Équations différentielles - 2^{ème} partie

Comment une équation différentielle peut retenir un avion au sol et faire suspecter son auteur d'activité terroriste...

« *Un code, ou un alphabet étranger, et peut-être même un plan pour mettre fin aux douzaines de vies innocentes à bord du vol 3950 d'American Airlines.* »

Ne soyez pas trop vite rassurés, c'était un économiste !
http://www.slate.fr/story/117753/economiste-suspecte-terrorisme-vol-americain-equation-maths

Nous avons déjà vu les équations différentielles linéaires à coefficients constants au premier semestre. Ce chapitre constitue une révision de ces notions, que l'on généralise un peu.

Notations :
Dans ce chapitre, I et J désignent des intervalles de $\mathbf{R}$ (non réduits à un point).

À réviser au préalable :

- Chapitre sur les équations différentielles du premier semestre,
- Calculs de primitives.

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

A Définition et structure des solutions

Définition 1.1

Soit $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbf{R}$, on considère l'équation :

$$(E_c) \ : \qquad \forall t \in \mathscr{D}, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

où a, b et c sont trois applications **continues** sur $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.
(E_c) est une **équation différentielle linéaire du premier ordre** à coefficients continues sur $\mathscr{D}$.
$y \ : \ \mathscr{D} \to \mathbf{R}$ est une **solution** de (E_c), si f est dérivable et vérifie la relation (E_c) pour tout $t \in \mathscr{D}$.

L'équation différentielle **homogène** associée à (E_c) est définie par :

$$(E_0) \ : \qquad \forall t \in \mathscr{D}, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0.$$

Dans la suite on notera $\mathscr{S}_c$, les solutions de (E_c) et $\mathscr{S}_0$ les solutions de (E_0).

Dans le cadre de ce cours, on ne s'intéresse qu'aux équation différentielles,

- linéaires,
  Pas de y^2, de e^y... la notion de linéarité est vue plus précisément dans le chapitre sur les espaces vectoriels.
- à coefficients continus,
  Les coefficients sont des fonctions et non plus nécessairement des constantes. Par contre, on exige la continuité pour s'assurer de l'existence de primitives.

Ici[1], nous élargissons un peu le cadre du programme, puisque celui-ci se limite aux équations :

- définies sur des intervalles de $\mathbf{R}$,
  On peut travailler sur d'autres domaines mais certains résultats relatifs aux choix des constantes sont alors un peu différents et rajoutent une difficulté.
- mises sous forme résolue.
  Il n'y a pas de coefficient devant le y'. La mise sous forme résolue est justement le premier problème qui nous occupe ici.

Exemple *(suivi)*
Nous suivrons cet exemple tout au long de cette partie.

$$(E_c) \ : \quad t^3 y'(t) - 2y(t) = 1 + t^2 \,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}.$$

1. Pour avoir une approche qui se limite strictement au programme, voir le cours simplifié.

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre définie sur $\mathbf{R}^*$ et prolongeable par continuité sur $\mathbf{R}$ (second membre). On pose donc $\mathscr{D} = \mathbf{R}$.
L'équation homogène associée est :

$$(E_0) \ : \quad t^3 y'(t) - 2y(t) = 0.$$

Remarques sur les notations :
Dans ce cours, on utilisera souvent t comme variable, mais il est tout à fait possible d'utiliser à la place la variable x, ou u... .
Par exemple, si on utilise la variable x, alors l'équation de l'exemple devient (E_c) : $x^3 y'(x) - 2y(x) = 1 + x^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$, et la résolution est totalement identique (en remplaçant à chaque fois t par x).
De même, on omet parfois l'écriture de la variable avec y. L'équation s'écrit alors (E_c) : $x^3 y' - 2y = 1 + x^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.
Le fait que y dépende de x est sous-entendu.

Théorème 1.2 *(Structure des solutions)*

$\mathscr{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}^1(\mathscr{D}, \mathbf{R})$.

$\mathscr{S}_b$ est un espace affine de direction vectorielle $\mathscr{S}_0$.
Autrement dit : si g_c est une solution particulière de (E_c), alors

$$\mathscr{S}_c = \mathscr{S}_0 \text{ “}+\text{” } g_c = \{f + g_c, \ f \in \mathscr{S}_0\}.$$

Preuve

$$(E_c) \qquad \forall t \in \mathscr{D}, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \qquad \text{s'écrit} \qquad T(y) = c.$$
$$(E_0) \qquad \forall t \in \mathscr{D}, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \quad \text{s'écrit} \quad T(y) = 0.$$

T est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\left(\mathscr{D}^1(\mathscr{D}, \mathbf{R}), +, .\right)$.
Et $\mathscr{S}_0 = \ker(T)$ est son noyau. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\left(\mathscr{D}^1(\mathscr{D}, \mathbf{R}), +, \cdot\right)$.
Montrons la structure de $\mathscr{S}_c$:
si je cherche à résoudre E_c et que je connais déjà une solution particulière g_0 telle que $T(g_0) = b$, alors

$$\begin{aligned} y \in S_c &\iff T(y) = c \\ &\iff T(y) = T(g_0) \\ &\iff T(y) - T(g_0) = 0 \\ &\iff T(y - g_0) = 0 \quad \text{(par linéarité de } T\text{)} \\ &\iff y - g_0 \in S_0. \end{aligned}$$

La conclusion est qu'il suffit de connaître les solutions de l'équation homogène (sans second membre) et **une seule** solution particulière, pour avoir **toutes** les solutions de l'équation. ■

Méthode

Pour résoudre une équation différentielle, on procède donc en général de la façon suivante :

1. Recherche des solutions de l'équation homogène : $\mathscr{S}_0$.
2. Recherche d'une solution particulière : g_c.

Exemple *(suivi)*
On cherchera donc

1. les solutions de (E_0) : $\left(t^3 y'(t) - 2y(t) = 0\right)$ qui forment un espace vectoriel.
   Il suffit donc de trouver une base de l'espace.
2. une solution particulière g_c de (E_c) : $\left(t^3 y'(t) - 2y(t) = 1 + t^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}\right)$.

Propriété 1.3 *(Principe de superposition)*

Si $f_1 \in \mathscr{S}_{c_1}$ et $f_2 \in \mathscr{S}_{c_2}$ alors $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2, \ \lambda f_1 + \mu f_2 \in \mathscr{S}_{\lambda c_1 + \mu c_2}$.

Exemple *(suivi)*
Dans l'exemple précédent, on peut chercher la solution particulière en deux temps.
D'abord g_1 solution particulière de (E_1) : $t^3 y'(t) - 2y(t) = 1$
Puis g_2 une solution particulière de (E_2) : $t^3 y'(t) - 2y(t) = t^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}$
Alors $g_c = g_1 + g_2$ est solution particulière de

$$(E_c) \ : \quad t^3 y'(t) - 2y(t) = 1 + t^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}.$$

B Équation mise sous forme résolue

Définition 1.4 *(points singuliers)*

Les **points singuliers** de l'équation

$$(E_c) \ : \qquad \forall t \in \mathscr{D}, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t).$$

sont les solutions $t \in \mathscr{D}$ de l'équation $a(t) = 0$.
Dans la suite, on notera $\mathscr{D}^*$ l'ensemble $\mathscr{D}$ auquel on a enlevé les points singuliers.

Exemple *(suivi)*
Pour l'équation (E_c), 0 est un point singulier. $\mathscr{D}^* = \mathbf{R}^*$.

Propriété 1.5 *(Forme résolue)*

Sur $\mathscr{D}^*$, l'équation (E_c) peut s'écrire

$$(E_c^*) \ : \qquad \forall t \in \mathscr{D}^*, \quad y'(t) + \frac{b(t)}{a(t)} y(t) = \frac{c(t)}{a(t)}.$$

On notera cette équation :

$$(E_c^*) \ : \qquad \forall t \in \mathscr{D}^*, \quad y'(t) + \beta(t) y(t) = \gamma(t)$$

avec $\beta(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$ et $\gamma(t) = \frac{c(t)}{a(t)}$.

Exemple *(suivi)*

Mise sous forme résolue, l'équation (E_c) s'écrit (sur $\mathscr{D}^*$) :

$$(E_c^*) \ : \quad y'(t) - \frac{2}{t^3} y(t) = \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}.$$

Propriété 1.6 *(Régularité des solutions)*

Sur $\mathscr{D}^*$, si β et γ sont de classe $\mathscr{C}^k$, alors les solutions de (E_c^*) sont (*au moins*) de classe $\mathscr{C}^{k+1}$.
Ainsi, pour $(\beta, \gamma) \in \mathscr{C}^\infty(\mathscr{D}^*)$, les solutions sont de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathscr{D}^*)$.

Preuve

Par récurrence sur k. ■

Exemple *(suivi)*

Les coefficients $t \mapsto \frac{2}{t^3}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}$ sont $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^*)$, donc les solutions seront de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^*)$.

C Solutions de l'équation homogène sur un intervalle

Théorème 1.7

$$(E_0^*) \ : \qquad \forall t \in \mathscr{D}^*, \quad y'(t) + \beta(t) y(t) = 0.$$

Soit I un **intervalle** inclus dans $\mathscr{D}^*$, les solutions de (E_0^*) sur I forment un espace vectoriel de dimension 1

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} \beta(u) \, \mathrm{d}u}\right) = \left\{t \mapsto \lambda \, \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} \beta(u) \, \mathrm{d}u}\right\}_{\lambda \in \mathbf{R}}.$$

avec t_0 un point quelconque de I. *Autre formulation :* Si $t \mapsto B(t)$ est une primitive de b sur I, alors les solutions de (E_0) sur I s'écrivent :

$$y \ : t \mapsto \lambda \, \mathrm{e}^{-B(t)}, \text{ avec } \lambda \in \mathbf{R}.$$

Remarque : Changer de point t_0 revient à prendre une constante λ différente.

Propriété 1.8 *(Cas particulier des équations à coefficients constants)*

Si β est une constante, alors les solutions de l'équation homogène sur chaque **intervalle** I inclus dans $\mathscr{D}^*$ s'écrivent sous la forme

$$t \mapsto \lambda \, \mathrm{e}^{-\beta t} \qquad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

On retrouve le résultat du premier semestre.

Exemple

Résoudre

1. $y' + 2y = 0$ sur $\mathbf{R}$.
2. $y'(t) + \dfrac{2}{t} y(t) = 0$ sur $\mathbf{R}_-^*$.

Solution :

1. $\mathscr{S} = \left\{t \mapsto \lambda \, \mathrm{e}^{-2t}, \lambda \in \mathbf{R}\right\}$.
2. Une primitive de $t \to \dfrac{2}{t}$ sur $\mathbf{R}_-^*$ est $t \mapsto 2\ln(|t|) = 2\ln(-t)$.

   Ainsi, on obtient les solutions sous la forme $f(t) = \lambda \, \mathrm{e}^{-2\ln(-t)} = \dfrac{\lambda}{(-t)^2} = \dfrac{\lambda}{t^2}$.

   Donc $\mathscr{S} = \left\{t \mapsto \dfrac{\lambda}{t^2}, \lambda \in \mathbf{R}\right\}$.

Méthode *(Résolution à la physicienne)*

On écrit (sans s'occuper des problèmes de signe ou d'annulation[2], ni de la signification des différentielles) :

$$\begin{aligned}
y'(t) + \beta(t) y(t) = 0 &\iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\beta(t) y \\
&\iff \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\beta(t) \, \mathrm{d}t \\
&\iff \int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int_{x_0}^{x} \beta(t) \, \mathrm{d}t \\
&\qquad\qquad \text{(on somme les quantités infinitésimales)} \\
&\iff \ln\left(\frac{y(x)}{y_0}\right) = -\int_{x_0}^{x} \beta(t) \, \mathrm{d}t \\
&\iff y(x) = y_0 \, \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} \beta(t) \, \mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

2. On peut montrer, a priori, que si la fonction n'est pas identiquement nulle, alors elle ne s'annulera pas et sera donc aussi de signe constant (continue), mais cela n'est pas trivial (unicité de la solution d'un problème de Cauchy).

On **évitera de rédiger ainsi** la résolution de l'équation pour ne pas avoir à justifier du signe et de la non-annulation de la solution. C'est donc à considérer comme un moyen mnémotechnique qui marche bien.

D Recherche de solutions particulières

Puisque nous avons les solutions de l'équation homogène sur $\mathscr{D}^*$, il suffit de trouver *une* solution particulière pour avoir l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $\mathscr{D}^*$ et utiliser la structure d'espace affine des solutions.

Voici plusieurs méthodes qui vous sont proposées :

Méthode *(L'intuition)*

Si vous montrez que g est une solution en la remplaçant dans l'équation, cela suffit. On n'a pas besoin de justifier la méthode utilisée pour trouver g.

Remarque : La méthode « je regarde sur la copie du voisin » n'est pas considérée comme valable dans le cadre du programme de BCPST et lors des concours. Néanmoins, elle est tout à fait acceptable en milieu professionnel, dès lors que le voisin est consentant.

Exemple

Résoudre sur $\mathbf{R}$, l'équation différentielle : $y' + t^2 y = 5t^2$.

Solution :

1. *Résolution de l'équation homogène.*
   $t \mapsto \frac{t^3}{3}$ est une primitive de $t \mapsto t^2$.
   On en déduit les solutions de l'équation homogène : $t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}}$ pour $\lambda \in \mathbf{R}$.
2. *Solution particulière.*
   Ici, on voit immédiatement que $t \mapsto 5$ est une solution particulière constante à l'équation avec second membre.
3. *Solutions générales.*
$$\mathscr{S} = \left\{t \mapsto \lambda \exp\left(-\frac{t^3}{3}\right) + 5,\, \lambda \in \mathbf{R}\right\}.$$

Méthode *(Variation de la constante)*

$$(E_c^*) \ : \qquad \forall t \in \mathscr{D}^*, \quad y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t).$$

Sur un **intervalle** I inclus dans $\mathscr{D}^*$.

- On résout l'équation homogène sur I :
$$y_0 : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} \beta(u)\,\mathrm{d}u} = \lambda\,\mathrm{e}^{-B(t)}.$$
- On fait **varier** λ, en remplaçant par une fonction dérivable $\lambda(t)$.
$$y_\gamma : t \mapsto \lambda(t)\,\mathrm{e}^{-B(t)}.$$
- On dérive y_γ et on remplace dans l'équation (E_c^*). On obtient :
$$\forall t \in I, \quad \lambda'(t) = \gamma(t)\,\mathrm{e}^{B(t)}.$$
- On cherche une primitive *quelconque* de λ' : $\lambda_P(t)$.
- On *reconstruit* y_γ en multipliant par $\mathrm{e}^{-B(t)}$ pour avoir une solution particulière :
$$\forall t \in I, \quad y_\gamma(t) = \lambda_P(t)\,\mathrm{e}^{-B(t)}.$$

⚠ Ne pas oublier de multiplier λ par l'exponentielle pour avoir la solution particulière.

Exemple

Sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on note (E) : $y' = -\tan(t)y + \dfrac{1}{\cos(t)}$.

Résoudre (E).

Solution :

1. *Résolution de l'équation homogène.*
   $t \mapsto -\ln(|\cos(t)|)$ est une primitive de $t \mapsto \tan(t)$. On en déduit les solutions de l'équation homogène ($\lambda \in \mathbf{R}$) :
   $t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\ln(|\cos(t)|)} = |\cos(t)| = \cos(t)$ car sur I, $\cos(t) \geqslant 0$.
2. *Solution particulière.*
   Si on n'a pas d'intuition, on peut appliquer la méthode de la variation de la constante.
   On pose donc $g\ : t \mapsto \lambda(t)\cos(t)$ avec λ une fonction dérivable sur I.
   $$\begin{aligned}\forall t \in I,\ g'(t) + \tan(t)g(t) &= -\lambda(t)\sin(t) + \lambda'(t)\cos(t) + \tan(t)\lambda(t)\cos(t)\\ &= \lambda'(t)\cos(t).\end{aligned}$$
   (On retrouve la forme donnée dans la méthode. Le fait que tous les $\lambda(t)$ « disparaissent » nous rassure quant à la validité de notre solution *homogène*.)
   g est donc solution particulière si, et seulement si $\lambda'(t)\cos(t) = \dfrac{1}{\cos(t)}$,
   c'est-à-dire $\lambda'(t) = \dfrac{1}{\cos^2(t)}$.

On choisit donc une primitive pour λ : $\lambda(t) = \tan(t)$.
Ainsi, $g(t) = \tan(t)\cos(t) = \sin(t)$.

3. *Solutions générales.*

$$\mathscr{S} = \{t \mapsto \lambda\cos(t) + \sin(t)\,,\, \lambda \in \mathbf{R}\}\,.$$

Méthode *(Polynôme-exponentielle)*

On suppose l'équation à **coefficient constant** : $b \in \mathbf{R}$
On suppose que le second membre s'écrit sous la forme $P(t)e^{\gamma t}$ avec $\gamma \in \mathbf{R}$ et P un polynôme de degré n.

$$(E) \quad y' + \beta y = P(t)e^{\gamma t}.$$

Alors on peut chercher une solution particulière sous la forme :

- si $\gamma \neq -b$, $g : t \mapsto Q(t)\,e^{\gamma t}$ avec Q un polynôme de degré n,
- si $\gamma = -b$, $g : x \mapsto t\,Q(t)\,e^{\gamma t}$ avec Q un polynôme de degré n.

Exemple

Résoudre (E) : $y' - 3y = \mathrm{e}^{2x}$.
Solution :
Remarque : Ici, l'énoncé travaille avec la variable x et non t. Il faut donc respecter ce choix.

1. *Résolution de l'équation homogène.*

$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{3x},\, \lambda \in \mathbf{R}\right\}.$$

2. *Solution particulière.*
Ici, le coefficient est constant $-3 \in \mathbf{R}$, et le second membre s'écrit sous la forme « polynôme-exponentielle » avec un polynôme constant égal à 1.
On peut donc chercher une solution sous la forme : $x \mapsto P(x)\,\mathrm{e}^{2x}$ avec P un polynôme de degré 0 que l'on peut donc simplement noter $a \in \mathbf{R}$.
On pose donc $g\ : x \mapsto a\,\mathrm{e}^{2x}$, alors $g'(x) = 2a\,\mathrm{e}^{2x}$ et on remplace dans l'équation différentielle : g est solution si, et seulement si $\forall x \in \mathbf{R}$, $2a\,\mathrm{e}^{2x} - 3a\,\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}$.
On obtient alors, $a = -1$. Ainsi, $g\ : t \mapsto -\mathrm{e}^{2x}$ est solution.

3. *Solutions générales.*

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2x},\, \lambda \in \mathbf{R}\right\}.$$

Exemple

Résoudre (E) : $y' - 3y = x\,\mathrm{e}^{2x}$.
Solution :

1. *Résolution de l'équation homogène.*

$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{3x},\, \lambda \in \mathbf{R}\right\}.$$

2. *Solution particulière.*
On cherche une solution sous la forme : $x \mapsto P(x)\,\mathrm{e}^{2x}$ avec P un polynôme de degré 1 que l'on peut donc simplement noter $ax + b$.
On pose donc $g\ : x \mapsto (ax+b)\,\mathrm{e}^{2x}$, alors $g'(x) = 2(ax+b)\,\mathrm{e}^{2x} + a\,\mathrm{e}^{2x} = (2ax + a + 2b)\,\mathrm{e}^{2x}$.
On remplace dans l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} g'(x) - 3g(x) = x\,\mathrm{e}^{2x} &\iff (2ax + a + 2b)\,\mathrm{e}^{2x} - 3\,(ax+b)\,\mathrm{e}^{2x} = x\,\mathrm{e}^{2x} \\ &\iff -ax + a - b = x \end{aligned}$$

On travaille par identification sur les polynômes et on trouve donc $a = -1$ et $b = a = -1$.
Ainsi, $g\ : t \mapsto -(1+x)\,\mathrm{e}^{2x}$ est solution.

3. *Solutions générales.*

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{3x} - (1+x)\,\mathrm{e}^{2x},\, \lambda \in \mathbf{R}\right\}.$$

Exemple

Résoudre (E) : $y' - 3y = \mathrm{e}^{3x}$.
Solution :

1. *Résolution de l'équation homogène.*

$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{3x},\, \lambda \in \mathbf{R}\right\}.$$

2. *Solution particulière.*
Comme précédemment, on a un second membre « polynôme-exponentielle » pour une équation à coefficient constant.
Si on cherchait une solution sous la forme $g\ : x \mapsto a\,\mathrm{e}^{3x}$, alors, g est une solution de l'équation homogène et ne peut donner notre second membre.
Cette situation apparaît quand $\gamma = -b$ (ici on a $3 = -(-3)$). Il faut alors multiplier $P(x)$ par x comme précisé dans le théorème.
On cherche donc une solution particulière sous la forme $g\ : x \mapsto ax\,\mathrm{e}^{3x}$. Alors $g'(x) = a\,\mathrm{e}^{3x} + 3ax\,\mathrm{e}^{3x}$ et on remplace dans l'équation différentielle : $g'(x) - 3g(x) = a\,\mathrm{e}^{3x} + 3ax\,\mathrm{e}^{3x} - 3ax\,\mathrm{e}^{3x} = a\,\mathrm{e}^{3x}$.
g est donc solution si, et seulement si $a = 1$.
Ainsi, $g\ : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{3x}$ est solution particulière.

3. *Solutions générales.*

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{3x} + x\,\mathrm{e}^{3x} = (x+\lambda)\,\mathrm{e}^{3x},\, \lambda \in \mathbf{R}\right\}.$$

Théorème 1.9 *(Fonction trigonométrique)*

Soient $b \in \mathbf{R}$, et $(B, \omega) \in \mathbf{R}^2$

$$(E) \qquad y' + by = B\cos(\omega t).$$

On peut chercher une solution particulière sous la forme

$$t \mapsto \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)\,.$$

Remarque : De même, pour un second membre en $B\sin(\omega t)$ on peut cherche une solution particulière sous la même forme.
Si B est un polynôme au lieu d'une constante, alors on cherche une solution en remplaçant λ et μ par deux polynômes de même degré que B.

Exemple

Résoudre l'équation $(E)\quad y'+2y=\cos(2t)$.

Solution :

1. *Résolution de l'équation homogène.*
$$\mathscr{S}_0=\left\{t\mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-2t},\ \lambda\in\mathbf{R}\right\}.$$
2. *Solution particulière.*
On cherche une solution sous la forme $g\ : t\mapsto \lambda\cos(2t)+\mu\sin(2t)$.
Alors $g'(t)=-2\lambda\sin(2t)+2\mu\cos(2t)$.
$$\begin{aligned} g'(t)+2g(t)=\cos(2t) &\iff -2\lambda\sin(2t)+2\mu\cos(2t)+2\lambda\cos(2t)+2\mu\sin(2t)=\cos(2t)\\ &\iff (2\mu+2\lambda)\cos(2t)+(-2\lambda+2\mu)\sin(2t)=\cos(2t).\end{aligned}$$
En choisissant $2\mu+2\lambda=1$ et $-2\lambda+2\mu=0$ on obtient donc bien une solution.
Le système linéaire se résout avec $\lambda=\mu=\frac{1}{4}$.
Ainsi, $g\ : t\mapsto \frac{1}{4}(\cos(2t)+\sin(2t))$ est solution particulière.
3. *Solutions générales.*
$$\mathscr{S}=\left\{t\mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{4}(\cos(2t)+\sin(2t)),\ \lambda\in\mathbf{R}\right\}.$$

Méthode *(Théorème de superposition)*

Utiliser le théorème de superposition.

Exemple

Résoudre $(E)\ :\ y'-3y=2\,\mathrm{e}^{3x}+(4-x)\,\mathrm{e}^{2x}$.

Solution :

On déjà résolu pour chaque partie du second membre

1. pour e^{3x} avec $g_1 : x\mapsto x\,\mathrm{e}^{3x}$,
2. pour e^{2x} avec $g_2 : x\mapsto -\mathrm{e}^{2x}$,
3. et pour $x\,\mathrm{e}^{2x}$ avec $g_3 : x\mapsto (-1+x)\,\mathrm{e}^{2x}$.

Il suffit donc d'utiliser le théorème de superposition pour avoir une solution particulière : $2g_1+4g_2-g_3$.
$g\ : x\mapsto 2x\,\mathrm{e}^{3x}-4\,\mathrm{e}^{2x}-(-1+x)\,\mathrm{e}^{2x}=2x\,\mathrm{e}^{3x}-(3+x)\,\mathrm{e}^{2x}$ est solution particulière.
$$\mathscr{S}=\left\{x\mapsto (2x+\lambda)\ \mathrm{e}^{3x}-(3+x)\,\mathrm{e}^{2x},\ \lambda\in\mathbf{R}\right\}.$$

E ⋆ Raccordement des solutions

Méthode

Soient $a,b,c\in\mathscr{C}^0(I,\mathbf{K})$, on note (E) l'équation différentielle
$$a(t)y'+b(t)y=c(t).$$
Pour résoudre cette équation

1. On cherche les zéros de l'application a (ie les $t\in I$ tels que $a(t)=0$)
2. Sur tout intervalle $J\subset I$ ne contenant pas de zéro de a, on résout l'équation
$$(E')\qquad y'+\frac{b(t)}{a(t)}y=\frac{c(t)}{a(t)}.$$
3. On cherche à prolonger par continuité les solutions trouvées sur I tout entier, et on vérifie que les solutions prolongées sont bien solutions de (E) (vérifier la dérivabilité).

Exemple

Résoudre sur $\mathbf{R}$, l'équation différentielle
$$(E)\ :\quad ty'-2y=t^2.$$

2 Expression des solutions

Nous récapitulons à présent comment obtenir l'ensemble des solutions à partir de la résolution de l'équation homogène et d'une solution particulière obtenues par les théorèmes précédents.

Théorème 2.1 *(Récapitulatif)*

$$(E_c)\ :\qquad \forall t \in \mathscr{D}^*,\quad a(t)y'(t)+b(t)y(t)=c(t).$$

1. On met sous forme résolue dans $\mathscr{D}^*$.
2. On trouve les solutions homogènes sur chaque intervalle de $\mathscr{D}^*$ et on raccorde ces solution.
3. On trouve une solution particulière sur chaque intervalle de $\mathscr{D}^*$, et on raccorde ces solutions sur $\mathscr{D}$.

Dans le cas particulier où l'équation est déjà sous forme résolue sur un intervalle.

$$(E_c)\ :\qquad \forall t \in I,\quad y'(t)+\beta(t)y(t)=\gamma(t).$$

Si g est une solution particulière,
et si B est une primitive de b sur I,
alors l'ensemble des solutions s'écrit

$$\mathscr{S}_c = \left\{ t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-B(t)} + g(t),\ \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

Il reste en général à définir la constante λ à l'aide de la condition initiale.
C'est ce que l'on formalise avec la *condition de Cauchy* :

Définition 2.2 *(Condition de Cauchy)*

Une **condition de Cauchy** impose la valeur d'une solution (ou de l'une de ses dérivées) en un point de l'intervalle I.
Dans le cas d'un domaine non bornée, la condition de Cauchy peut être une limite.

Définition 2.3 *(Problème de Cauchy)*

Un **problème de Cauchy** du premier ordre est la donnée d'une équation différentielle linéaire du premier ordre sur un **intervalle** I

$$(E_c)\qquad y'(t)+\beta(t)y(t)=\gamma(t).$$

et d'une condition de Cauchy sur I.

En général, la condition de Cauchy est la donnée d'une *condition initiale* : $y(t_0)=y_0$.

Théorème 2.4 *(Unicité de la solution)*

Un problème de Cauchy admet une unique solution.

Preuve

Il suffit de résoudre l'équation pour trouver λ tel que $\lambda\,\mathrm{e}^{-B(t_0)}+g(t_0)=y_0$. Cela donne l'existence et l'unicité avec $\lambda=(y_0-g(t_0))\,\mathrm{e}^{B(t_0)}$. ■

Explications *(Interprétation géométrique)*
Pour $I=\mathbf{R}$, les courbes des solutions de l'équation différentielle (E_b) sont appelées **courbes intégrales** de (E_b).
Elles forment une **partition** du plan :

- Par tout point, il passe une courbe intégrale,
- Deux courbes intégrales ne se croisent jamais.
- Aucune courbe n'est vide.

Corollaire 2.5

Lorsque le domaine $\mathscr{D}^*$ est composé de plusieurs intervalles, la donnée d'une condition de Cauchy pour chaque intervalle assure l'unicité de la solution (mais pas forcément leur raccordement).

3 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

A Méthode

On a exactement le même théorème de structure que pour les équations du premier ordre.
On suivra donc le même cheminement.
⚠ Pour le second ordre, on se limite aux équations à coefficients **constants** (sauf le second membre).

Méthode

$(a,b)\in\mathbf{R}^2, c\in\mathscr{C}^0(I,\mathbf{R})$,

$$(E_c)\qquad y''+ay'+by=c(t).$$

1. On résout l'équation homogène, et on note l'ensemble des solutions $\mathscr{S}_0$.
2. On trouve *une* solution particulière de l'équation avec second membre : g.
   L'ensemble des solutions est alors :
   $$\mathscr{S}_c=\mathscr{S}_0\text{“}+\text{''}\,g=\left\{t\mapsto f(t)+g(t),\ f\in\mathscr{S}_0\right\}.$$
3. On trouve les constantes à l'aide de la *double* condition de Cauchy.

B Équation homogène

Théorème 3.1

Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$,
$$(E_0) \qquad y'' + ay' + by = 0.$$
On appelle **équation caractéristique** de (E_0), l'équation $(\chi) \quad x^2 + ax + b = 0$.
On note Δ son discriminant.
L'ensemble des solutions s'écrit
$$\mathscr{S}_0 = \left\{\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2,\ (\lambda,\ \mu) \in \mathbf{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\,\varphi_1,\ \varphi_2\,\}$$
avec

- Si $\Delta > 0, r_1$ et r_2 les deux racines de (χ)
  $\varphi_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{r_1 t}$
  $\varphi_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{r_2 t}$.
- Si $\Delta = 0, r$ est racines double de (χ)
  $\varphi_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$
  $\varphi_2 : t \mapsto t\,\mathrm{e}^{rt}$.
- Si $\Delta < 0, r_1$ et r_2 les deux racines *complexes conjuguées* de (χ)
  $\varphi_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)$
  $\varphi_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)$

où $\quad \alpha = \frac{r_1+r_2}{2} = \mathfrak{Re}\,(r_1)$ et $\beta = \frac{r_1-r_2}{2i} = \mathfrak{Im}\,(r_1)$.

Remarque : (φ_1, φ_2) forment une *base* des solutions de (E_0).

Preuve

1. Chercher des solutions sous la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{\gamma t}$
2. Méthode de la variation de la constante en distinguant les cas selon Δ.
3. Pour $\Delta < 0$, on résout dans $\mathbf{C}$ puis on cherche les solutions réelles parmi elles.

■

La proposition qui suit, permet de présenter les solutions un peu différemment. C'est utile en particulier en physique avec les phénomènes oscillatoires. φ représente le décalage de phase, et β la pulsation.

Propriété 3.2

$\forall (A,B) \in \mathbf{R}^2, \exists (C,\varphi) \in \mathbf{R}^2$, tels que
$$\forall t \in \mathbf{R}, A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t) = C\cos(\beta t - \varphi).$$

Preuve

On écrit l'expression : $\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\left(\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(\beta t) + \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\beta t)\right)$.

On peut alors poser $\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos(\varphi)$ et $\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin(\varphi)$ (car la somme des carrés vaut 1).
On trouve bien l'expression voulue.
En physique φ correspond à la *phase*. ■

C Équation avec second membre

Théorème 3.3

$a, b \in \mathbf{K}^2, g \in \mathscr{C}^0(I,\mathbf{K})$,
$$(E_g) \qquad y'' + ay' + by = c(t).$$
On note $\mathscr{S}_c$ les solutions de (E_c).

1. Il existe toujours une solution particulière φ_0 à l'équation différentielle (E_c),
2. Si φ_0 est une telle solution et φ_1, φ_2 des solutions de l'équation homogène telles que définies dans le précédent théorème, Alors
$$\mathscr{S}_c = \left\{\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 + \varphi_0\ ;\ (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

Preuve

La première partie de la preuve est admise.
La deuxième partie de la preuve est semblables aux preuves déjà faites. ■

D Recherche d'une solution particulière

Exemple *(L'intuition)*
Résoudre l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = b$ où $\omega, b \in \mathbf{R}^2$.
Ici, la solution particulière apparaît directement sans travail particulier.

Méthode *(Polynôme-exponentielle)*

Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et $(A,\gamma) \in \mathbf{R}^2$.
$$(E) \qquad y'' + ay' + by = A\,\mathrm{e}^{\gamma t}.$$
On peut chercher une solution de (E) sous la forme

- Si γ n'est pas racine de (χ), $g\ :\ t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\gamma t}$.
- Si γ est racine simple de (χ), $g\ :\ t \mapsto \lambda t\,\mathrm{e}^{\gamma t}$.
- Si γ est racine double de (χ), $g\ :\ t \mapsto \lambda t^2\,\mathrm{e}^{\gamma t}$.

Remarque : Si on remplace A par une fonction polynômiale P, alors on a le même type de raisonnement qu'avec l'ordre 1.

Il existe une fonction polynomiale Q de même degré que P telle que g soit solution particulière avec

- si γ est n'est pas racine, $g : t \mapsto Q(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$,
- si γ est racine simple, $g : t \mapsto tQ(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$,
- si γ est racine double, $g : t \mapsto t^2Q(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$.

Méthode

Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, et $(B,\omega) \in \mathbf{R}^2$

$$(E) \qquad y'' + ay' + by = B\cos(\omega t).$$

On peut chercher une solution particulière sous la forme

$$t \mapsto \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t) \qquad \text{ou} \qquad t \mapsto \lambda\,\mathbf{t}\cos(\omega t) + \mu\,\mathbf{t}\sin(\omega t)\,.$$

Remarque : De même, pour un second membre en $B\sin(\omega t)$ on peut cherche une solution particulière sous la même forme.
La deuxième forme avec la multiplication par t intervient lorsque $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$ sont solutions de l'équation homogène.

Exemple

Résoudre l'équation $(E) \quad y'' + y' + y = \cos(2t)$.

Exemple

Résoudre l'équation $(E) \quad y'' + y = \cos(t)$.

Théorème 3.4 *(Théorème de superposition)*

si g_1 est solution particulière de $y'' + ay' + by = c_1$,
si g_2 est solution particulière de $y'' + ay' + by = c_2$,
alors $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$, $\lambda g_1 + \mu g_2$ est solution de $y'' + ay' + by = \lambda c_1 + \mu c_2$.

Définition 3.5 *(Problème de Cauchy)*

$(a,b) \in \mathbf{R}^2, c \in \mathscr{C}^0(I,\mathbf{R})$,

$$(E) \qquad y'' + ay' + by = c(t).$$

Pour $(t_0, y_0, v_0) \in I \times \mathbf{R}^2$, on appelle **problème de Cauchy**, la recherche d'une application $f \in \mathscr{S}_c$ vérifiant les **conditions initiales** $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = v_0$.

Théorème 3.6 *(Unicité de la solution)*

Un problème de Cauchy admet une unique solution.

Preuve

Admis (la preuve est hors programme) ■

⚠ Comme l'équation est du second ordre, il faut une **Double** condition aux limite : à la fois sur f et sur f'.
Pour un objet en mouvement, cela correspond à fixer à la fois sa position et sa vitesse à l'instant t_0. S'il manque une de ces deux informations, il n'y a pas unicité de la solution.

4 Exemple d'équation différentielle autonome

On considère une réaction chimique qui fait intervenir deux réactifs A et B et donnant des produits P_i.
À tout instant, on note $[A_i]$ la concentration volumique de A_i.
Le tableau d'avancement s'écrit sous la forme

	$[A]$	$[B]$	$[P_i]$
à l'instant initial $t=0$	a	b	0
à l'instant $t>0$	$a-\alpha\xi_v(t)$	$b-\beta\xi_v(t)$	$\nu_i\xi_v(t)$

La vitesse volumique de réaction s'écrit

$$v(t)=\frac{\mathrm{d}\xi_v(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{d}[B]}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\nu_i}\frac{\mathrm{d}[P_i]}{\mathrm{d}t}.$$

Des études empiriques permettent d'établir des lois de vitesse.
Nous étudions ici différentes situations possibles :

1. **On suppose que la réaction est d'ordre** 1 **par rapport à** A,
c'est-à-dire que la vitesse de réaction est proportionnelle à la concentration en A.
Ainsi, la vitesse volumique de la réaction s'écrit

$$v(t)=-\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t}=k[A].$$

Si on pose $y(t)=[A]_t$ la concentration du réactif A à l'instant t, alors y vérifie l'équation différentielle :

$$(E)\qquad -\frac{1}{\alpha}y'(t)=ky(t)$$

C'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.

La solution est donc sous la forme $y(t)=C\,\mathrm{e}^{-\alpha kt}$ pour $t\geqslant 0$.

Or $y(0)=[A]_0=a$, donc, par identification

$$\forall t\geqslant 0,\qquad [A]_t=y(t)=a\,\mathrm{e}^{-\alpha kt}.$$

On en déduit $-\frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{d}[B]_t}{\mathrm{d}t}=k[A]_t=ka\,\mathrm{e}^{-\alpha kt}$.

C'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{d}[B]_t}{\mathrm{d}t}=-\beta ka\,\mathrm{e}^{-\alpha kt}.$$

On intègre par rapport au temps, et on trouve

$$\begin{aligned}[B]_t-[B]_0&=-\beta ka\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha kt}\,\mathrm{d}t\\&=-\beta ka\left[\frac{\mathrm{e}^{-\alpha kt}}{-\alpha k}\right]_{t=0}^{t}\\&=\frac{\beta}{\alpha}a\left(\mathrm{e}^{-\alpha kt}-1\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\forall t\geqslant 0,\qquad [B]_t=\frac{\beta}{\alpha}a\,\mathrm{e}^{-\alpha kt}+\frac{\alpha a-\beta b}{\alpha\beta}.$$

2. **On suppose que la réaction est d'ordre** 2 **par rapport à** A,

c'est-à-dire que la vitesse de réaction est proportionnelle au carré de la concentration en A.

La vitesse volumique de la réaction s'écrit

$$v(t)=-\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t}=k[A]^2.$$

Avec les mêmes notations que précédemment, la concentration $y(t)=[A]_t$ vérifie

$$(E)\qquad -\frac{1}{\alpha}y'(t)=ky^2(t).$$

C'est une équation différentielle autonome.

La concentration est non nulle tout au long du processus (sinon, il s'arrête, la justification mathématique est un peu plus complexe), ainsi, on peut diviser par y^2, et on obtient

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)}=-\alpha k.$$

Si on intègre entre 0 et t, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^t\frac{y'(u)}{y^2(u)}\,\mathrm{d}u=-\alpha kt&\iff\int_{y(0)}^{y(t)}\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=-\alpha kt\\&\iff -\frac{1}{y(t)}+\frac{1}{y(0)}=-\alpha kt\\&\iff\frac{1}{y(t)}=\alpha kt+\frac{1}{y(0)}\\&\iff y(t)=\frac{1}{\alpha kt+\frac{1}{y(0)}}\\&\iff y(t)=\frac{y_0}{y_0\alpha kt+1}\\&\iff [A]_t=\frac{[A]_0}{[A]_0\alpha kt+1}.\end{aligned}$$

Ou, en écrivant à la physicienne :

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky^2 \iff \frac{\mathrm{d}y}{y^2} &= -k\alpha\,\mathrm{d}t \\
&\Rightarrow \int_{y_0}^{y(t)} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -\alpha kt \\
&\Rightarrow -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y_0} = -\alpha kt \\
&\Rightarrow \frac{1}{y(t)} = \alpha kt + \frac{1}{y_0} \\
&\Rightarrow y(t) = \frac{y_0}{y_0\alpha kt + 1} \\
&\Rightarrow [A]_t = \frac{[A]_0}{[A]_0\alpha kt + 1}.
\end{aligned}
$$

3. **On suppose que la réaction est d'ordre 1 par rapport à A et B,**

c'est-à-dire que la vitesse de réaction est proportionnelle au produit des concentrations en A et en B.

Ainsi, la vitesse volumique de la réaction s'écrit

$$v(t) = -\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = k[A][B].$$

(a) Si les réactifs sont en quantités stoechiométriques : $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$, alors

$$[B]_t = b - \beta\xi_v(t) = \beta\left(\frac{b}{\beta} - \xi_v(t)\right) = \beta\left(\frac{a}{\alpha} - \xi_v(t)\right) = \frac{\beta}{\alpha}[A]_t.$$

Ainsi, on se ramène à une réaction d'ordre 2 par rapport à A :

$$v(t) = -\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}[A]_t}{\mathrm{d}t} = k\frac{\beta}{\alpha}[A]_t^2.$$

La résolution donne alors :

$$[A]_t = \frac{a}{1 + a\beta kt}.$$

(b) Si les réactifs ne sont pas en quantités stoechiométriques, on se ramène à une équation en fonction de l'avancement ξ_v.

$$\frac{\mathrm{d}\xi_v(t)}{\mathrm{d}t} = k\left(a - \alpha\xi_v(t)\right)\left(b - \beta\xi_v(t)\right).$$

Tant que la réaction se poursuit, c'est qu'aucun réactif n'est en concentration nulle, ainsi on peut écrire "à la physicienne" :

$$\frac{\mathrm{d}\xi_v(t)}{\left(a - \alpha\xi_v(t)\right)\left(b - \beta\xi_v(t)\right)} = k\,\mathrm{d}t.$$

Pour traiter le quotient, on écrit le numérateur en faisant intervenir les deux facteurs du dénominateur suivant les techniques que nous avions déjà vues lors des calculs de sommes et de primitives :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(a-\alpha x)(b-\beta x)} &= \frac{1}{\frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta}}\,\frac{\frac{1}{\alpha}(a-\alpha x) - \frac{1}{\beta}(b-\beta x)}{(a-\alpha x)(b-\beta x)} \\
&= \frac{\alpha\beta}{a\beta - b\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{1}{b-\beta x} - \frac{1}{\beta}\frac{1}{a-\alpha x}\right).
\end{aligned}
$$

Car $\frac{a}{\alpha} \neq \frac{b}{\beta}$ (ce qui justifie a posteriori, le traitement à part du mélange stoechiométrique).

Remarque : On peut aussi écrire : $\frac{1}{(a-\alpha x)(b-\beta x)} = \frac{c}{a-\alpha x} + \frac{d}{b-\beta x}$ et trouver les valeurs de c et d en raisonnant par identification.

Ainsi, on peut intégrer le quotient précédent :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha\beta}{a\beta - b\alpha}\left(-\frac{1}{\beta\alpha}\left[\ln(b-\beta x)\right]_0^{\xi(t)} + \frac{1}{\alpha\beta}\left[\ln(a-\alpha x)\right]_0^{\xi(t)}\right) \\
&\qquad = \frac{1}{a\beta - b\alpha}\left(\ln\left(\frac{a-\alpha\xi_v(t)}{b-\beta\xi_v(t)}\right) - \ln\left(\frac{a}{b}\right)\right).
\end{aligned}
$$

D'après la relation différentielle, on a donc

$$\frac{1}{a\beta - b\alpha}\left(\ln\left(\frac{a-\alpha\xi_v(t)}{b-\beta\xi_v(t)}\right) - \ln\left(\frac{a}{b}\right)\right) = kt.$$

On passe à l'exponentielle et on trouve $\xi_v(t)$ en fonction de t :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{a\beta - b\alpha}\left(\ln\left(\frac{a-\alpha\xi_v(t)}{b-\beta\xi_v(t)}\right) - \ln\left(\frac{a}{b}\right)\right) = kt \\
\iff &\frac{a-\alpha\xi_v(t)}{b-\beta\xi_v(t)} = \frac{a}{b}\,\mathrm{e}^{(a\beta - b\alpha)kt} \\
\iff &b\left(a - \alpha\xi_v(t)\right)\mathrm{e}^{b\alpha kt} = a\left(b - \beta\xi_v(t)\right)\mathrm{e}^{a\beta kt} \\
\iff &\xi_v(t)\left(a\beta\,\mathrm{e}^{a\beta kt} - b\alpha\,\mathrm{e}^{b\alpha kt}\right) = ab\left(\mathrm{e}^{a\beta kt} - \mathrm{e}^{b\alpha kt}\right) \\
\iff &\xi_v(t) = ab\frac{\mathrm{e}^{a\beta kt} - \mathrm{e}^{b\alpha kt}}{a\beta\,\mathrm{e}^{a\beta kt} - b\alpha\,\mathrm{e}^{b\alpha kt}}.
\end{aligned}
$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$\xi_v(t) = ab\frac{\mathrm{e}^{(a\beta - b\alpha)kt} - 1}{a\beta\,\mathrm{e}^{(a\beta - b\alpha)kt} - b\alpha}.$$

On observe ainsi que pour $\alpha\beta - b\alpha \to 1$ (mélange stoechiométrique), la relation précédente donne à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
\xi_v(t) &= ab\frac{\mathrm{e}^{(a\beta-b\alpha)kt}-1}{a\beta\,\mathrm{e}^{(a\beta-b\alpha)kt}-b\alpha}\\
&= ab\frac{(a\beta-b\alpha)kt+o(a\beta-b\alpha)}{a\beta\left(1+(a\beta-b\alpha)kt\right)-b\alpha+o(a\beta-b\alpha)}\\
&= ab\frac{(a\beta-b\alpha)kt+o(a\beta-b\alpha)}{a\beta-b\alpha+(a\beta-b\alpha)a\beta kt+o(a\beta-b\alpha)}\\
&= ab\frac{kt+o(1)}{1+a\beta kt+o(1)}\\
&\underset{a\beta-b\alpha\to 0}{\sim} ab\frac{kt}{1+a\beta kt}.
\end{aligned}$$

Ainsi, à la limite, on trouve

$$\begin{aligned}
[A]_t = a-\alpha\xi_v(t) &= a\left(1-\alpha b\frac{kt}{1+a\beta kt}\right)\\
&= a\left(1-a\beta\frac{kt}{1+a\beta kt}\right)\\
&= \frac{a}{1+a\beta kt}.
\end{aligned}$$

C'est l'expression que nous avions pour les quantités stoechiométriques (ce qui est plutôt rassurant !)

« Si vous avez compris tout ce que je viens de vous dire, c'est que j'ai dû faire une erreur quelque part. »
Alan Greenspan