Analyse asymptotique

« Toute vertu est fondée sur la mesure. »
Sénèque

Mise en perspective :
L'objet de ce chapitre est d'étudier le comportement d'une fonction au voisinage d'un point (ou de l'infini) : à quoi "ressemble" localement la fonction.
Nous avons déjà partiellement répondu à cette question grâce aux notions de limites & continuité et de dérivabilité dans les chapitres précédents.

1 Introduction

Commençons donc par voir comment ces précédents chapitres peuvent être interprétés comme des outils d'approximation :

- Dire qu'une fonction est continue en un point x_0, c'est signifier qu'il n'existe pas de « *décrochement* » de la courbe en ce point : lorsque x s'approche de x_0, $f(x)$ s'approche infiniment près de $f(x_0)$.

  C'est ce que nous avions écrit sous la forme

  $$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

  Ainsi, $f(x_0)$ constitue une bonne approximation de $f(x)$ au voisinage de x_0. On parle d'une approximation à l'ordre 0, parce que cela revient à approximer la courbe par une droite horizontale : une constante. C'est-à-dire une fonction polynomiale de degré 0 (si la constante est non nulle).

- La dérivabilité permet d'obtenir une information supplémentaire : à quelle vitesse $f(x)$ s'approche de $f(x_0)$. C'est ce que nous avons traduit par la notion de « pente ». Le nombre dérivé permet de quantifier cette vitesse.

  Graphiquement, la courbe de f est approximée par sa tangente : une droite affine. C'est une approximation à l'ordre 1 car on approche la courbe par une fonction polynomiale de degré 1 (si $f'(x_0) \neq 0$).

Dans ce chapitre, nous allons prolonger ce travail en approximant la fonction considérée par une fonction polynomiale de degré n.
En effet, les polynômes sont des outils très simples à manipuler (si, si ...) et ils permettent donc d'avoir facilement une idée de la forme de la courbe au voisinage du point x_0.

Par exemple, supposons que nous voulions évaluer le prix d'une livraison. On sait que le prix dépend du poids, mais en suivant une loi qui ne nous est pas connue.

1. Si la semaine dernière je me suis fait livrer 10 kg pour 25 € et que cette semaine je dois me faire livrer $9,8$ kg, alors je peux estimer le prix de la livraison à environ 25 € également car les quantités sont proches.
   En réalisant cette approximation, je fait l'hypothèse que le prix est une fonction continue du poids sur l'intervalle de poids considéré. Mais ce n'est pas toujours le cas : si on prend en compte les effets de seuil pour les livraisons alors ajouter 100 g de produit peut provoquer soudainement un surcoût important car il faut changer de mode de livraison.

2. Si ma livraison de $9,8$ kg m'a coûté 24 €, alors je peux estimer la variation du prix en fonction du poids au voisinage de 10 kg. C'est ce qui correspond à la dérivée. En terme financier, on parle de prix marginal :

   $$\tau_{10} = \frac{25-24}{10-9,8} = 5 \text{ €/kg}.$$

Cette nouvelle information me donne plus de précision : si désormais, je dois me faire livrer $10,1$ kg, alors je peux estimer le prix à $25+0,1\times 5 = 25,5$ € : les 100 g supplémentaires ont été estimés à 5 €/kg.
La connaissance du prix marginal me permet d'obtenir une meilleure approximation du prix.

3. On peut continuer aux ordres supérieurs : est-ce que lorsque j'achète, le prix marginal diminue ou augmente ? de combien ?
   Et ainsi de suite...

Vocabulaire : Dans ce chapitre, on appelle *vrai* intervalle, un intervalle qui contient au moins deux points (donc une infinité).
Cette exigence vient du fait que nous avons besoin de nous approcher du point pour pouvoir parler d'approximation.

2 Étude locale des fonctions

Cette première partie est un préambule qui permet de définir ce que sont mathématiquement les *ordres de grandeur* dont nous avons parlé en introduction.

A Définitions

Définition 2.1

Soit I un vrai intervalle de $\mathbf{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$ un point adhérent à I (éventuellement infini).
Soient f et g définies sur I telles que g **ne s'annule pas** au voisinage de x_0.

1. On dit que f est **négligeable devant** g au voisinage de x_0, si

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in I}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

   On note $f(x) = o_{x_0}(g(x))$ ou $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$

2. On dit que f est **équivalente à** g en x_0, si

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in I}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

   On note $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ ou $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$

Lorsqu'il n'y a aucune ambigüité sur le point x_0,
on peut remplacer $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ par $f(x)\sim g(x)$. De même pour la négligeabilité.

Explications
Il faut comprendre ces notions en terme d'**ordre de grandeur**.
La notion de négligeabilité est capitale pour l'approximation. Ainsi, dire que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 signifie que $f(x)$ est infiniment petit, en valeur absolue, par rapport à $g(x)$ lorsque l'on s'approche de x_0 : le quotient tend vers 0.
Lorsqu'il s'agira de réaliser une approximation, il faudra donc considérer g en priorité pour obtenir le bon ordre de grandeur, f sera négligeable.

L'équivalence traduit au contraire le fait que f et g sont du même ordre de grandeur. Ainsi, f constituera une bonne approximation de g au voisinage de x_0 (et réciproquement).

Propriété 2.2

Si deux fonctions ont une même limite **finie non nulle**, alors elles sont équivalentes.
⚠ Cela est **faux** si la limite est nulle ou infinie.

Preuve
Si f et g tendent vers $\lambda \neq 0$ en x_0, alors elles ne s'annulent pas au voisinage de x_0, et leur quotient tend vers 1 (quotient de limites). Ainsi, elles sont équivalentes en x_0. ■

⚠ Pour éviter quelques erreurs communes :

1. Une fonction n'est **jamais**[1] équivalente à 0.
2. Ne **jamais** sommer des équivalents (nous utiliserons les développements limités en cas de somme).
3. Vérifier que le dénominateur ne s'annule pas avant de passer au quotient.

Exemple
Soit $\lambda \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \lambda$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lambda$.
⚠ C'est **FAUX** si $\lambda = 0$.

Exemple
$f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(1)$ est synonyme de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$: la fonction tend vers 0, elle est négligeable par rapport à 1.
$f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(1)$ et $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(5)$ sont synonymes : être négligeable devant une constante (non nulle) ne dépend pas du choix de la constante (contrairement à l'équivalence).

Exemple *(contre-exemple)*
Si la limite n'est pas finie non nulle, alors deux fonctions peuvent avoir la même limite sans être équivalentes. Trouver un contre-exemple.

1. (sauf si la fonction est nulle, mais quel intérêt ?)

Solution :
$x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ ont la même limite en $+\infty$ et en 0, mais ne sont équivalentes ni en $+\infty$, ni en 0.

Exemple

Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, On définit $f : x \mapsto x \ln x + \lambda$ et $g : x \mapsto (\lambda - 1)\,\mathrm{e}^x + 1$.
Étude de l'éventuelle équivalence en 0 et en $+\infty$ selon la valeur de λ.
Solution :

- **En** 0 **:**
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lambda \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = \lambda.$$
  - Si $\lambda \neq 0$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \lambda$ et $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \lambda$.
    $\lambda \neq 0$, donc g est non nulle sur un voisinage de 0, et par quotient des limites
    $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$
    Donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} g(x)$.
    On peut aussi utiliser l'argument de transitivité de la relation d'équivalence vue au chapitre sur les limites.
  - Si $\lambda = 0$, alors il faut faire une étude spécifique. Pour cela on étudie le quotient.
    g ne s'annule pas au voisinage de 0 (privé de 0).
    $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x \ln x}{-(\mathrm{e}^x - 1)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x \ln x}{-x} \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty.$$
    Donc $f(x) \underset{x\to 0}{\not\sim} g(x)$, même si les deux fonctions ont la même limite en 0.
- **En** $+\infty$ **:**
  On suppose $\lambda > 1$ (pour que les deux fonctions aient la même limite, sinon, on sait qu'elles ne sont pas équivalentes), ainsi
  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$
  Mais, si on étudie le quotient au voisinage de $+\infty$ (g ne s'y annule pas) :
  $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x \ln x + \lambda}{(\lambda - 1)\,\mathrm{e}^x + 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x \ln x}{(\lambda - 1)\,\mathrm{e}^x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$
  (par croissances comparées)
  Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\not\sim} g(x)$, même si les deux fonctions ont la même limite en $+\infty$.

Théorème 2.3

f est **équivalente à** g au voisinage de $x_0 \in \overline{I}$, si et seulement si $f - g$ est négligeable devant g au voisinage de x_0.

Preuve

$\forall x \in I$, $\frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} - 1$. Ainsi $\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}$ tend vers 0 si, et seulement si $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1. ∎

Explications

Les deux fonctions sont équivalentes lorsque l'écart entre ces deux fonctions est négligeable. La différence peut être interprétée comme un terme d'erreur dont l'ordre de grandeur est négligeable :
$$f(x) = g(x) + \varepsilon(x)$$
avec $\varepsilon(x)$ un terme d'erreur négligeable devant g (ou devant f) quand $x \to x_0$.
Autrement dit, rajouter un terme négligeable à une fonction ne change pas l'équivalent.

Exemple

$1 \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x$. En effet, x est une quantité négligeable devant 1 au voisinage de 0.

Théorème 2.4 *(Équivalence de deux fonctions)*

Soient f et g deux fonction définie sur I, $x_0 \in \overline{I}$ telles que $f \sim_{x_0} g$, alors

1. f et g sont de même signe au voisinage de x_0
2. Si g admet une limite (finie ou infinie) en x_0 alors f admet la même limite.

⚠ Ce sont des implications, les réciproques sont fausses en général : l'égalité des limites ne donne pas l'équivalence sauf si cette limite est finie et non nulle (voir le contre-exemple plus haut).

Preuve

1. Le quotient tend vers 1, donc il est strictement positif sur un voisinage de x_0 : f et g sont localement de même signe.
2. Si on note $\alpha : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$, alors $\alpha(x)$ tend vers 1 en x_0.
   Or $\forall x \in I$, $f(x) = \alpha(x)\, g(x)$, donc par opération sur les limites : si $g \to a \in \mathbf{R} \cup (\pm\infty)$, alors f tend vers la même limite.

∎

Ainsi, trouver une fonction équivalente « plus simple » peut permettre de démontrer l'existence (ou l'absence) d'une limite et de calculer sa valeur. C'est un intérêt essentiel des équivalents.

Exemple

Soit f définie sur $\mathbf{R} \setminus \{x_0\}$, si on suppose que $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} 2x$, alors f admet une limite finie en x_0 qui vaut $2x_0$.
En particulier, f est alors prolongeable par continuité en x_0 par la valeur $2x_0$.

3 Croissances comparées

Théorème 3.1 *(Rappel : Croissances comparées en $+\infty$)*

Soient $\alpha, \beta, \gamma, a, b$ des réels.

1. Si $\alpha > 0$ alors $\ln^{\beta}(x) = o_{+\infty}(x^{\alpha})$.
2. Si $a > 1$ alors $x^{\alpha} = o_{+\infty}(a^{x})$.
3. Si $\alpha < \beta$ alors $x^{\alpha} = o_{+\infty}(x^{\beta})$.
4. Si $0 < a < b$ alors $a^{x} = o_{+\infty}(b^{x})$.

Pour se rappeler des deux premières propriétés :

$$\boxed{\text{logarithmes} \ll \text{puissances (fixes positives)} \ll \text{exponentielles (de base } a>1\text{).}}$$

Les deux autres propriétés sont très naturelles :

2. x^2 croît plus vite que x au voisinage de $+\infty$. Plus généralement, x^{β} croît plus vite que x^{α} si $\beta > \alpha$.
3. 5^x croit plus vite que 2^x au voisinage de $+\infty$, on généralise avec $a^x \ll b^x$ pour $0 < a < b$ (la stricte positivité est imposée pour que la puissance soit bien définie $e^{x \ln a}$).

Remarque : a^x est bien une exponentielle de x en base a car $a^x = e^{x \ln(a)}$.

Preuve

1. les puissances de x ne s'annulent pas au voisinage de $+\infty$ et
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}}{x\beta} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\beta-\alpha} = 0}$$
car $\beta - \alpha > 0$.
donc $x^{\alpha} = o_{+\infty}\left(x^{\beta}\right)$.
2. La preuve a été vue au moment du chapitre sur les fonctions usuelles au premier semestre. Voici rapidement le schéma de la preuve telle que nous l'avions faite :
On a $\frac{1}{t} \leqslant 1$ pour $t \geqslant 1$ et en intégrant entre 1 et x, on en déduit que pour $x \geqslant 1$, $\ln x \leqslant x - 1 \leqslant x$.
(on peut aussi l'obtenir en étudiant $x \mapsto \ln x - x$ qui est décroissante et vaut -1 en 0.)
En utilisant la relation $\ln x^{\gamma} = \gamma \ln x$ pour $\gamma > 0$, on montre que $\gamma \ln x \leqslant x^{\gamma}$, puis $\frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{1}{\gamma} x^{\gamma - 1} \to 0$ si on choisit $\gamma \in]0, 1[$.
On montre avec la même astuce, en particularisant γ, pour des puissances α et β comme dans l'énoncé.
3. b^x est une exponentielle qui ne s'annule donc pas
$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x = e^{x \ln \frac{a}{b}}.$$
Or $\frac{a}{b} < 1$, donc $\ln \frac{a}{b} < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x \ln \frac{a}{b} = -\infty$ et par composition
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{b^x} = 0.$$
4. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $a^x \neq 0$ comme exponentielle. Ainsi
$$\frac{x^a}{a^x} = \frac{e^{a \ln x}}{e^{x \ln a}} = e^{a \ln x - x \ln a} = e^{x \ln a \left(\frac{a}{\ln a} \frac{\ln x}{x} - 1\right)}$$
($\ln a \neq 0$ car $a > 1$).
$\frac{a}{\ln a} \in \mathbf{R}$ et d'après les points précédents, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a}{\ln a} \frac{\ln x}{x} = 0$.
Donc $\frac{a}{\ln a} \frac{\ln x}{x} - 1 \to -1$ et par produit, le terme dans l'exponentielle tend vers $-\infty$.
Et par composition
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{a^x} = 0.$$

■

Exemple

⚠ Les inégalités strictes de la proposition ne peuvent pas être remplacées par des inégalités larges.
Si $\alpha = 0$ et $\beta > 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln^{\beta}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = 1$.
Ainsi $x^{\alpha} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\ln^{\beta}(x)\right)$ (et non le contraire comme dans la propriété).

Théorème 3.2 *(Croissances comparées en 0)*

Soient $\alpha, \beta, \gamma, a, b$ des réels,

1. Si $\alpha < \beta$ alors $x^{\beta} = o_{x\to0}(x^{\alpha})$.
2. Si $\alpha > 0$ alors $x^{\alpha} = o_{x\to0}(\ln^{\beta} x)$.

Remarque : Cela inverse les relations pour les puissances par rapport à $+\infty$.

Preuve

Cela se prouve en composant les limites vues en $+\infty$ par $x \mapsto \frac{1}{x}$. ■

Exemple

Si $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$, alors
$$f(x) = \underset{x\to0}{o}(g(x)), \qquad g(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(f(x)) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to1}{\sim} (g(x)).$$
Si $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$, alors
$$g(x) = \underset{x\to0}{o}(f(x)), \qquad f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(g(x)) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to1}{\sim} (g(x)).$$

On peut généraliser les relations précédentes sur les puissances de x, aux puissances de n'importe quelle fonction **qui tend vers** $+\infty$:

Propriété 3.3 *(Cas des fonctions divergeant vers $+\infty$)*

Soit f définie sur un vrai intervalle I, et $x_0 \in \overline{I}$ tel que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

1. Si $\alpha < \beta$ alors
$$(f(x))^\alpha = \underset{x\to x_0}{o}\left((f(x))^\beta\right).$$
2. Si $\beta > 0$, alors
$$\ln^\alpha(f(x)) = \underset{x\to x_0}{o}\left(f(x)^\beta\right) \qquad \text{et} \qquad (f(x))^\alpha = \underset{x\to x_0}{o}\left(e^{\beta f(x)}\right).$$

Preuve

Il suffit de passer au quotient (comme $f \to +\infty$, elle ne s'annule pas au voisinage de x_0), et d'appliquer la propriété de composition des limites. ■

Propriété 3.4 *(Transitivité de la relation de négligeabilité)*

Soient f, g, h trois fonctions définies sur I et $x_0 \in \overline{I}$,

$$\text{Si} \quad f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \underset{x\to x_0}{o}(h(x)) \quad \text{alors} \quad f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(h(x)).$$

Si f est négligeable devant g qui est elle-même négligeable devant h, alors f est négligeable devant h : c'est naturel. La poussière d'une poussière reste une poussière !

⚠ Contrairement à la relation d'équivalence, la relation de négligeabilité n'est ni réflexive, ni symétrique.

Preuve

Il suffit de revenir à la définition (en supposant la non annulation au voisinage de x_0, sinon, on prend une des deux autres définitions et on y arrive de la même façon) :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 0.$$

Donc par produit de limites,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)} = 0.$$

Ainsi $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(h(x))$. ■

A Opérations sur les relations

Propriété 3.5 *(Opérations sur les petits o)*

Soient f_1, f_2, g_1 et g_2 définies sur un vrai intervalle I et $x_0 \in \overline{I}$,

1. Si $f_1(x) = \underset{x\to x_0}{o}((g_1(x))$ et $f_2(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g_1(x))$, alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$,
$$\lambda f_1(x) + \mu f_2(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g_1(x)).$$
2. Si $f_1(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g_1(x))$ et $f_2(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g_2(x))$, alors
$$f_1(x) f_2(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g_1(x) g_2(x)).$$
3. Si $f_1(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g_1(x))$ et h définie sur I, alors
$$f_1(x) h(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g_1(x) h(x)).$$
4. Si $f_1(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g_1(x))$ et $\alpha > 0$, alors
$$(f_1(x))^\alpha = \underset{x\to x_0}{o}((g_1(x))^\alpha).$$

Preuve

En accord avec l'esprit du programme, on suppose que g_1 et g_2 ne s'annulent pas au voisinage de x_0.

1. $$\frac{\lambda f_1(x) + \mu f_2(x)}{g_1(x)} = \lambda \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \mu \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$
or $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{g_1(x)} = 0$ par hypothèse, et donc par somme :
$$\lim_{x\to x_0} \frac{\lambda f_1(x) + \mu f_2(x)}{g_1(x)} = 0.$$
2. De même par produit de limites.
3. Dans la fraction $h(x)$ se simplifie (quelque soit sa limite)
4. $$\frac{(f_1(x))^\alpha}{(g_1(x))^\alpha} = \left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\right)^\alpha.$$
Or $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = 0$, et par composition avec une puissance strictement positive, on a donc le résultat.

■

La première relation est très intuitive : l'ajout de plusieurs quantités négligeable, reste négligeable.
Par contre, le produit de deux quantité négligeables devant une troisième, n'est pas nécessairement négligeable devant celle-ci :

$$f_1(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x)) \quad \text{et} \quad f_2(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x)) \not\Rightarrow f_1(x)f_2(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))\,.$$

Il faut aussi multiplier ce qui est dans le « o ».

Exemple

Dans la relation 2 de la propriété, il ne faut pas oublier de multiplier les fonctions g_1 et g_2 entre elles.

$$\left(f_1(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x)) \quad \text{et} \quad f_2(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))\right) \not\Rightarrow \quad f_1(x)f_2(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x)g(x))\,.$$

Par exemple, $\frac{1}{x-x_0} = \underset{x\to x_0}{o}\left(\frac{1}{(x-x_0)^3}\right)$ et $\frac{1}{(x-x_0)^2} = \underset{x\to x_0}{o}\left(\frac{1}{(x-x_0)^3}\right)$ mais $\frac{1}{(x-x_0)^3} \neq \underset{x\to x_0}{o}\left(\frac{1}{(x-x_0)^3}\right)$.

⚠ La relation de négligeabilité **ne passe pas au quotient** : c'est évident si on réfléchit à sa signification. Par contre, on observe que la relation est « inversée » lors du passage à l'inverse.

Exemple

$x = \underset{x\to 0}{o}(1)$, mais si on passe à l'inverse, la relation est échangée : $1 = \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Théorème 3.6 *(Composition à droite)*

Si $f(x) = \underset{x\to b}{o}(g(x))$ et $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = b$, alors $f\circ\varphi(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g\circ\varphi(x))$

Explications

Le choix de l'application φ revient simplement à choisir un chemin particulier pour s'approcher de b. C'est un changement de variable avec $u = \varphi(x)$.

⚠ La composition à gauche n'est pas valable. Par exemple, si on compose par l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$, alors la relation $x = o_{+\infty}(x^2)$ n'est pas maintenue, mais inversée.

Théorème 3.7

Soient $(n,p) \in \mathbf{N}^2$,

$$\underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right) = (x-x_0)^p \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n-p}\right).$$

En particulier,

$$\underset{x\to 0}{o}(x^n) = x^p \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n-p}\right).$$

On peut « sortir » ou « faire entrer » les puissances de x dans le « o ».

Ce n'est qu'un cas particulier de la propriété 3.5-3, mais ce résultat mérite d'être exhibé à part car il sera très souvent utilisé ainsi par la suite.

4 Développements limités

À présent que les notions d'équivalents et de négligeabilité sont au point, nous allons arriver à la question de « *l'approximation locale* » des fonctions, avec en premier lieu un rappel sur l'ordre 1 que nous avons déjà vu lors de la dérivabilité.

A Ordre 1

Théorème 4.1 *(Caractérisation de la dérivabilité)*

Soit f définie sur I, et $x_0 \in I$,

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ si, et seulement si}$$
$$\exists\lambda\in\mathbf{R} \text{ tel que } f(x) = f(x_0) + \lambda(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)\,.$$

Dans ce cas, $\lambda = f'(x_0)$.

Ici, on travaille avec une égalité et pas seulement un équivalent : cela permet d'avoir cette relation même si $\lambda = 0$.

Corollaire 4.2 *(Approximation affine)*

Si $f \in \mathscr{D}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ telle que $\boxed{f'(x_0)\neq 0}$ alors

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)\,.$$

Donc

$$f(x) - f(x_0) \sim_{x_0} f'(x_0)(x-x_0).$$

Preuve

La différence est négligeable devant $f'(x_0)(x-x_0)$. ∎

⚠ En général, l'équivalent est **faux** si $f'(x_0) = 0$.

⚠ $f(x) - f(x_0) \sim_{x_0} f'(x_0)(x-x_0) \quad \not\Longleftrightarrow \quad f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.

La deuxième relation n'a pas beaucoup de sens... par exemple :
$\cos(x) - 1 \sim_0 \frac{x^2}{2}$, mais si on écrit $\cos(x) \sim_0 1 + \frac{x^2}{2}$ le deuxième terme est négligeable devant 1 et n'apporte donc aucune information. Il peut être remplacé par n'importe quel autre terme négligeable devant 1.

Explications *(Intérêt des développements limités face au équivalents)*

Les développements limités avec « o » sont des égalités : ils sont valables pour tout x et pas seulement à la limite. On peut sommer des égalités, les composer avec d'autres fonctions...

On peut sommer les développements limités.
On peut composer les développements limités.

Ceci s'explique par une différence fondamentale : pour les équivalents, on ne parle que d'une limite du quotient, alors que pour les développements limités, le « o » donne un ordre de précision.

Nous l'avons vu, le petit « o » désigne un quotient qui tend vers 0, (ou plus simplement, une fonction de limite nulle). D'une certaine manière, il sert à désigner l'écart par rapport à l'égalité.
Comme vous le faites déjà en physique, on peut sommer des termes erronés, dès lors que l'on connaît leur degré de précision. La précision que l'on pourra accorder au résultat, dépendra de celle des objets et des calculs nécessaires pour y arriver.

Les « o » servent à donner le niveau de précision de l'égalité.

Il en sort une conséquence remarquable :

⚠ Si $f_1(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$ et $f_2(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$, alors en général $f_1(x) \neq f_2(x)$ (même en x_0).

En effet, les petits « o » sont différents dans les deux égalités. Le petit « o » désigne *une* fonction qui tend vers 0, mais il existe une infinité de façons de tendre vers 0 et rien ne dit a priori que deux petits « o » désignent la même.
En particulier, on a l'égalité surprenante :

$$\underset{x\to x_0}{o}(f(x)) - \underset{x\to x_0}{o}(f(x)) = \underset{x\to x_0}{o}(f(x))$$

Ici, il faut voir que derrière les trois notations « o », se cachent des fonctions différentes (qui tendent vers 0). La différences de deux petites erreurs, reste une erreur du même ordre de grandeur a priori.

B Cas général

Exemple *(en guise d'image...)*

Imaginons que nous voulions une approximation de π. On peut définir différents degrés de précisions en fonction du nombre de décimales que nous fournissons. Si on adopte une troncature, alors on pourrait dire que

- l'approximation de π à l'ordre 0 est 3,
- l'approximation de π à l'ordre 1 est $3,1$,
- l'approximation de π à l'ordre 2 est $3,14$,
- ...

Le passage à une approximation à l'ordre supérieur ne remet jamais en cause les valeurs données à l'ordre précédent, mais ajoutent une précision supplémentaire. Ainsi, l'approximation à l'ordre 2, m'indique que $\pi \in [3,14\,;\,3,15[$, et l'ordre supérieur me permettra de diviser l'incertitude par 10.
À l'ordre n, l'incertitude est de 10^{-n} maximum.
Nous allons raisonner de façon similaire avec les fonctions[2].
De la même façon, le développement à l'ordre n ne modifiera aucun des coefficients trouvés au ordres précédents, mais leur ajoutera une précision supplémentaire. Le terme d'erreur sera alors de l'ordre de $(x-x_0)^n$ (infiniment petit quand $x \to x_0$).

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ avec I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$.

Définition 4.3 *(Développement limité d'ordre n)*

f admet un **développement limité** d'ordre n en x_0, s'il existe une application polynomiale de degré au plus n telle que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = P(x) + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n)\,.$$

En écriture « développée »

$$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_m(x-x_0)^m + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n)$$

avec $m \leqslant n$.

Remarque : La définition du développement limité se généralise dans le cas où le point est adhérent à l'intervalle.

⚠ Malheureusement, toutes les fonctions n'admettent pas des développements limités, et surtout à tout ordre. Par exemple, une fonction non dérivable n'admet par de développement limité d'ordre 1 (et donc pas d'ordre supérieur non plus).

Théorème 4.4 *(Développement limité et régularité)*

Si $x_0 \in I$, alors

- f admet un développement limité d'**ordre** 0 en x_0 si, et seulement si f est **continue** en x_0. Dans ce cas $f(x_0) = a_0$.
- f admet un développement limité d'**ordre** 1 en x_0 si, et seulement si f est **dérivable** en x_0. Dans ce cas $f(x_0) = a_0$ et $f'(x_0) = a_1$.

Remarque : Si f n'est pas définie en x_0, alors on peut généraliser le théorème précédent en disant qu'elle est prolongeable par continuité en x_0 avec la valeur a_0. Et, dans le deuxième cas, que la fonction ainsi prolongée est dérivable en x_0.

2. Si ce n'est qu'il s'agit à présent d'une approximation dynamique car x varie : cet exemple n'est qu'une image et non une correspondance rigoureuse

Preuve

Ces théorèmes ont déjà été vus lors du chapitre sur la dérivabilité. ■

Explications

Le développement limité sert à donner une approximation polynomiale d'une application au voisinage d'un point. C'est une généralisation du concept de tangente qui donne une approximation à l'ordre 1.

⚠ Ces implications ne sont plus vraies à partir de l'ordre 2, ce n'est pas parce qu'une application admet un développement limité d'ordre 2 en a qu'elle est deux fois dérivable en a.
Nous verrons un exemple un peu plus tard.

Propriété 4.5 *(Unicité du développement limité)*

Si f admet un développement limité en x_0 alors ce développement limité est unique.

Preuve

Par récurrence sur l'ordre du développement limité.
Initialisation : Si f admet un développement limité d'ordre 0, tel qu'il existe $(a_0, b_0) \in \mathbf{R}^2$ avec

$$f(x) = a_0 + \underset{x\to x_0}{o}(1) = b_0 + \underset{x\to x_0}{o}(1).$$

Alors, par passage à la limite en x_0 : $a_0 = b_0$.
Hérédité : on suppose le résultat vrai pour un développement limité à l'ordre n.
Supposons que f admette un développement limité à l'ordre $n+1$ en x_0, qui puisse s'écrire de deux façons :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n+1} b_k(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right).$$

Or, on sait que

$$a_{n+1}(x-x_0)^{n+1} + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right) = \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n}\right)$$

et de même avec b_{n+1}. Donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n}\right).$$

Et par hypothèse de récurrence, on en déduit que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = b_k$.
Ainsi, on peut soustraire cette partie commune du développement limité à f et conserver l'égalité :

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k &= a_{n+1}(x-x_0)^{n+1} + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right) \\ &= b_{n+1}(x-x_0)^{n+1} + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right). \end{aligned}$$

Si on divise l'égalité par $(x-x_0)^{n+1}$, on obtient :

$$a_{n+1} = b_{n+1} + \underset{x\to x_0}{o}(1).$$

Ce qui implique que $a_{n+1} = b_{n+1}$ comme nous l'avons vu en initialisation.
Donc les deux développements limités sont égaux, ce qui achève la récurrence. ■

Quitte à faire un changement de variable, on peut se limiter à l'étude des développement limités en 0 (sinon, on pose $g(x) = f(x+x_0)$).

Dans la suite de ce chapitre, on privilégiera les développements limités en 0.

Méthode *(Passer d'un développement limité en 0 à un développement en x_0)*

Concrètement, si vous cherchez un développement limité en x_0, mais que vous n'avez l'écriture que pour 0,
alors, vous remplacez $x \to 0$ par $x - x_0 \to 0$ dans l'écriture.

Exemple

$\sin x = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. On peut donc écrire

$$\sin(x-x_0) = x - x_0 + \underset{x-x_0\to 0}{o}(x-x_0) = x - x_0 + \underset{x\to x_0}{o}(x-x_0).$$

De même, si on veut un développement limité de $\ln x$ en 1, on écrit :

$$\ln x = \ln(1+(x-1)) = (x-1) + \underset{x\to 1}{o}(x-1).$$

Propriété 4.6 *(Symétrie et développement limité)*

On suppose que f admet un développement limité d'ordre n en 0 de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n).$$

- Si f est paire alors tous les coefficients d'indice impair a_{2k+1} sont nuls
- Si f est impaire alors tous les coefficients d'indice pair a_{2k} sont nuls

Preuve

idée : on compare les développement de $f(x)$ et de $f(-x)$ et on utilise l'unicité du développement limité.
On évalue le développement limité de f en $-x$:

$$f(-x) = a_0 + a_1(-x) + a_2(-x)^2 + \cdots + a_n(-x)^n + o((-x)^n) \quad = \sum_{k=0}^{n} a_k(-x)^k + o((-x)^n)$$

$$f(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 + \cdots + (-1)^n a_nx^n + o(x^n) \quad = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_kx^k + o(x^n)$$

(en effet, $o((-x)^n) = o(x^n)$)

Supposons que f soit paire, ainsi $f(x) = f(-x)$, donc les développements limités en x et en $-x$ sont égaux, et par unicité du développement limité on peut identifier les coefficients :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], a_k = (-1)^k a_k$$

Ainsi, pour k impair, $a_k = -a_k$, donc $a_k = 0$. Tous les coefficients d'indice impair sont nuls. On fait de même, si f est impaire, auquel cas, on trouve $a_k = -(-1)^k a_k$ et ce sont les coefficients d'indice pair qui sont nuls. ■

Propriété 4.7 *(Troncature d'un développement limité)*

Si f admet un développement limité d'ordre n en x_0, alors pour tout $p \in [\![1; n]\!]$, f admet un développement limité d'ordre p en x_0.
Ce développement limité est obtenu par la troncature à l'ordre p du développement limité d'ordre n.

Revenez à l'idée de l'écriture de π avec les décimales : si j'ai 10 chiffres significatifs, alors, si je ne prends que les 5 premiers, cela me donne une précision à 5 chiffres significatifs. Les chiffres suivants dans le développement décimal seront considérés comme des termes d'erreur.
On pourrait résumer cette propriété par : « une grande précision implique une précision moindre ».

Preuve

idée : on montre que les derniers termes du développement limités forment un « $o(x^p)$ ».
Soit $n \in \mathbf{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, on suppose que $\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.
Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x_k + \left(\sum_{k=p+1}^{n} a_k x^k + o(x^n) \right).$$

Or, pour $x \neq 0$,

$$\frac{\sum_{k=p+1}^{n} a_k x^k}{x^p} = \sum_{k=p+1}^{n} a_k \frac{x^k}{x^p}.$$

Et $\forall k \geqslant p+1$, $\frac{x^k}{x^p} = \frac{1}{x^{p-k}}$, avec $p - k > 0$. Donc $\lim_{x \to 0} \frac{x^k}{x^p} = 0$ et par somme,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sum_{k=p+1}^{n} a_k x^k}{x^p} = 0.$$

Ainsi

$$\sum_{k=p+1}^{n} a_k x^k = o(x^p).$$

De plus $x^n = o(x^p)$ (pour la même raison), donc $o(x^n) = o(x^p)$ par transitivité. Ainsi

$$\sum_{k=p+1}^{n} a_k x^k + o(x^n) = o(x^p).$$

et on a donc montré que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x_k + o(x^p).$$

f admet donc un développement limité à l'ordre p et ce développement limité est obtenu par la troncature du développement limité à l'ordre n. ■

Définition 4.8 *(Forme normalisée)*

Soit f une application définie sur I, et $0 \in \overline{I}$, tels que f admette un développement limité d'ordre n en 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

1. Si $a_0 \neq 0$ alors on dit que le développement limité est **normal**.
2. Si $a_0 = 0$ alors si on note p le plus petit indice tel que $a_p \neq 0$, la forme **normalisée** du développement limité de f est ,

$$f(x) = x^p \left(a_p + a_{p+1} x + \cdots + a_n x^{n-p} + o\left(x^{n-p}\right) \right).$$

Cela revient simplement à factoriser par la plus grande puissance de x possible.

Propriété 4.9

f admet un développement normalisé de la forme (avec éventuellement $n = p$)

$$f(x) = x^p \left(a_p + a_{p+1} x + \cdots + a_n x^{n-p} + o\left(x^{n-p}\right) \right)$$

si, et seulement si

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_p x^p.$$

Dans ce cas, f est du même signe que $a_p x^p$ au voisinage de 0.

L'équivalent correspond au premier terme non nul du développement limité.

Preuve

Montrons la première équivalence :
Si f admet un développement limité normalisé comme écrit dans la propriété, alors (d'après la propriété 4.7), il admet un développement limité d'ordre p donné par

$$f(x) = a^p x^p + o(x^p).$$

Ainsi, $f(x) - a^p x^p = o(x^p)$: la différence est négligeable devant un des deux termes.
Donc $f(x) \sim a_p x^p$.
Réciproquement, si $f(x) \sim a_p x^p$, alors par définition, $f(x) = a^p x^p + o(x^p)$.
Donc f admet un développement limité normalisé de la forme décrite (avec $n = p$).

En supposant que cet équivalent existe, on a donc $f(x) \sim a_p x^p$. Or, nous avons vu au théorème 2.4 que $f(x)$ et $a_p x^p$ sont de même signe au voisinage de 0. ■

C Formule de Taylor-Young

Théorème 4.10 *(Théorème de Taylor-Young)*

Si f admet une dérivée $n^{\text{ième}}$ en x_0, alors f possède un développement limité d'ordre n en x_0 donné par

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \\ &\quad \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right). \end{aligned}$$

Preuve

Admis. ■

⚠ Même à l'ordre 1, la formule de Taylor-Young est différente du théorème des accroissements finis. Dans le théorème des accroissements finis, l'égalité est sans le « petit o », mais en contrepartie, elle n'est valable qu'en un point, et la dérivée n'est pas calculée en x_0, mais en un autre point a priori inconnu.

⚠ La réciproque est fausse : f peut admettre un développement limité d'ordre n en x_0 sans être n fois dérivable en x_0.

Exemple

Par exemple $f : x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$ Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, mais que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Solution :

$\forall x \neq 0$,

$$f(x) = x^3 \sin x = x^2 \times \left(x \sin \frac{1}{x}\right).$$

Or $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est borné sur $\mathbf{R}^*$, donc $\lim\limits_{x\to 0} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ par produit.

Ainsi $f(x) = x^2 \times o(1) = o\left(x^2\right)$.

On vient donc de trouver un développement limité de f à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x) = 0 + 0.x + 0.x^2 + o\left(x^2\right).$$

D'après la propriété 4.4, f est donc dérivable en 0 avec $f'(0) = a_1 = 0$. Étudions la dérivabilité seconde en 0 avec le taux d'accroissement :

$$\forall x \neq 0,\ \tau(x) = \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} 3x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (produit d'une fonction qui tend vers 0 avec une fonction bornée), mais $\frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite finie[3] en 0.

Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite finie en 0.

Donc f n'est pas deux fois dérivable en 0.

On a trouvé un exemple d'une fonction qui admet un développement limité à l'ordre 2, sans être deux fois dérivable au point : la réciproque du théorème de Taylor-Young est donc bien fausse.

Méthode *(Utilisation de la formule de Taylor-Young)*

La formule de Taylor-Young :

- sert à **prouver l'existence** du développement limité de f.
- sert à **calculer les dérivées successives** de f en a à partir du développement limité (obtenu par un autre moyen).
- **Ne sert PAS** à calculer un développement limité.

Dans les situations concrètes, on n'utilise pas la formule de Taylor-Young pour trouver un développement limité.
On s'appuie sur quelques développements limités usuels et de règles de calcul qui vont être détaillés à présent.

3. On peut le montrer en prenant une suite qui convergent vers 0 : $u_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $v_n = \frac{1}{(2n+1/2)\pi}$.
alors $\forall n \geqslant 1$, $\frac{1}{u_n}\cos\left(\frac{1}{u_n}\right) = 2n\pi \to +\infty$.
Ainsi, l'expression ne peut pas admettre de limite finie en 0.
Remarque : À l'aide d'une autre suite (v_n), on pourrait même montrer facilement que l'expression n'a aucune limite en 0.

Théorème 4.11 *(Développements limités usuels en 0)*

1. $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}$,
$$e^{ax} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} x^k + o(x^n).$$
2. $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, \forall x$,
$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\cdots)(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o\left(x^n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha-i)}{k!} x^k + o\left(x^n\right).\end{aligned}$$
3. $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}$,
$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o\left(x^{2n}\right).$$
$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

Remarque : Dans le cas 2, le développement n'est pas valable pour $x = -1$ si $\alpha < 0$. Pour l'exponentielle, le développement est donné à l'ordre n, alors que pour les fonctions trigonométriques, il est donné aux ordres $2n$ et $2n+1$.

Preuve

Par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ en calculant les dérivées successives. C'est la seule fois que nous utilisons la formule de Taylor-Young.
(pour le sinus et le cosinus, il peut être plus simple de rédiger à l'aide d'une récurrence double à cause de la forme de la dérivée qui dépend de la parité de n.) ■

On remarque que pour le cosinus, tous les termes d'indice impair sont nuls car la fonction est paire. Et pour sinus, ce sont les termes d'indice pair qui sont nuls par imparité de la fonction.

Exemple

Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

Solution :

On calcule un à un les coefficients du développement limité avec $\alpha = \frac{1}{2}$. $\forall x > -1$,
$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o\left(x^3\right).$$

Exemple *(Calculatoire...)*

Calculer le développement limité à l'ordre n en 0 de $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

Solution :

$\forall x > -1$,
$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\frac{1}{2}-i)}{k!} x^k + o\left(x^n\right).$$

Or
$$\begin{aligned}\prod_{i=0}^{k-1}(\frac{1}{2}-i) &= \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1-2i}{2} \\ &= \prod_{i=0}^{k-1} \frac{2i-1}{-2} \\ &= \frac{(-1)^k}{2^k} \prod_{i=0}^{k-1}(2i-1) \\ &= \frac{(-1)^k}{2^k}(-1) \prod_{i=1}^{k-1}(2i-1) \qquad \text{(on sort le premier facteur du produit)} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{(2i-1)(2i)}{2i} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \frac{\prod_{i=1}^{k-1}(2i-1)(2i)}{\prod_{i=1}^{k-1} 2i} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \frac{(2k-2)!}{2^{k-1}\prod_{i=1}^{k-1} i} \qquad \text{(le numérateur contient tous les facteurs de 1 à } 2k-2) \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k-1}} \frac{(2k-2)!}{(k-1)!} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k-1}} \frac{2k \cdot (2k-1)\,(2k-2)!}{2k(2k-1)(k-1)!} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k}} \frac{(2k)!}{(2k-1)k!}.\end{aligned}$$

En replaçant cette expression dans le développement limité :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{2^{2k}(2k-1)(k!)^2} x^k + o\left(x^n\right).$$

Théorème 4.12 *(Somme géométrique)*

1. $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \neq 1$,
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o\left(x^n\right).$$
2. $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \neq -1$,
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o\left(x^n\right).$$

Preuve

Méthode 1 :
Ce sont des conséquences du théorème précédent pour une valeur particulière de $\alpha = -1$, éventuellement avec le changement de variable $X = -x$.
Le premier résultat est à retenir (le second s'en déduit en remplaçant x par $-x$). Il correspond à la **somme géométrique**.
Méthode 2 : (preuve directe)

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Ainsi, pour $x \neq 1$

$$\frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{x^{n+1}}{1-x} = o\left(x^n\right).$$

En effet, $\dfrac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \dfrac{x}{1-x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$ ■

D Intégration de développements limités

Théorème 4.13 *(Intégration du développement limité)*

Si f admet un développement limité d'ordre n en x_0 de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right),$$

et si f admet une primitive F sur un voisinage de x_0,
alors F admet un développement limité d'ordre $n+1$ en x_0 donné par

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} + o\left((x - x_0)^{n+1}\right).$$

Preuve

(*la preuve peut être passée en première lecture, ce qui nous intéresse, c'est usage pratique de cette règle dans le calcul des développements limités.*)

$$\begin{aligned}
F(x) - F(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{n} a_k (t - x_0)^k + o\left((t - x_0)^n\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\int_{x_0}^{x} (t - x_0)^k\,\mathrm{d}t\right) + \int_{x_0}^{x} o\left((t - x_0)^n\right)\,\mathrm{d}t \quad \text{(linéarité de l'intégrale)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} + \int_{x_0}^{x} o\left((t - x_0)^n\right)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or, par définition de $o\left((t - x_0)^n\right)$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap I, \quad \left|o\left((t - x_0)^n\right)\right| \leqslant \varepsilon (t - x_0)^n.$$

Donc par inégalité triangulaire et positivité de l'intégrale,

$$\forall t \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap I, \quad \left|\int_{x_0}^{x} o\left((t - x_0)^n\right)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{x_0}^{x} \left|o\left((t - x_0)^n\right)\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Donc $\int_{x_0}^{x} o\left((t - x_0)^n\right)\,\mathrm{d}t = o\left((x - x_0)^{n+1}\right)$. D'où le résultat voulu. ■

⚠ En général on ne peut pas dériver un développement limité. En effet, une fonction peut admettre un développement limité d'ordre n sans être n fois dérivable.

Explications

Rappelez-vous que l'intégrale est une notion très stable, alors que la dérivée ne l'est pas du tout. Cela se comprend facilement en comparant les deux notions.
L'intégrale revient à faire le calcul d'une aire, c'est une somme qui est donc peu sensibles aux petites variations sur la courbe. En revanche, la dérivée regarde un point à la loupe, il suffit donc d'une toute petite perturbation sur la courbe pour qu'elle soit fortement amplifiée au niveau de la dérivée.
Cette idée de *robustesse* de l'intégrale, est sous-jacente dans une grande partie de l'analyse et explique que beaucoup de notions passent plus facilement à l'intégrale qu'elles ne passent à la dérivée.

Théorème 4.14 *(Développements limités usuels en 0 obtenus par intégration)*

1. $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x > -1$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n).$$

2. $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x < 1$

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Preuve

Preuve à considérer comme un exemple d'application de la règle d'intégration

1. **idée :** on intègre le développement limité de $\frac{1}{1+x}$.
Comme on sait que l'intégration fait "gagner un ordre", il suffit d'avoir le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ à l'ordre $n-1$, pour avoir celui du logarithme à l'ordre n.

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o\left(x^{n-1}\right).$$

Donc par intégration,

$$\ln(1 + x) = \ln 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^n\right).$$

et par changement d'indice dans la somme,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

(car $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$).

2. On remplace x par $-x$ ou on intègre directement $-\frac{1}{1-x}$ (attention au « - » devant la fraction qui disparaît à l'intégration).

■

E Opérations sur les développements limités

Remarque : À part pour la composition, les opérations sont données pour des développements limités en 0. Pour effectuer les développements en $x_0 \in I$, il suffit de remplacer x par $x - x_0$ dans le développement.

Théorème 4.15 *(Combinaison linéaire)*

Soient $f : I \to \mathbf{R}$ et $g : I \to \mathbf{R}$ avec I un intervalle de $\mathbf{R}$ dont 0 est adhérent.
Si f admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par

$$f(x) = p(x) + o(x^n) \qquad \text{avec } \deg p \leqslant n,$$

et si g admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par

$$g(x) = q(x) + o(x^n) \qquad \text{avec } \deg q \leqslant n$$

alors $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda p(x) + \mu q(x) + o(x^n).$$

Exemple

Donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\ln \frac{1+x}{1-x}$.

Solution :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \ln(1+x) - \ln(1-x)\\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right)\\ &= 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + o\left(x^5\right).\end{aligned}$$

Remarque : si on avait poussé le premier développement limité un peu trop loin, ce n'était pas grave. Voici ce que cela aurait donné :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \ln(1+x) - \ln(1-x)\\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + o\left(x^6\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right)\\ &= 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + o\left(x^5\right) - \frac{x^6}{6} + o\left(x^6\right)\end{aligned}$$

Mais, $-\frac{x^6}{6} + o\left(x^6\right)$ est une quantité négligeable devant x^5 : $-\frac{x^6}{6} + o\left(x^6\right) = o\left(x^5\right)$. donc ces termes « rentrent » dans le $o(x^5)$ et on retrouve l'expression précédente.
À comprendre : En zéro, c'est le petit « o » avec la plus petite puissance qui « avale » toutes les puissances supérieures (c'est le contraire en l'infini).

Théorème 4.16 *(Produit)*

Soient $f : I \to \mathbf{R}$ et $g : I \to \mathbf{R}$ avec I un intervalle de $\mathbf{R}$ dont 0 est adhérent.
Si f admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par

$$f(x) = p(x) + o(x^n) \qquad \text{avec } \deg p \leqslant n$$

et si g admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par

$$g(x) = q(x) + o(x^n) \qquad \text{avec } \deg q \leqslant n$$

alors fg admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par

$$f(x)g(x) = r(x) + o(x^n)$$

avec $r(x)$ la troncature à l'ordre n de $p(x) \times q(x)$.

Dans les situations concrètes : on multiplie simplement les deux expressions (avec leur petit « o ») et on met dans le petit « o » avec la plus petite puissance, tous les termes de puissance supérieure.

Exemple

Développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f(x) = \cos(x)\ln(1+x)$.
En déduire les dérivées successives de f en 0.
Solution :
$f(x) = \cos(x)\ln(1+x)$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)\right).$$

On effectue un double développement de l'expression, mais on ne garde que les puissances inférieures ou égales à 4. Toutes les puissances supérieures seront « $o\left(x^4\right)$ ».
D'un point de vue pratique, on fait comme pour les produits de polynômes : on compte

d'abord les termes constants, puis les termes en x, puis les termes en x^2...

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) x^3 + \left(-\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\right) x^4 + o\left(x^4\right) \\ &= x - x^2 - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right). \end{aligned}$$

Remarque pour aller plus loin : on voit que le terme d'ordre 4 du développement limité de cosinus ne sert pas. En effet, on aurait pu s'arrêter à l'ordre 3 pour le cosinus car le logarithme ne contient pas de terme constant.
Si on avait écrit le développement limité de $\cos(x)$ à l'ordre 3 :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right).$$

Cela aurait suffit car en réalisant le produit, le $o\left(x^3\right)$ est multiplié par x (ou des puissances plus grandes). Il devient donc au minimum $x\, o(x^3) = o(x^4)$ et on a la précision voulue.

Théorème 4.17 *(Composée)*

Les développements limités peuvent être composés.

Le théorème n'est pas détaillé, il est à voir sur des exemples. La formulation théorique n'est pas d'une grande aide pour traiter les situations pratiques.

Exemple

Donner le développement limité à l'ordre 10 en 0 de $\cos\left(x^2\right)$.
Solution :
On pose $u = x^2 \to 0$ (il est **capital** de vérifier que la nouvelle variable tend bien vers 0).
Ainsi $\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4!} + o(u^5)$.
En remplaçant u par x^2, on obtient donc

$$\cos\left(x^2\right) = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{4!} + o(x^{10}).$$

Exemple

Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$.
Solution :
On écrit le développement limité de $\sqrt{1+x}$ et on le remplace dans l'expression.
On ne sait pas toujours à quel ordre aller pour ce premier développement. Dans ce cas, il vaut mieux en faire un peu moins qu'un peu trop, quitte à y revenir en rajoutant des termes ensuite.
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$.

Donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)} \\ &= \mathrm{e}^1\, \mathrm{e}^{\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)} \quad \text{(il faut que la variable dans l'exponentielle tende vers 0).} \\ &= \mathrm{e}^1\, \mathrm{e}^{\overbrace{\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)}^{u\to 0}} \\ &= \mathrm{e}^1 \left(1 + \underbrace{\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)\right)}_{u} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)\right)}_{u^2}\right) \end{aligned}$$

(les puissances supérieures de u donnent au minimum du x^3, elles ne sont donc pas utiles d

$$= \mathrm{e}^1 \left(1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} + o\left(x^2\right)\right)\right)$$

(on ne garde que les termes de puissance inférieure à 2 lors du développement)

$$= \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}}{2} x + o\left(x^2\right).$$

Méthode *(Quotient)*

Lorsque l'on a un quotient, il faut transformer le terme au dénominateur pour le mettre sous la forme $1+u$ avec $u \to 0$, puis appliquer le développement limite correspondant.
Cela s'obtient en général en factorisant par le terme dominant.

Voir la troisième méthode pour le développement limité de $\tan x$ pour avoir une illustration de cela.

Exemple

Donner un développement à l'ordre 5 de $\tan x$ en 0, en utilisant successivement les relations suivantes :

1. $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$
2. $\tan(\arctan x) = x$
3. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Solution :

1. On sait que tan est de classe $\mathscr{C}^5$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) en 0, donc elle admet un développement limité à l'ordre 5 en 0.
   De plus, tan est impaire, donc son développement ne contient que des puissances impaires. Il s'écrit sous la forme :

$$\tan(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a^5 x^5 + o\left(x^5\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}1+\tan^2(x) &= 1+\left(a_1x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^5)\right)^2\\ &= 1+\left(a_1x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^5)\right)\left(a_1x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^5)\right)\\ &= 1+a_1^2x^2+2a_1a_3x^4+o(x^5),\end{aligned}$$

(tous les autres termes du développement sont d'ordre supérieur à 5).
En intégrant, on trouve donc

$$\tan(x)=\tan 0+x+\frac{a_1^2}{3}x^3+\frac{2a_1a_3}{5}x^5+o(x^5).$$

Remarque : On gagne un ordre lors de l'intégration, mais il ne nous sert pas ici. Dans le calcul de $1+\tan^2(x)$ on aurait donc pu s'arrêter à l'ordre 4. Par unicité du développement limité, on peut identifier les coefficients trouvés avec les a_i supposés au départ :

$$\begin{cases} a_1 &= 1\\ a_3 &= \frac{a_1^2}{3}\\ a_5 &= \frac{2a_1a_3}{5}\end{cases} \iff \begin{cases} a_1 &= 1\\ a_3 &= \frac{1}{3}\\ a_5 &= \frac{2}{15}\end{cases}$$

$$\tan(x)=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o\left(x^5\right).$$

2. Ici, on voit tan comme l'application réciproque de arctan.
Cette **méthode est à retenir pour trouver le développement limité d'une fonction réciproque.**
Le développement de $\arctan x$ est très simple à obtenir. En effet,

$$\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+o\left(x^4\right)$$

(on a fait le développement de $\frac{1}{1+u}$ avec $u=x^2\to 0$). Donc en intégrant,

$$\begin{aligned}\arctan(x) &= \arctan 0+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o\left(x^5\right)\\ &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o\left(x^5\right).\end{aligned}$$

Comme pour la première méthode, on sait que tan admet un développement limité à l'ordre 5 de la forme

$$\tan(x)=a_1x+a_3x^3+a^5x^5+o\left(x^5\right)$$

On remplace donc x par $\arctan(x)\to 0$ dans l'expression et on obtient :

$$\begin{aligned}x &= \tan\left(\arctan x\right)\\ &= a_1\arctan x+a_3\left(\arctan x\right)+a_5\left(\arctan x\right)^5+o\left((\arctan x)^5\right).\end{aligned}$$

Or, le premier terme non nul du développement limité de $\arctan x$ est x, ainsi $o(\arctan x)=o(x)$, et $o\left((\arctan(x))^5\right)=o\left(x^5\right)$.

En remplaçant $\arctan(x)$ par son développement, on obtient :

$$\begin{aligned}x &= a_1\arctan x+a_3\left(\arctan x\right)^3+a_5\left(\arctan x\right)^5+o\left(x^5\right)\\ &= a_1\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o\left(x^5\right)\right)+a_3\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o\left(x^5\right)\right)^3\\ &\quad +a_5\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o\left(x^5\right)\right)^5+o\left(x^5\right)\\ &= a_1x-\frac{a_1x^3}{3}+\frac{a_1x^5}{5}+a_3x^3-3a_3\frac{x^5}{3}+a_5x^5+o\left(x^5\right)\end{aligned}$$

(en ne gardant que les termes de degré inférieurs à 5 dans le développement).
En remarquant que $x=x+o\left(x^5\right)$, on peut écrire :

$$x+o(x^5)=a_1x+\left(a_3-\frac{a_1}{3}\right)x^3+\left(\frac{a_1}{5}-a_3+a_5\right)x^5+o\left(x^5\right).$$

Et par unicité du développement limité,

$$\begin{cases} a_1 &= 1\\ a_3-\frac{a_1}{3} &= 0\\ \frac{a_1}{5}-a_3+a_5 &= 0\end{cases} \iff \begin{cases} a_1 &= 1\\ a_3 &= \frac{1}{3}\\ a_5 &= \frac{2}{15}.\end{cases}$$

On retrouve le même développement limité qu'à la question précédente, heureusement !

3. Cette troisième méthode est sans doute la première qui vient à l'esprit, mais c'est la plus lourde en calculs...

$$\begin{aligned}\tan x=\frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^5\right)}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^5\right)}=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^5\right)}{1-\underbrace{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+o\left(x^5\right)\right)}_{u\to 0}}\\ &= \left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^5\right)\right)\left(1+\underbrace{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+o\left(x^5\right)\right)}_{u}+\underbrace{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+o\left(x^5\right)\right)^2}_{u^2}+\cdots\right.\\ &\quad \left.+\cdots+\underbrace{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+o\left(x^5\right)\right)^3}_{u^5}.\right)\end{aligned}$$

En fait, on remarque que les termes en u^3, u^4 et u^5 ne donnent que des puissances supérieures à 6 et ne sont donc pas utiles dans le développement.

En ne développant u^2 et en ne gardant que les puissances inférieures à 5, on trouve

$$\begin{aligned}\tan x &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{4} + o\left(x^5\right)\right)\\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right) + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{4!} + \frac{x^5}{4} - \frac{x^5}{3! \times 2}\\ &= x + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3! \times 2}\right)x^5 + o\left(x^5\right)\\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right).\end{aligned}$$

On voit bien que la première méthode est à privilégier, mais il faut savoir également faire les deux autres, car ce sont parfois les seules possibles dans certains énoncés.

5 Interprétation des développements sur l'allure des courbes

Nous avons indiqué au début du chapitre que l'intérêt des développements limités est de donner une approximation de la fonction au voisinage d'un point.
Localement, la courbe ressemble aux premiers termes de son développement limité : interprétons cela géométriquement :

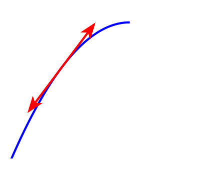
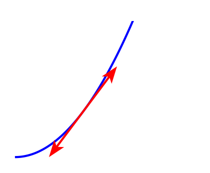
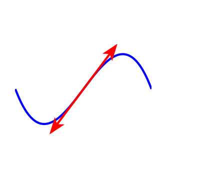
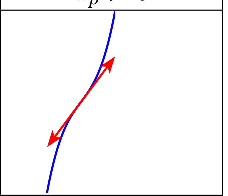
Méthode *(Position par rapport à la tangente)*

Soit f définie sur I et $x_0 \in I$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
On suppose que f admet un développement limité du type

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + o_{x_0}\left((x - x_0)^p\right)$$

(a_p est le premier terme non nul après a_1 dans le développement)
Alors la courbe d'équation $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ est tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0 et la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente dépend de p et de a_p.

$$f(x) - \underbrace{(a_0 + a_1(x - x_0))}_{T(x)} \sim_{x_0} a_p(x - x_0)^p.$$

Si p est pair		Si p est impair	
$a_p < 0$	$a_p > 0$	$a_p < 0$	$a_p > 0$
			

Explications

Ces schémas ne sont pas à apprendre par cœur, il faut simplement comprendre et retenir le raisonnement qui suit pour les retrouver sans efforts :

La différence entre la fonction est sa tangente est équivalente $a_p(x - x_0)^p$.

- Si p est pair, alors $(x - x_0)^p$ est toujours positif et $f(x) - T(x)$ est donc localement du signe de a_p.
  Ainsi, pour $a_p < 0$, on a $f(x) - T(x) \leqslant 0$ au voisinage de x_0 : la courbe est en dessous de sa tangente.
  A contrario, si $a_p > 0$, $f(x) - T(x) \leqslant 0$ et la courbe est au dessus de la tangente.
- Si p est impair, alors $(x - x_0)^p$ est du même signe que $x - x_0$: négatif pour $x < x_0$ et positif sinon.
  Pour $a_p < 0$, alors pour $x < x_0$, $a_p(x - x_0)^p \geqslant 0$ (produit de termes positifs), donc $f(x) - T(x) \geqslant 0$ et la courbe est au dessus de la tangente. Par contre, pour $x > x_0$, l'écart change de signe et la courbe est sous la tangente.
  De même, si $a_p > 0$, la coure est d'abord sous la tangente, puis ensuite au dessus.

Exemple

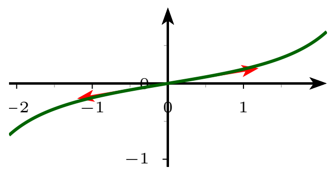
Étudier localement $f : x \mapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ en 0.

Solution :

$\forall x \in \mathbf{R}^*$,

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right)}_{u \to 0}} - 1\right)\\ &= \frac{1}{x}\left(1 + \underbrace{\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{5!} + o(x^4)}_{u} + \underbrace{\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right)^2}_{u^2} + o(u^2) - 1\right)\\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{5!} + \frac{x^4}{6^2} + o(x^4)\right) \qquad \left(\text{car } o(u^2) = o\left(\left(x^2\right)^2\right) = o(x^4)\right)\\ &= \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{3 \cdot 5!} + o(x^3).\end{aligned}$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0 (coefficient constant du développement limité). La fonction est alors dérivable en 0 de dérivée $\frac{1}{6}$.
pour $x < 0$, la courbe de f est sous la tangente au voisinage de 0 (car $\frac{7x^3}{3 \cdots 5!} < 0$), et elle est au dessus au voisinage de 0 pour $x > 0$.
On peut donc tracer l'allure locale de la courbe en 0 :



Remarque : On pouvait remarquer que f est impaire. La forme du développement limité obtenu et son allure locale sont bien cohérents avec cette constatation.

Méthode *(Etude en $+\infty$)*

Pour étudier une courbe en $+\infty$, on effectue le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ et l'on étudie un développement limité en u en 0^+.
La forme de l'asymptote et la position de la droite par rapport à l'asymptote s'obtiennent comme pour la tangente.

Exemple

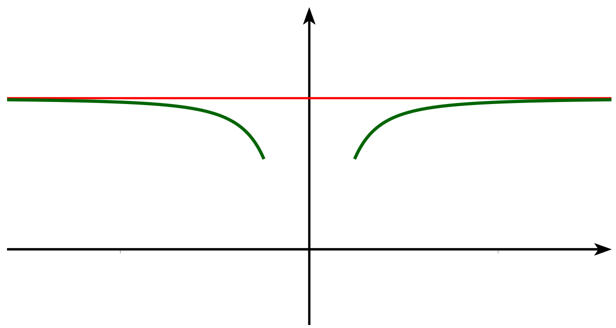
Étudier $f : x \mapsto x\sin(\frac{1}{x})$ au voisinage $\pm\infty$.

Solution :

On pose $u = \frac{1}{x} \to 0$, ainsi $\forall x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{1}{u}\sin u = \frac{1}{u}\left(u - \frac{u^3}{6} + o\left(u^3\right)\right) = 1 - \frac{u^2}{6} + o\left(u^2\right) = 1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Ainsi $f(x)$ tend vers 1 en $\pm\infty$ (asymptote horizontale), et la courbe de f est située en dessous de son asymptote (car $-\frac{1}{6x^2} < 0$) au voisinage de $\pm\infty$.
On peut donc tracer l'allure de la courbe :



Remarque : On ne s'intéresse qu'au comportement asymptotique en $\pm\infty$, cela ne nous dit rien sur le reste de la courbe qui demanderait une étude spécifique (déjà largement faite aux chapitres précédents).

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Définition 5.1 *(Rappel : Nature des branches en $+\infty$)*

- si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale $y = \ell$ au voisinage de $+\infty$.
- si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$,
  - si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
  - si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
  - si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}^*$,
    - si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $y = ax$.
    - si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b \in \mathbf{R}$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

Dans les autres cas on ne peut pas conclure.

On peut définir de même les branches en $-\infty$.

Méthode

Un développement asymptotique en $+\infty$, donne directement la branche asymptotique.

Exemple

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

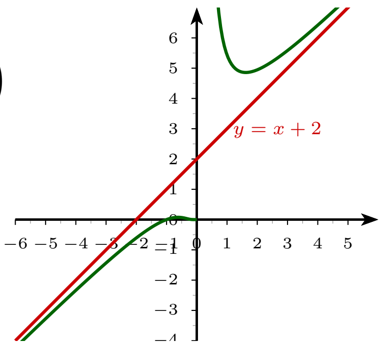
Étudier les branches infinies de f et donner la position des asymptotes par rapport à la courbe.

Solution :

f est définie sur $\mathbf{R}^*$. f admet une asymptote verticale en 0, avec $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \infty$.
Par contre, elle est prolongeable par continuité à gauche ne 0^-, car $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0$.

En $\pm\infty$:
On pose $u = \frac{1}{x} \to 0$, ainsi

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1+\frac{1}{u}\right) \mathrm{e}^u = \frac{1}{u}\,(1+u)\left(1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)\right) \\ &= \frac{1}{u}\left(1+2u+\frac{3}{2}u^2+o(u^2)\right) \\ &= \frac{1}{u}+2+\frac{3}{2}u+o(u) \\ &= x+2+\frac{3}{2x}+o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$



Ainsi, en $+\infty$, la droite $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe de f, et la courbe de f est située au dessus (car $\frac{3}{2x} > 0$).
En $-\infty$, cette même droite est également asymptote oblique, mais la courbe de f est située en dessous (car $\frac{3}{2x} < 0$).