f'. Ainsi, d'après le théorème 1.3, il existe une constante $k \in \mathbf{R}$ telle que

$$\forall x \in [a, b], \quad \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) + k.$$

Or la primitive s'annule en a, donc $f(a) + k = 0$, et $k = -f(a)$.

Pour $x = b$, on a donc bien $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$. C'est ce que l'on note $[f]_a^b$. ■

Exemple

Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{\sin x} \mathrm{e}^{-t^2} dt$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer sa dérivée.

Solution :

$x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est définie et continue sur $\mathbf{R}$.
Elle admet donc des primitives définies sur $\mathbf{R}$. Si on note F l'une d'entre elles, alors $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = F(\sin x) - F(x)$.
Or, $x \mapsto \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, donc par composition et différence, f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \cos(x)\,F'(\sin x) - F'(x) = \cos(x)\,\mathrm{e}^{-\cos^2(x)} - \mathrm{e}^{-\sin^2(x)}.$$

Propriété 2.2 *(Échange des bornes)*

Soit f une fonction continue sur I et $(a, b) \in I^2$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve

Si on note F une primitive de f, alors $\int_a^b f = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f$. ■

Théorème 2.3 *(Linéarité & relation de Chasles)*

Soient $(f, g) \in \mathscr{C}^0(I, \mathbf{K})$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ et $(a, b, c) \in I^3$.

1. **Linéarité :** $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$
2. **Relation de Chasles**[1] **:** $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$

Preuve

1. Si on note F la primitive de f qui s'annule en a et G la primitive de g qui s'annule en a, alors $(\lambda F + \mu G)' = \lambda F' + \mu G' = \lambda f + \mu g$.
Donc $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$,
et elle s'annule évidemment en a. Ceci démontre bien que pour $x \in [a, b]$
$$\int_a^x \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda F(x) + \mu G(x) = \lambda \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$
En particulier pour $x = b$.
2. $F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a)$.

■

Exemple

Si on veut une primitive de $t \mapsto 3t - \cos t$, alors, on commence par chercher une primitive de $t \mapsto t$, et une primitive du cosinus, puis on utilise la linéarité :

$$\int_0^x (3t - \cos t)\ \mathrm{d}t = 3\int_0^x t\,\mathrm{d}t - \int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t = 3\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x - [\sin t]_0^x = \frac{3}{2}x^2 - \sin x.$$

1. La relation est également valable si $c \notin [a, b]$, quand f est continue « jusqu'à » c.

3 Primitives usuelles

Fonction	Primitive
x^α, $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$
$e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbf{R}^*$	$\dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda}$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$

Fonction	Primitive
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$
$\mathrm{sh}\,(x)$	$\mathrm{ch}\,(x)$
$\mathrm{ch}\,(x)$	$\mathrm{sh}\,(x)$
$\mathrm{th}\,(x)$	$\ln(\mathrm{ch}\,(x))$

Fonction	Primitive
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}\,(x)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}\,(x)$

On peut justifier toutes ces primitives en les dérivant. Celle du logarithme sera obtenue un peu plus loin par intégration par parties.

Exemple *(À savoir refaire)*

Pour $x > 1$, calculer $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$.

Solution :
On s'inspire de ce qui a été fait avec les sommes et on écrit $t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$.
On peut alors décomposer la fraction en 2 :

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2}\frac{t+1-(t-1)}{(t+1)(t-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right).$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} &= \frac{1}{2}\left(\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{x-1}{1}\right) - \ln\left(\frac{x+1}{3}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{2}\ln(3).\end{aligned}$$

En particulier, $t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)$ est une primitive de $\dfrac{1}{t^2-1}$.

4 Formes composées

Pour u une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Fonction	Primitive
$u'u^\alpha$, pour $\alpha \neq -1$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$

Fonction	Primitive
$u'e^u$	e^u

Fonction	Primitive
$u' \sin u$	$-\cos u$
$u' \cos u$	$\sin u$
$\dots$	$\dots$

Exemple

Trouver une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

Solution :
Si on pose $u : x \mapsto x^2 + 3$, on vérifie d'abord que u est à valeurs strictement positives sur $\mathbf{R}$ et que la fonction dont on cherche une primitive est donc continue sur $\mathbf{R}$: la fonction admet des primitives.
$\forall x \in \mathbf{R}$, $u'(x) = 2x$ ce qui ressemble furieusement au numérateur. On a affaire à une forme composée $g(u(x))$.

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{\frac{1}{2}u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

Donc une primitive est $x \to \sqrt{u(x)} = \sqrt{x^2+3}$.

Méthode *(Intégration de sinus et cosinus)*

Pour intégrer une fonction qui dépend des puissances de sinus et de cosinus,

- soit, on fait apparaître la dérivée d'une fonction composée,
- soit, on **linéarise** comme nous l'avons vu dans le chapitre sur les complexes et la trigonométrie (calculatoire).

Exemple

Calculer $\displaystyle\int_0^x \cos^2 t \sin^4 t \,\mathrm{d}t$.

Solution :

$$\begin{aligned}\cos^2 t\sin^4 t &= \frac{1}{2^6 i^4}\left(e^{it}+e^{-it}\right)^2\left(e^{it}-e^{-it}\right)^4\\ &= \frac{1}{2^6}\left(\left(e^{it}+e^{-it}\right)\left(e^{it}-e^{-it}\right)\right)^2\left(e^{it}-e^{-it}\right)^2\\ &= \frac{1}{2^6}\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)^2\left(e^{it}-e^{-it}\right)^2 \quad \text{id. remarquable}\\ &= \frac{1}{2^6}\left(\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)\left(e^{it}-e^{-it}\right)\right)^2\\ &= \frac{1}{2^6}\left(e^{3it}-e^{it}-e^{-it}+e^{-3it}\right)^2.\end{aligned}$$

On développe le carré et on obtient :

$$\begin{aligned}\cos^2 t\sin^4 t &= \frac{1}{2^6}\left(2\cos(6t)-4\cos(4t)-2\cos(2t)+4\right)\\ &= \frac{1}{2^5}\left(\cos(6t)-2\cos(4t)-\cos(2t)+2\right).\end{aligned}$$

On en déduit avec la linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_0^x \cos^2(t)\sin^4(t)\,dt &= \frac{1}{2^5}\left(\int_0^x \cos(6t)\,dt - 2\int_0^x \cos(4t)\,dt - \int_0^x \cos(2t)\,dt + 2x\right)\\ &= \frac{1}{2^5}\left(\frac{\sin(6x)}{6} - \frac{2\sin(4x)}{4} - \frac{\sin(2x)}{2} + 2x\right)\\ &= \frac{1}{2^5}\left(\frac{\sin(6x)}{6} - \frac{\sin(4x)}{2} - \frac{\sin(2x)}{2} + 2x\right).\end{aligned}$$

Exemple

Calculer $\displaystyle\int_0^x \cos^3 t\sin^4 t\,dt$.

Solution :

$$\begin{aligned}\cos^3(t)\sin^4(t) &= \cos(t)\left(1-\sin^2(t)\right)\sin^4(t) = \cos(t)\left(\sin^4(t)-\sin^6(t)\right)\\ &= \cos(t)\sin^4(t) - \cos(t)\sin^6(t).\end{aligned}$$

$$\int_0^x \cos(t)\sin^4(t)\,dt + \int_0^x \cos(t)\sin^6(t)\,dt = \left[\frac{\sin^5(t)}{5} - \frac{\sin^7(t)}{7}\right]_0^x = \frac{\sin^5(x)}{5} - \frac{\sin^7(x)}{7}.$$

Si on fait les calculs en utilisant la technique de linéarisation (plus lourd), alors on obtient l'expression linéarisée de celle que nous avons trouvé.

5 Changement de variable

Mise en œuvre du changement de variable :

Pour une fois, nous allons appliquer le théorème avant de l'énoncer.
Avec l'exemple précédent, voici comment on écrit le changement de variable.

$$\int_1^2 \frac{t}{\sqrt{t^2+3}}\,dt.$$

On pose $u = t^2+3$, alors $u'(t) = \frac{du}{dt} = 2t$, donc $du = 2t\,dt$.
On remplace dans l'expression et on trouve

$$\int_1^2 \frac{t}{\sqrt{t^2+3}}\,dt = \int_{t=1}^{t=2} \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{t^2+3}}\,2t\,dt = \int_{u=4}^{u=7} \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \left[\sqrt{u}\right]_4^7 = \sqrt{7}-\sqrt{4}.$$

On a changé les bornes d'intégration, en effet, quand t varie de 1 à 2, alors $u = x^2+3$ varie de $1^2+3 = 4$ à $2^2+3 = 7$.
Si on intègre de 1 à x, alors u varie de 4 à x^2+3, et on trouve :

$$\int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^2+3}}\,dt = \sqrt{x^2+3}-\sqrt{4}.$$

Remarque sur les notations : ici pour bien expliciter le changement de bornes, on a écrit des expressions du type $\displaystyle\int_{t=1}^{t=2} \frac{2t\,dt}{2\sqrt{u(t)}} = \int_{u=4}^{u=7} \frac{du}{2\sqrt{u}}$.

Exemple

Calculer $I = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{e^t+e^{-t}}$.

On pourra poser $u = e^t$.

Solution :

Si on pose $u = e^t$, alors $du = e^t\,dt$.

$$I = \int_0^x \frac{dt}{e^t+e^{-t}} = \int_0^x \frac{e^t\,dt}{e^{2t}+1} = \int_{e^0}^{e^x} \frac{du}{u^2+1} = \left[\operatorname{Arctan} u\right]_1^{e^x} = \operatorname{Arctan}\left(e^x\right) - \frac{\pi}{4}.$$

On peut vérifier que si on dérive l'expression obtenue (comme une composée), on retrouve la fonction dont on cherchait l'intégrale.

Il est temps d'énoncer le théorème. Cet énoncé théorique est à savoir, mais la priorité est de maîtriser la méthode sur les exemples.

Théorème 5.1 *(Le changement de variable)*

Soient I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$.
Soient $f \in \mathscr{C}^0(J,\mathbf{K})$ et $u \in \mathscr{C}^1(I, J)$. Pour tout $(a, b) \in I^2$, on a

$$\int_a^b u'(t)(f\circ u)(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.$$

Preuve

Pour la preuve, il suffit de voir que nous avons à faire à une **composition** de fonctions.
Si on note F une primitive de f sur J, alors
$\forall t \in [a, b]$, $u'(t)\left(f\circ u\right)(t) = u'(t)F'\left(u(t)\right) = \left(F\circ u\right)'(t)$.
Donc $\displaystyle\int_a^x u'(t)(f\circ u)(t)\,dt = \int_a^b \left(F\circ u\right)'(t)\,dt = \left(F\circ u\right)(b) - \left(F\circ u\right)(a)$.
Or, on voit également que
$\displaystyle\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du = \int_{u(a)}^{u(b)} F'(u)\,du = \left[F(u)\right]_{u(a)}^{u(b)} = F\left(u(b)\right) - F\left(u(a)\right)$.
Ce qui donne bien l'égalité. ∎

Explications

La formulation de ce théorème ne doit pas faire peur : si on regarde bien c'est ce que nous venons de faire : $u = u(t)$, donc $\mathrm{d}u = u'(t)\,\mathrm{d}t$.
Quand on veut intégrer $f\,(u(t)) \cdot u'(t)\,\mathrm{d}t$, on remplace $u(t)$ par u et on trouve $f(u)\,\mathrm{d}u$.
Quand t variait entre a et b, alors u varie entre $u(a)$ et $u(b)$.

Il s'agit simplement du changement d'indice que nous avons vu sur les sommes discrètes et que l'on généralise aux sommes « continues » (dans le chapitre d'intégration, nous interpréterons les intégrales comme des limites de sommes).

Remarques sur les hypothèses et notations :

- *Régularité :* u est supposée de classe $\mathscr{C}^1$ car une dérivée de u apparaît dans la première intégrale. On exige donc que $u' \in \mathscr{C}^0$, c'est-à-dire $u \in \mathscr{C}^1$.
  Par contre, f est simplement supposée continue. Aucune dérivée de f n'intervient.
- *Domaines de définition et image :* on compose f à droite par u, on a donc des ensembles qui « s'emboîtent » ainsi : $[a, b] \xrightarrow{u} I \xrightarrow{f} \mathbf{R}$.
  Cela explique également les domaines de définition et d'intégration.
- *Notation u :* dans la première intégrale, u désigne la fonction, alors que dans la deuxième expression « $f(u)\,\mathrm{d}u$ » : u désigne une variable au même titre que x ou t. Ainsi, on utilise la même notation pour deux objets différents (pour faciliter l'usage).

Exemple

Pour $x > 0$, calculer

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Solution :
On aimerait bien se « débarrasser » de la racine carrée.
On pose donc $u = \sqrt{t}$, d'où $du = \dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$.
Si $t \in [1, x]$, alors $u \in [1, \sqrt{x}]$, donc par changement de variable

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^x 2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} = \int_1^{\sqrt{x}} 2\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \left[-2\,\mathrm{e}^{-u}\right]_1^{\sqrt{x}} = -2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} + 2\,\mathrm{e}^{-1}.$$

Méthode

Lorsque l'on a une intégrale sous forme d'une fonction rationnelle en $\cos(t)$ et en $\sin(t)$, penser au changement de variable $u = \tan(t/2)$ si aucun autre n'apparaît naturellement.

Remarque : Il existe les règles de Bioche que l'on trouvera éventuellement dans certains cours, mais elles ne sont pas au programme et il est donc inutile de les apprendre.

Exemple

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + \sin t}$.

Solution :
Ici, on ne voit pas apparaître de changement de variable évident. Poser $u = \sin(t)$ ne convient pas car il manque un $\cos(t)$ au numérateur (dérivée) et le faire apparaître compliquerait beaucoup l'expression finale.
On pose donc $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, et on trouve alors

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(1 + u^2\right)\,\mathrm{d}t.$$

Or, $\sin(t) = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$, on trouve donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + \sin t} = \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{2u}{1+u^2}} \times \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2} = -2\left[\frac{1}{1+u}\right]_0^1 = 1.$$

6 Fonctions type à savoir intégrer

A Exponentielle complexe

Les primitives de l'exponentielle réelle sont valables pour $\lambda \in \mathbf{C}$ (pour le justifier, il suffit de dériver $\mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(\lambda)x}\,\mathrm{e}^{i\,\mathfrak{Im}(\lambda)x}$ comme un produit).

Propriété 6.1

Soit $\lambda \in \mathbf{C}^*$, une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ est

$$x \mapsto \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Les deux exemples qui suivent **sont explicitement au programme** et à savoir refaire rapidement et sans hésitations.
L'idée est de repasser par l'exponentielle complexe et d'utiliser la remarque ci-dessus.

Exemple

Soient $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ et $x \in \mathbf{R}$. Calculer $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{at}\cos(bt)\,\mathrm{d}t$.

Solution :
Si $(a, b) = (0, 0)$ alors la fonction est constante égale à 1 et l'intégrale vaut x.
Sinon, $\forall t \in [0, x]$, $\mathrm{e}^{at}\cos(bt) = \mathfrak{Re}\left(\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{e}^{ibt}\right) = \mathfrak{Re}\left(\mathrm{e}^{(a+ib)t}\right)$.

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{e}^{at}\cos(bt)\,\mathrm{d}t &= \mathfrak{Re}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{(a+ib)t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \mathfrak{Re}\left(\left[\frac{1}{a+ib}\,\mathrm{e}^{(a+ib)t}\right]_0^x\right)\\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\,\mathfrak{Re}\left((a-ib)\left(\mathrm{e}^{(a+ib)x}-1\right)\right)\\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\left(a\,\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)+b\,\mathrm{e}^{ax}\sin(bx)-a\right).\end{aligned}$$

Exemple

Soient $(a,\,b)\in\mathbf{R}^2$ et $x\in\mathbf{R}$. Calculer $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{at}\sin(bt)\,\mathrm{d}t$.

Solution :

On fait de même en prenant la partie imaginaire.
Pour $(a,\,b)=(0,\,0)$, l'intégrale et nulle.
Sinon, elle vaut

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{e}^{at}\sin(bt)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{a^2+b^2}\,\mathfrak{Im}\left((a-ib)\left(\mathrm{e}^{(a+ib)x}-1\right)\right)\\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\left(a\,\mathrm{e}^{ax}\sin(bx)-b\,\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)+b\right).\end{aligned}$$

Méthode *(Polynôme exponentielle)*

Si P est une fonction polynomiale réelle et $\alpha\in\mathbf{C}^*$, alors $x\mapsto P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ admet une primitive en $x\mapsto Q(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec Q une fonction polynomiale de même degré que P.

En particulier pour $(a,\,b)\in\mathbf{R}^2$, non tous deux nuls, une primitive de $x\mapsto P(x)\,\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ peut être cherchée sous la forme $x\mapsto \mathrm{e}^{ax}\left(Q(x)\cos(bx)+R(x)\sin(bx)\right)$.

De même une primitive de $x\mapsto P(x)\,\mathrm{e}^{ax}\mathrm{ch}\,(bx)$ peut être cherchée sous la forme $x\mapsto \mathrm{e}^{ax}\left(Q(x)\mathrm{ch}\,(bx)+R(x)\mathrm{sh}\,(bx)\right)$.

Idem, si on remplace le cosinus par un sinus.

Preuve

On note , pour tout $x\in\mathbf{R}$, $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$.

Si on pose $Q(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kx^k$, alors la dérivée en x de $x\mapsto Q(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ s'écrit

$$\left(Q'(x)+\alpha Q(x)\right)\,\mathrm{e}^{\alpha x}=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left((k+1)b_{k+1}+\alpha b_k\right)x^k+\alpha b_nx^n\right)\mathrm{e}^{\alpha x}.$$

Reste à faire l'identification avec $P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ et on trouve alors un système triangulaire qui se résout de proche en proche.

$$\begin{cases}\alpha b_n &= a_n\\ nb_n+\alpha b_{n-1} &= a_{n-1}\\ (n-1)b_{n-1}+\alpha b_{n-2} &= a_{n-2}\\ \vdots\\ b_1+\alpha b_0 &= a_0\end{cases}\iff\begin{cases}b_n &= \frac{a_n}{\alpha}\\ b_{n-1} &= \frac{1}{\alpha}\left(a_{n-1}-nb_n\right)\\ b_{n-2} &= \frac{1}{\alpha}\left(a_{n-2}-(n-1)b_{n-1}\right)\\ \vdots\\ b_0 &= \frac{1}{\alpha}(a_0-b_1)\end{cases}$$

On obtient donc une solution sous la forme souhaitée.
Pour le cosinus ou le sinus, on l'intérprète comme partie réelle ou imaginaire d'une exponentielle complexe et on applique la linéarité.
Pour les fonctions hyperpoliques, on les décompose également avec les exponentielles et on applique de même la linéarité (chaque exponentielle donne alors son propre polynôme, mais quitte à faire demi-sommes et demi-différences, on peut exprimer la solution en sinus et cosinus hyperboliques). ■

Exemple

Calculer $\int_0^x(t^3+2t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

Solution :

On peut résoudre par intégrations par parties successives pour faire descendre le degré du polynôme comme nous le verrons plus loin, mais ici ce serait un peu long.
On écrit donc $\forall t\in\mathbf{R},\ f(t)=(at^3+bt^2+ct+d)\,\mathrm{e}^{it}$ que l'on dérive en $f'(t)=(iat^3+(3a+ib)t^2+(2b+ic)t+c+id)\,\mathrm{e}^{it}$ et on souhaite que $\forall t\in\mathbf{R},\ f'(t)=(t^3+2t)\,\mathrm{e}^{it}$ donc par identification, on obtient

$$\begin{cases}a=\frac{1}{i}=-i\\ b=\frac{1}{i}\times(-3a)=3\\ c=\frac{1}{i}(2-2\times 3)=4i\\ d=-\frac{c}{i}=-4.\end{cases}$$

On trouve alors

$$\forall t\in\mathbf{R},\ f(t)=i(-t^3+4t)\,\mathrm{e}^{it}+(3t^2-4)\,\mathrm{e}^{it}.$$

On prend la partie imaginaire pour avoir une primitive et on trouve $(-t^3+4t)\cos(t)+(3t^2-4)\sin(t)$. Donc

$$\int_0^x(t^3+2t)\sin(t)\,\mathrm{d}t=(-x^3+4x)\cos(x)+(3x^2-4)\sin(x).$$

B Primitives de fractions rationnelles simples

Méthode

Pour intégrer une fraction rationnelle du type

$$\frac{1}{t^2+bt+c}$$

sur un intervalle de son domaine de définition.
On cherche les racines de t^2+bt+c.

1. S'il y a 2 racines réelles distinctes α et β.
   On cherche a, b ne dépendant pas de t tels que $\dfrac{1}{t^2+bt+c}=\dfrac{a}{t-\alpha}+\dfrac{b}{t-\beta}$ et on intègre avec les logarithmes.
2. S'il y a 1 racine double α.
   On reconnaît une primitive usuelle.
3. S'il n'y a pas de racines réelles.
   On met le dénominateur sous forme canonique et avec un changement de variable on obtient une forme en $\dfrac{1}{u^2+1}$, qui se primitive avec Arctan .

Remarque : Pour une expression de la forme $t\mapsto \frac{1}{at^2+bt+c}$, si $a\neq 0$, alors on factorise par a et on se ramène au cas de la méthode, et si $a=0$, , alors on reconnaît simplement la dérivée d'un logarithme ou d'une fonction linéaire.

Exemple *(Résultat à connaître)*

Soient $a\neq 0$ et $x\in\mathbf{R}$, calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2}$.

Solution :
On factorise par a au dénominateur et on voit apparaître la dérivée de Arctan $\left(\frac{t}{a}\right)$ (si besoin faire le changement de variable $u=\frac{t}{a}$).
On trouve alors

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2}=\frac{1}{a}\int_0^x \frac{1}{a}\times\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{a}\right)\right]_0^x$$
$$=\frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Résultat à connaître :

$$\boxed{\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2}=\frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right).}$$

Exemple

Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+1}$ en précisant son domaine de définition.

Solution :
On remarque que $t^2+2t+1=(t+1)^2$ et que cette expression s'annule en $t=-1$.
On cherche la primitive qui s'annule en 0, donc x doit être « du même côté » de -1 que 0.
Ainsi l'intégrale est définie pour tout $x>-1$.

$$\forall x>-1,\ \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+1}=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2}=\left[-\frac{1}{t+1}\right]_0^x=-\frac{1}{x+1}+1.$$

Exemple

Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t-3}$ en précisant son domaine de définition.

Solution :
On remarque que $t^2+2t-3=(t-1)(t+3)$ et que cette expression s'annule en $t=1$ et en $t=-3$.
On cherche la primitive qui s'annule en 0, donc x doit être sur l'intervalle du domaine de continuité qui contient 0.
Ainsi l'intégrale est définie pour tout $x\in]-3,1[$.
On remarque que $\dfrac{1}{(t-1)(t+3)}=\dfrac{1}{4}\dfrac{t+3-(t-1)}{(t-1)(t+3)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t+3}\right)$.

Ainsi, $\forall x\in]-3,1[$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t-3}=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)(t+3)}$

$$=\frac{1}{4}\int_0^x \frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+3}\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{4}\left[\ln|t-1|-\ln|t+3|\right]_0^x$$
$$=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+\ln(3)\right).$$

Exemple

Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+3}$ en précisant son domaine de définition.

Solution :
Le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$, donc l'intégrande est continue sur $\mathbf{R}$.
Donc l'intégrale est définie pour tout $x\in\mathbf{R}$.

$$\forall x\in\mathbf{R},\ \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+3}=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2+2}=\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}.$$

On pose $u=\dfrac{t+1}{\sqrt{2}}$, et donc $\mathrm{d}u=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}t$, d'où $\mathrm{d}t=\sqrt{2}\,\mathrm{d}u$.

En appliquant ce changement de variable $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{x+1}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\mathrm{Arctan}\,(u)\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{x+1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Exemple

Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{2t+1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t$ en précisant son domaine de définition.

Solution :

Le dénominateur de l'intégrande ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$, donc la fonction à intégrer est continue sur $\mathbf{R}$.
Ainsi, l'intégrale est définie pour tout $x \in \mathbf{R}$.
On voit que le numérateur est presque la dérivée du dénominateur, on n'est donc pas loin d'une formule $\dfrac{u'}{u}$.

$$\int_0^x \frac{2t+1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{2t}{t^2+4} + \frac{1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t = \left[\ln\left(t^2+4\right)\right]_0^x + \frac{1}{4}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}.$$

On pose $u = \frac{t}{2}$, donc $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{2}$ c'est-à-dire $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u$.
Par changement de variable, on trouve

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1} = 2\int_0^{x/2} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = 2\left[\mathrm{Arctan}\,(u)\right]_0^{x/2} = 2\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right).$$

La solution est donc

$$\int_0^x \frac{2t+1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{x^2+4}{4}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right).$$

7 L'intégration par parties

Théorème 7.1 *(Intégration par parties)*

Si u et v sont deux applications $\mathscr{C}^1([a,b],\mathbf{K})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve

La preuve est triviale et c'est elle qui permet de bien comprendre cette formule. Elle provient de la dérivation d'un **produit**.
$(uv)' = u'v + uv'$, donc uv est une primitive de $u'v+uv'$ qui est continue sur $[a,b]$ (car $u, v \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbf{K})$)
Donc $\int_a^b u'v + uv' = [uv]_a^b$, et avec la linéarité on obtient la formule voulue. ■

Exemple

Calculer $\int_0^x t\sin t\,\mathrm{d}t$.

Solution :

On pose pour $t \in [0,\, x]$

$$\begin{aligned} u(t) &= t & v(t) &= -\cos(t) \\ u'(t) &= 1 & v'(t) &= \sin(t) \end{aligned}$$

$$(u,\, v) \in \mathscr{C}^1\left([0,\, x],\, \mathbf{R}\right).$$

Je conseille de présenter les calculs ainsi pour ne pas se tromper.
On choisit une diagonale avec les éléments de l'intégrande. Ici, par exemple $u(t)$ et $v'(t)$ et on calcule ensuite les deux autres termes par dérivation et primitive.
Ici, c'est évidemment t que l'on dérive, ce qui permet de le faire « disparaître. »
Pour écrire la formule, on met le produit de la première ligne entre les crochets et on soustrait avec l'intégrale de la deuxième diagonale.

$$\begin{aligned}\int_0^x t\sin(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-t\cos(t)\right]_0^x - \int_0^x 1\times(-\cos(t))\,\mathrm{d}t \\ &= -x\cos(x) + \int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -x\cos(x) + \left[\sin(t)\right]_0^x \\ &= -x\cos(x) + \sin(x).\end{aligned}$$

Exemple *(À savoir refaire)*

Trouver une primitive de $\ln$.

Solution :

Ici, l'intégration n'apparaît pas immédiatement. C'est une astuce qu'il faut connaître : $\ln t = 1\cdot\ln t$ et on peut intégrer 1 et dériver ln.
On cherche par exemple, une primitive qui s'annule en 1.
⚠ on ne peut pas intégrer sur $[0,x]$ car la fonction n'est pas continue en 0.
On pose, pour $t > 0$,

$$\begin{aligned} u(t) &= t & v(t) &= \ln(t) \\ u'(t) &= 1 & v'(t) &= \frac{1}{t} \end{aligned}$$

$$(u,\, v) \in \mathscr{C}^1\left(\mathbf{R}_+^*\right).$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t &= \left[t\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{t}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= x\ln(x) - (x-1) \\ &= x\ln(x) - x + 1.\end{aligned}$$

Les primitives étant « à une constante près », on trouve donc que $x \mapsto \ln(x)$ a pour primitive $x \mapsto x\ln(x) - x$.

Exemple

Soient $(a,\, b) \in \mathbf{R}^2$, $n \in \mathbf{N}$ et $(f,\, g) \in \mathscr{C}^n\left([a,\, b]\right)$.
Généraliser la formule d'intégration par parties pour exprimer $\int_a^b f^{(n)}(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de $\int_a^b f(t)g^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$.
$f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ désignent respectivement les dérivées $n-$ième de f et g.

Solution :

On montre par récurrence que

$$\int_a^b f^{(n)}(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\left[(-1)^k f^{(n-k-1)}(t)g^{(k)}(t)\right]_a^b + (-1)^n\int_a^b f(t)g^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Initialisation : pour $n=0$, les deux expressions sont identiques (les sommes sont vides).
Hérédité : on suppose l'égalité pour $n \in \mathbf{N}$ fixé.
En appliquant cette relation à f' on trouve :

$$\int_a^b f^{(n+1)}(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\left[(-1)^k f^{(n+1-k-1)}(t)g^{(k)}(t)\right]_a^b + (-1)^n\int_a^b f'(t)g^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On applique à nouveau la formule d'intégration par parties à la dernière intégrale :

$$\begin{aligned}\int_a^b f^{(n+1)}(t)g(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[(-1)^k f^{(n+1-k-1)}(t)g^{(k)}(t)\right]_a^b + (-1)^n\left[f(t)g^{(n)}(t)\right]_a^b \\ &\quad +(-1)^{n+1}\int_a^b f(t)g^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^k f^{(n+1-k-1)}(t)g^{(k)}(t)\right]_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b f(t)g^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

8 Propriétés de l'intégrale

On finit ce chapitre en donnant quelques propriétés de l'intégrale, en particulier des inégalités pour étudier des suites d'intégrales et réaliser des comparaisons.
Ces propriétés seront reprises et complétées au moment du chapitre d'intégration.

Théorème 8.1 *(Inégalités pour une fonction réelle)*

Soit $(f, g) \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbf{R})$.

1. **Positivité :** Si $f \geqslant 0$ (et si $a \leqslant b$), alors $\int_a^b f \geqslant 0$.
2. **Positivité stricte :** Si $f > 0$ sur I sauf en un nombre fini de points et si $a < b$, alors $\int_a^b f > 0$.
3. **Croissance :** si $f \leqslant g$, et $a \leqslant b$, alors $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

Remarque : Ces inégalités n'ont de sens que pour les fonctions à valeurs **réelles.**
En effet, on n'a pas d'inégalités sur $\mathbf{C}$.
⚠ Pour la positivité stricte il faut vérifier $a < b$ et non pas seulement $a \leqslant b$.

Preuve

1. Soit $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
   F est dérivable sur $[a,\, b]$ et $\forall x \in [a,\, b]$, $F'(x) = f(x) \geqslant 0$.
   Donc F est croissante sur $[a,\, b]$ et comme, $F(a) = 0$, alors $F(b) \geqslant 0$.
2. Idem, mais la fonction F est strictement croissante.
3. $g - f \geqslant 0$ sur $[a,\, b]$ donc $\int_a^b g - f \geqslant 0$ d'après la positivité.
   Et en utilisant la linéarité, on trouve $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

■

Théorème 8.2 *(Inégalité triangulaire)*

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbf{K})$, avec $a \leqslant b$

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|\,.$$

Remarque : Cette inégalité est aussi valable pour les fonctions à valeurs complexes (car on travaille avec le module).

Preuve

Dans le cas réel, la preuve est élémentaire et découle directement de la croissance de l'intégrale.
C'est pour le cas complexe qu'elle est plus délicate.
On peut écrire $\int_a^b f = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r \geqslant 0$.
Alors, par linéarité,

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = r = \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta}\,\mathrm{d}t.$$

Ce qui implique en particulier que cette intégrale est réelle. On note $f\,\mathrm{e}^{-i\theta} = u + iv$, avec u et v désignant respectivement les parties réelles et imaginaires de la fonction. On sait alors que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta}\,\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$.
Ici, par nullité de la partie imaginaire, on a donc

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta}\,\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathfrak{Re}\left(f(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta}\right)\,\mathrm{d}t.$$

Or, $\mathfrak{Re}\left(f(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta}\right) \leqslant \left|f(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta}\right| = |f(t)|$, par croissance de l'intégrale (pour les fonctions réelles), on en déduit donc

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

■