Ensembles

« Huit notes composent ensemble une seule harmonie. »
La République, livre X, Platon

1 Appartenance et inclusion

Définition 1.1

Un ensemble E est une collection d'objets distincts appelés **éléments** de E.
Un **singleton** est un ensemble à un seul élément : $\{a\}$.
L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé **l'ensemble vide**.
Il est noté $\emptyset$ ou $\{\}$.

On peut définir un ensemble de deux manières : en extension et en compréhension.

- Définir un ensemble en **extension**, c'est donner la liste complète des éléments qui le composent.
- Définir un ensemble en **compréhension**, c'est le considérer comme l'ensemble des éléments qui vérifient une certaine propriété[1].

Exemple

L'ensemble $\{1, 2, \pi\}$ est défini en extension.
$\{x \in \mathbf{R} \mid \exists n \in \mathbf{N},\ x = 2^n\}$ est l'ensemble qui contient $1, 2, 2^2, 2^3 \cdots$, il est défini en compréhension. On peut aussi le définir en extension par $\left\{2^n,\ n \in \mathbf{N}\right\}$.

Méthode *(Montrer qu'un ensemble est vide)*

Pour montrer qu'un ensemble A est vide, on raisonne souvent par l'absurde (on suppose qu'il existe un élément $x \in A$ et on montre que c'est absurde) :

« Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in A$,
alors, ...
$\vdots$
absurde, donc $A = \emptyset$. »

Exemple

Montrer que $\{x > 0,\ \forall y > 0, x < y\} = \emptyset$.
Solution :

1. La définition par compréhension suppose de savoir où nous « piochons » les éléments auxquels s'applique la propriété.

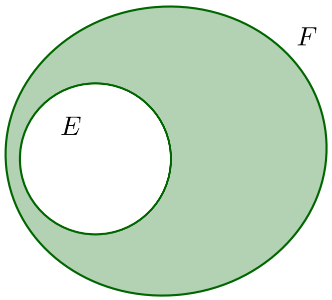
Définition 1.2

Soient E et F deux ensembles.
On dit que E et F sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments.

$$E = F \iff \forall x \quad \big(x \in E \iff x \in F\big)$$

On dit que E **est inclus dans** F,
ou que F **contient** E,
ou que E est **une partie** de F,
si les éléments de E appartiennent tous à F.

$$E \subset F \iff \forall x \quad \big(x \in E \Rightarrow x \in F\big)$$



$E \subset F$

L'égalité entre deux ensembles correspond à une équivalence, l'inclusion traduit une implication.

Propriété 1.3 *(Double inclusion)*

$$E = F \iff \big(E \subset F \textbf{ et } F \subset E\big)$$

Explications
C'est simplement la propriété de double implication vue en logique. On utilise très souvent cette propriété pour montrer l'égalité de deux ensembles.
L'égalité correspond à une équivalence et chaque inclusion traduit une implication.

Méthode *(Montrer une inclusion)*

Pour montrer l'inclusion $A \subset B$, en général, on montre que tous les éléments de A sont aussi dans B.
Concrètement, on prend x quelconque dans A et on montre que $x \in B$.

Soit $x \in A$
$\vdots$
donc $x \in B$.
Donc $A \subset B$.

⚠ Ne pas confondre le signe $\in$ et le signe $\subset$. Le signe $\in$ indique que l'on pioche un élément dans un ensemble, alors que le signe $\subset$ désigne une partie de l'ensemble : un sous-ensemble qui est inclus. Dans le premier cas, on « compare » un élément à un ensemble, dans le second, on compare deux ensembles entre eux.

Exemple
$\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, $5 \in \mathbf{R}$, $\{5\} \subset \mathbf{R}$

Définition 1.4

Soit E un ensemble, l'**ensemble des parties** de E est noté $\mathcal{P}(E)$.
Pour tout ensemble A, $\quad A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$.

Exemple
Soit $E = \{1, \pi, 5\}$, décrire $\mathcal{P}(E)$.
Solution :

Remarques :

- $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble d'ensembles.
- Pour tout ensemble E, l'ensemble vide $\emptyset$ et l'ensemble complet E appartiennent à $\mathcal{P}(E)$.
- Si E est vide, alors $\mathcal{P}(E)$ est non vide. En effet $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$ ($\mathcal{P}(E)$ contient l'ensemble vide qui est un de ses éléments. Il n'est donc pas vide lui-même).

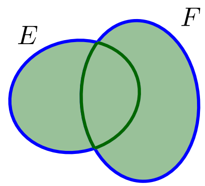
⚠ Si $a \in E$, $a \notin \mathcal{P}(E)$ (en général), par contre $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$

2 Opérations sur les ensembles

Définition 2.1

On appelle **réunion** de E et F, l'ensemble formé des éléments de E et des éléments de F

$$E \cup F = \{x \text{ tel que } x \in E \textbf{ ou } x \in F\}$$



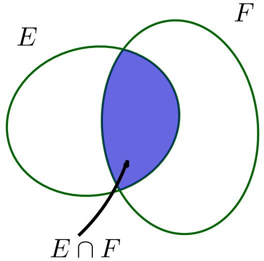
$E \cup F$ = aire colorée.

Exemple
$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \{-n\}_{n \in \mathbf{N}}$.

Définition 2.2

On appelle **intersection** de E et F, l'ensemble formé des éléments appartenant **à la fois** à E et à F

$$E \cap F = \{x \text{ tel que } x \in E \textbf{ et } x \in F\}$$



Exemple

Soient A et B deux ensembles, voici quelques relations triviales :
$A \subset A \cup B$, $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset A \cup B$.
$E \in \mathcal{P}(A)$ et $E \subset B \;\Rightarrow\; E \subset A \cap B$.

Exemple

Soient deux parties A et B de E telles que $A \cup B = A \cap B$. Montrer que $A = B$.

Solution :

Définition 2.3

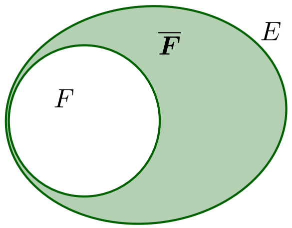
Deux ensembles E et F sont dits **disjoints** si $E \cap F = \emptyset$, c'est-à-dire s'ils n'ont aucun élément commun.

Définition 2.4

On appelle **complémentaire** de F dans E et on note

$$E \setminus F \text{ ou } \complement_E F \text{ ou } F^c \text{ ou } \overline{F}$$

les éléments de E qui n'appartiennent pas à F.
C'est-à-dire $E \setminus F = \{x \in E \text{ tel que } x \notin F\}$.



Remarque : La notation $\overline{F}$ suppose qu'il n'y ait pas d'ambigüité sur l'ensemble E.

Exemple

$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ désigne les irrationnels (nombres réels qui ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux entiers).
$\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$, $\mathbf{R} \setminus \mathbf{R}_+ = \mathbf{R}_-^*$.

Propriété 2.5 *(Involutivité du complémentaire)*

Soit A une partie d'un ensemble E.
$$\overline{\overline{A}} = A.$$
On dit que le passage au complémentaire est **involutif**.

Preuve

C'est une double négation. ∎

Théorème 2.6 *(Formules de De Morgan)*

Soit A et B des sous-ensembles de E,

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Preuve

$$x \in \overline{A \cup B} \iff \neg\,(x \in A \vee x \in B) \iff \neg\,(x \in A) \wedge \neg\,(x \in B) \iff (x \notin A) \wedge (x \notin B)$$
$$\iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

Pour le complémentaire de l'intersection, il suffit de remarquer que si on remplace A et B par leur complémentaire, on retrouve la relation avec l'union écrite dans l'autre sens. *Les notations de complémentaires $\overline{A}$ et A^c sont volontairement mélangées pour faciliter la lecture de la preuve.*

$$\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \overline{(\overline{A^c} \cap \overline{B^c})} && \text{(involutivité de la négation)}\\
&= \overline{(\overline{A^c \cup B^c})} && \text{(relation précédente)}\\
&= \overline{\overline{A^c \cup B^c}} = \overline{A} \cup \overline{B}
\end{aligned}$$

On peut aussi démontrer la négation de l'intersection en repassant aux x comme pour l'union. ∎

Rappelez-vous que le complémentaire échange l'union et l'intersection.
Remarque : Les propriétés vues pour le « **ou** » et pour le « **et** » logiques, sont valables pour l'union et l'intersection (qui en sont la traduction ensembliste).
Ainsi en est-il de l'associativité, de la commutativité et de la distributivité de l'une par rapport à l'autre.

Définition 2.7

Pour $n \geqslant 1$, on pose[2] $I = [\![1, n]\!]$. Pour tout $i \in I$, on définit un ensemble A_i.

- On appelle **réunion**[3]**des** A_i pour i *décrivant* I, l'ensemble des x qui appartiennent à au moins un A_i.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left\{ x \middle| \exists i \in I, x \in A_i \right\}$$

- On appelle **intersection des** A_i pour i *décrivant* I, l'ensemble des x qui appartiennent à la fois à tous les A_i.

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left\{ x \middle| \forall i \in I, x \in A_i \right\}$$

Rappelez-vous que l'union correspond à $\exists$ et que l'intersection correspond à $\forall$.

2. En fait, la notation est valable pour un ensemble I quelconque, mais c'est hors programme.
3. On parle parfois plus simplement d'union.

Propriété 2.8 *(Distributivité)*

Si $\{A_i\}_{i\in I}$, et B sont des ensembles, alors

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cap B=\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B) \quad \text{et} \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\cup B=\bigcap_{i\in I}(A_i\cup B)$$

Preuve

Écrire de façon formelle les ensembles à partir des x en utilisant la définition 2.7. ■

Propriété 2.9 *(Formules de De Morgan)*

Si $\{A_i\}_{i\in I}$ sont des sous-ensembles de E, alors

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}=\bigcap_{i\in I}\overline{A_i} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcap_{i\in I} A_i}=\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$$

Preuve

Écrire de façon formelle les ensembles à partir des x. ■

3 Produit cartésien

Définition 3.1 *(Couples)*

Soient E et F deux ensembles,
On appelle **produit cartésien** de E et F et on note $E\times F$ l'ensemble des **couples** :

$$E\times F=\left\{(x,y) \text{ tel que } x\in E,\ y\in F\right\}$$

Exemple

Lorsque l'on choisit un entier p et un réel x on peut noter $p\in\mathbf{N}, x\in\mathbf{R}$ ou noter $(p,x)\in\mathbf{N}\times\mathbf{R}$.

Notation

Lorsque les ensembles E et F sont les mêmes, au lieu de noter $E\times E$, on note E^2 par analogie avec un produit numérique.

Exemple

Pour désigner un couple d'entiers naturels p et q on note $(p,q)\in\mathbf{N}^2$.

Exemple

Tout point du plan peut être désigné de manière unique par deux coordonnées : l'abscisse x et l'ordonnée y. Ainsi les points du plans sont parfaitement décrits par des couples $(x,y)\in\mathbf{R}^2$. C'est la raison pour laquelle on note le plan $\mathbf{R}^2$.

Exemple

Représenter graphiquement le produit cartésien $[\![1,3]\!]\times[\![2,3]\!]$.
Solution :

Définition 3.2 *(Triplets)*

Soient E, F et G trois ensembles, on appelle **produit cartésien** de E, F et G et on note $E\times F\times G$ l'ensemble des **triplets** :

$$E\times F\times G=\left\{(x,y,z) \text{ tel que } x\in E,\ y\in F,\ z\in G\right\}$$

Exemple

L'espace à trois dimensions correspond à l'ensemble des triplets $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$.
L'espace est noté $\mathbf{R}^3$.

Définition 3.3 *(Généralisation aux n-uplets)*

Soit $n\in\mathbf{N}^*$, et $E_1, E_2, \cdots E_n$ des ensembles.
On appelle **produit cartésien** de $E_1, E_2, \cdots E_n$ l'ensemble des **n-uplets**

$$E_1\times E_2\times\cdots\times E_n=\prod_{i=1}^{n}E_i=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \text{ tel que } \forall i\in[\![1,n]\!],\ x_i\in E_i\right\}$$

Définition 3.4 *(Famille d'éléments)*

Soit I un ensemble appelé ensemble des **indices**, et E un ensemble.

Une **famille** $(x_i)_{i\in I}$ désigne une suite d'éléments de E indexés par I.

On note E^I l'ensemble des familles de E indexées par I.

Explications

C'est simplement une façon de désigner les x_i par leur indice i. On peut faire des familles indexées par

- $[\![1;p]\!]$ ce sont les p-uplets.
- $\mathbf{N}$ ce sont les suites : $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ désigne les suites réelles (à chaque indice dans $\mathbf{N}$, correspond un réel que l'on peut noter u_n par exemple).

⚠ Il ne faut pas confondre l'ensemble $\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$ et la famille $(x_1,x_2,\cdots,x_p)$.

Dans une famille, les éléments ont un ordre, contrairement à un ensemble.
Ainsi, dans une famille, on peut avoir deux fois le même élément à des indices différents (les indices permettent de les différencier) alors que dans un ensemble, chaque élément n'apparaît qu'une seule fois.