Espaces vectoriels de dimension finie

« Sachez seulement qu'il n'y a pas que des nombres...
il y a aussi des grandeurs, des sommes, il y a des groupes, il y a des tas,
des tas de choses telles que les prunes, les wagons, les oies, les pépins... »
La Leçon, Ionesco

Avertissement : pour simplifier l'apprentissage, ce cours tente de partir des notions les plus intuitives avant d'aboutir aux formulations plus rigoureuses.
Il en découle, que le cours, tel que proposé dans ce document, ne propose pas une construction rigoureuse des espaces vectoriels, mais plutôt, une présentation de leurs caractéristiques importantes.
Le lecteur plus friand de constructions formelles pourra se référer aux cours dédiés sur site internet de la classe.

1 Combinaison linéaire

Définition 1.1 *(Combinaison linéaire)*

Si E est un *espace vectoriel*[1], on appelle **combinaison linéaire** de E toute somme finie de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot u_k$$

où $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \cdots, \overrightarrow{u_n}$ représentent un nombre **fini** de vecteurs
et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont des nombres réels (scalaires).

Propriété 1.2

Un espace vectoriel est *stable* par combinaison linéaire.
C'est-à-dire que toute combinaisons linéaire de vecteur de l'espace est encore un vecteur de l'espace.

C'est **la** propriété essentielle des espaces vectoriels : les espaces vectoriels sont conçus pour pouvoir réaliser des combinaisons linéaires.

Exemple *(À connaître)*

- Le plan $\mathbf{R}^2$ est un espace vectoriel, il correspond à tous les *vecteurs* du plan.
- L'espace $\mathbf{R}^3$ est un espace vectoriel, il correspond à tous les *vecteurs* de l'espace.
- L'espace $\mathbf{R}^n$ des n-uplets sur $\mathbf{R}$ est un espace vectoriel.
- L'ensemble des polynômes réels de degré inférieurs ou égaux à n :$\mathbf{R}_n[X]$ forme un espace vectoriel.
- L'ensemble des matrices à coefficients réels de taille fixée.

1. On fait *comme si* on savait ce que c'était. En réalité, imposer de travailler dans un espace vectoriel E, revient simplement à s'assurer que l'ensemble est non vide et que les opérations proposées pour la combinaison linéaire existent bien.

2 Sous espaces vectoriels

A Caractérisation

Théorème 2.1 *(Caractérisation des sous espaces vectoriels)*

Soit E un espace vectoriel, et $F \subset E$,
F est un **sous espace vectoriel** de E s'il vérifie l'**une** des trois propriétés équivalentes suivantes :

- F est non vide et stable par combinaison linéaire.
- $\begin{cases} \overrightarrow{0_E} \in F, \\ \forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F^2, \ \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v} \in F. \end{cases}$
- $\begin{cases} \overrightarrow{0_E} \in F, \\ \forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F^2, \quad \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F, \\ \forall \overrightarrow{u} \in F, \ \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda \overrightarrow{u} \in F. \end{cases}$

Remarque : on peut remplacer la condition $\overrightarrow{0_E} \in F$ par $F \neq \emptyset$.

Exemple

Montrer que les ensembles ci-dessous sont des espaces vectoriels.

- $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \text{ tel que } x + y + z = 0\right\}$.
- $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \text{ tel que } x = 3y = -2z\right\}$.

Solution :

Méthode *(Montrer que E n'est pas un espace vectoriel)*

Pour montrer qu'un ensemble E n'est pas un espace vectoriel :

1. On teste si $\overrightarrow{0} \in E$.
2. Si c'est vérifié, alors on cherche des vecteurs et des scalaires pour construire une combinaison linéaire dont le résultat n'est pas dans E.

Exemple *(Contre-exemples)*

Montrer que les ensembles ci-dessous ne sont pas des espaces vectoriels (munis des opérations usuelles)

- Une droite affine du plan : pour $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$,
  $E = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \text{ tel que } y = ax + b\right\}$.
- Une demi-droite du plan.

Solution :

B Espaces de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$

Par définition, un espace vectoriel contient le vecteur nul et il est stable par combinaison linéaire. Les droites de $\mathbf{R}^2$ sont des espaces vectoriels si, et seulement si elles passent par 0.
Pour décrire une droite vectorielle, il suffit donc d'avoir un vecteur générateur. Un point par lequel passe la droite est une information inutile car on sait que l'on peut choisir l'origine. De même, un plan vectoriel est décrit par deux vecteurs générateurs (au moins) et passe par l'origine.

Théorème 2.2 *(Espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$)*

Les espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$ sont :

- Le singleton $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$. C'est le « plus petit » espace vectoriel qui soit ; il ne contient qu'un seul vecteur. L'espace est de **dimension** 0 car on n'a pas besoin de vecteur générateur pour le décrire.
- Les droites qui passent par l'origine. Elles sont décrites par un vecteur générateur non nul. Ce sont les espaces de **dimension** 1 (besoin d'un vecteur générateur pour les décrire).
- Le plan $\mathbf{R}^2$ tout entier. Il est décrit par deux vecteurs générateurs. C'est un espace de **dimension** 2.

Ce sont les seuls espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$.

Théorème 2.3 *(Espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$)*

Dans $\mathbf{R}^3$, les espaces vectoriels sont :

- Le singleton $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$. C'est l'espace de **dimension** 0.
- Les droites qui passent par l'origine. Ce sont les espaces de **dimension** 1.
- Les plans qui passent par l'origine. Ils sont décrits par deux vecteurs générateurs. Ce sont les espaces de **dimension** 2.
- L'espace $\mathbf{R}^3$ tout entier. C'est un espace de **dimension** 3.

Ce sont les seuls espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.

Une fois que l'on a compris ce principe, il n'est pas très difficile de généraliser cela aux dimension supérieures. C'est ce que nous allons faire ici.

C Intersection d'espaces vectoriels

Théorème 2.4 *(Intersection de deux espaces vectoriels)*

Si F et G sont deux sous espaces vectoriels de E, alors $(F \cap G, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Preuve

- $F \cap G \subset F$, il suffit donc de montrer que $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de F.
- $0_E \in F \cap G$ (car $0_E \in F$ et $0_E \in G$: ce sont des espaces vectoriels),
- $\forall (u, v) \in F \cap G, \forall \lambda \in \mathbf{R}$,
  or $(u, v) \in F^2$, donc $u + \lambda v \in F$ car F est un espace vectoriel.
  et $(u, v) \in G^2$, donc $u + \lambda v \in G$ car G est un espace vectoriel.
  Donc $u + \lambda v \in F \cap G$.

Donc $F \cap G$ est un espace vectoriel. ■

Exemple

L'intersection de deux plans vectoriels (non confondus) dans l'espace forme une droite vectorielle.

Théorème 2.5 *(Intersection)*

Toute intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Remarque : C'est vrai pour l'intersection d'un nombre quelconque d'espaces vectoriels.

Preuve

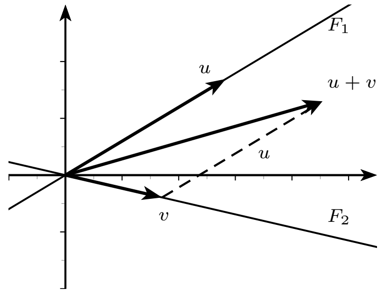
C'est la même preuve que pour 2 espaces. ■

⚠ En général l'union de deux espaces vectoriels $E \cup F$ **n'est pas** un espace vectoriel.

Exemple

L'union de deux droites non confondues du plan n'est pas un espace vectoriel.

Sur la figure ci-contre,
Si on note F_1 la première droite et F_2 la seconde droite.
$u \in F_1$, donc $u \in F_1 \cup F_2$
$v \in F_2$, donc $v \in F_1 \cup F_2$,
mais $u + v \notin F_1$, $u + v \notin F_2$,
donc $u + v \notin F_1 \cup F_2$.



Explications

En général, les structures « passent très bien » à l'intersection et mal à l'union.
Cela se comprend aisément : faire l'intersection de deux ensembles, c'est cumuler les conditions de chacun : si $u \in E \cap F$, alors u vérifie *à la fois* les conditions de E et celles de F. C'est une notion très restrictive : on trie les candidats sur le volet.
En revanche, les structures passent moins bien à l'union, car dans l'union, il suffit de ne vérifier que l'une *ou* l'autre des conditions d'appartenance : c'est beaucoup moins rigide.
Cette idée n'est pas spécifique aux espaces vectoriels : par exemple, l'intersection de deux intervalles est encore un intervalle (éventuellement vide), par contre, l'union n'en est pas un (sauf cas particulier).

3 Espace engendré

L'objet de cette section est de décrire les espaces vectoriels en utilisant des vecteurs générateurs comme nous l'avons fait pour les droites et les plans. Par contre, on sait que le choix des vecteurs générateurs n'est pas unique.
En géométrie euclidienne,la droite vectorielle engendrée par le vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ se note Vect $(\overrightarrow{u})$.
De même, le plan engendré par les deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est noté Vect $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Notation : À partir d'ici, nous n'utiliserons plus la flèche pour noter le vecteur. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{u}$ sera simplement noté u. C'est le contexte qui permettra de décider de la nature de l'objet (nombre réel ou vecteur).
Pour faciliter la lecture, il est d'usage de réserver les lettres grecques aux nombres réels (scalaires) et les lettres latines aux vecteurs. Mais il y a des exceptions.

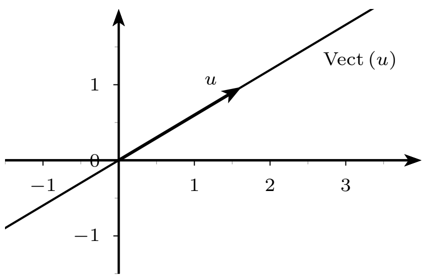
Définition 3.1 *(Sous espace vectoriel engendré)*

Soit E un espace vectoriel, et $u_1, u_2, \cdots, u_n$ une famille finie de vecteurs de E.
On appelle sous espace vectoriel de E **engendré** par $u_1, u_2, u_3, \cdots u_n$, le sous espace vectoriel de E composé des combinaisons linéaires des u_i.
On note

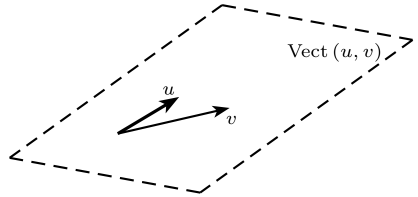
$$\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \{\lambda_1\, u_1 + \lambda_2\, u_2 + \cdots \lambda_n\, u_n,\ \text{ pour } (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n\}\,.$$

Exemple

- L'espace vectoriel engendré par un vecteur u : $\mathrm{Vect}\,(u) = \mathbf{R}u$ est la droite vectorielle de vecteur directeur u (et qui passe par 0_E).
  Par exemple, dans le plan :



- Espace vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires u, v :
  $\mathrm{Vect}\,(u, v) = \left\{\lambda u + \mu v,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\right\}$ est le plan vectoriel engendré par ces deux vecteurs.



Explications
On voit que la description de l'espace avec une famille génératrice, correspond à la description paramétrique telle qu'elle a été vue en géométrie.

4 Familles finies de vecteurs

Dans cette section, E désigne un espace vectoriel.

A Familles libres et liées

Nous venons de voir comment engendrer un espace vectoriel par une famille de vecteurs, mais parfois la famille contient des informations redondantes, comme par exemple la famille $(u, 2u)$, pour u un vecteur non nul.
En effet, u et $2u$ sont deux vecteurs colinéaires qui engendrent donc la même droite.
Dire que l'espace est engendré par u suffit : $\mathrm{Vect}\,(u, 2u) = \mathrm{Vect}\,(u)$.
Le but de cette section est analyser l'information portée par une famille de vecteurs :

- Lorsque tous les vecteurs de la famille sont *indispensables* et apportent chacun une information nouvelle, alors on dira que la famille est **libre**.
- A contrario, si certains vecteurs de la famille sont *superflus* et n'apportent aucune information supplémentaire, alors, la famille sera dite **liée** : on peut lui retirer un certain nombre de vecteurs sans modifier l'espace qu'elle engendre.

Par exemple, la famille $(u, 2u)$ est liée car on peut supprimer l'un des deux vecteurs sans que cela change l'espace engendré. Par contre, si $u \neq 0$, alors la famille composée du seul vecteur u est libre. En effet, si on enlève le vecteur, l'espace engendré est $\{0\}$ et non plus la droite.
On cherchera autant que possible à travailler avec des familles libres pour éviter les informations redondantes.

Définition 4.1 *(Famille libre et famille liée)*

Soit $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que la famille est **liée**, si un de ses vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.
- On dit que la famille est **libre** si elle n'est pas liée. Dans ce cas, on dit aussi que les vecteurs sont **linéairement indépendants**.

Exemple

Deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$ forment une famille libre s'ils ne sont pas colinéaires.
Trois vecteurs de $\mathbf{R}^n$ forment une famille libre s'ils ne sont pas coplanaires.

Exemple

Dans $E = \mathbf{R}^3$, on définit les vecteurs $u = (2, 3, 5)$, $v = (3, 4, 0)$ et $w = (5, 7, 5)$.
Montrer que la famille (u, v, w) est liée, mais que la famille (u, v) est libre.
Solution :

Théorème 4.2 *(Caractérisation des familles liées et libres)*

$(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est une **famille libre**, si et seulement si

$$\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

$(u_1, u_2, \cdots, u_n) \in E^n$ est une **famille liée**, si et seulement si

il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ **non tous nuls** tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$.

Remarque : pour la famille libre, on a même l'équivalence, mais la réciproque n'apporte rien car elle est toujours vraie.

Preuve

(*sens direct*) par l'absurde : soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$.

Supposons par l'absurde qu'il existe un λ_{i_0} non nul, alors $u_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} -\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} u_i$.

Donc u_{i_0} s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs : la famille n'est pas libre. C'est aburde. Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$.
(*sens réciproque*) par contraposée : si la famille est liée, alors un des vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres. Par exemple $u_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \lambda_i u_i$.

Donc en posant $\lambda_{i_0} = -1$, on trouve $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ et les λ_i sont non tous nuls.

D'où le résultat par contraposée.
Le cas de la famille liée s'obtient simplement par la négation du précédent. ■

Méthode

- Pour montrer qu'une famille $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est **libre**,
  on suppose n scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ dans $\mathbf{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0$,
  et on montre que tous les λ_k sont nécessairement nuls.
- Pour montrer qu'une famille $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est **liée**,
  on cherche une combinaison linéaire qui donne 0_E.

Propriété 4.3 *(Interprétation de la liberté)*

La famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille **libre** de E, si et seulement si tout vecteur de $\mathrm{Vect}\,(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ s'exprime de manière *unique* comme combinaison linéaire des u_i.

Preuve

- **sens direct :** on suppose que la famille est libre et on décompose un vecteur $u \in \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ de deux manières différentes : $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i$.
  Montrons que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = \mu_i$ (la décomposition est unique).
  Si on fait la différence, on obtient : $0_E = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i)\, u_i$.
  Or, la famille $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est libre, donc une si combinaison linéaire de ses vecteurs est nulle, alors les coefficients sont nuls. Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i - \mu_i = 0$, donc $\lambda_i = \mu_i$.
- **sens réciproque :** on suppose que la décomposition est unique pour tout vecteur de l'espace engendré. C'est donc vrai en particulier pour le vecteur 0 :
  $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot u_i \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$. Donc la famille est bien libre. ■

Explications

Quel est l'intérêt d'une famille libre ?
Si un vecteur u peut être décomposé comme combinaison linéaire des éléments de cette famille, alors, cette décomposition est unique.
C'est l'intérêt des familles libres, on pourra raisonner par identification :

> Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leur décomposition dans la famille est identique.

Le théorème suivant sert à construire des familles libres par ajouts successifs de vecteurs. On l'utilise dans des raisonnements par récurrence.
Il traduit une intuition géométrique forte qu'il faut comprendre :
Si on veut ajouter un vecteur qui donne une « information » supplémentaire, il faut (et il suffit) qu'il n'appartienne pas à l'espace déjà engendré par les premiers vecteurs.

Théorème 4.4 *(Ajout d'un vecteur à une famille libre)*

Si $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre de E et $y\in E$,
alors la famille obtenue à partir de $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ complétée par y est libre si et seulement si

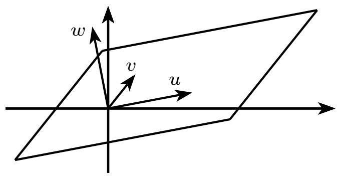
$$y\notin \text{Vect } (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\,.$$

Preuve

(sens direct) par contraposée.
Si $y\in \text{Vect }\left(\{u_i\}_{i\leqslant i\leqslant n}\right)$, alors y s'écrit comme combinaison linéaire des (u_i), donc la nouvelle famille est liée.
(sens réciproque) par contraposée.
Si la famille obtenue est liée, alors on peut trouver des vecteurs (non tous nuls) tels que $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i u_i+\lambda_{n+1}y=0_E$.
Si $\lambda_{n+1}=0$, alors la famille des u_i serait liée, ce qui est contraire à l'énoncé. Donc en divisant par λ_{n+1}, on montre que $y\in \text{Vect }\left(\{u_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}\right)$. ■

Exemple

Si u et v sont deux vecteurs non colinéaires (famille libre), alors Vect (u,v) est un plan.
Pour que la famille (u,v,w) soit libre, il faut (et il suffit) que les vecteurs soient non coplanaires, c'est-à-dire que w n'appartienne pas au plan engendré par u et v.



Propriété 4.5 *(Famille extraite)*

Toute famille extraite d'une famille libre est libre.

Explications

Si dans une famille de vecteurs, chaque vecteur porte une information qui lui est propre et ne peut pas s'obtenir avec les autres vecteurs de la famille, alors, c'est « encore plus vrai » si on ne prend qu'une partie de cette famille :

Preuve

On suppose que $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ est une famille libre.
On en extrait une sous famille (c'est-à-dire que l'on ne prend qu'une partie des u_k) et on écrit qu'une combinaison linéaire de ces vecteurs est égale à 0_E.
Or, c'est également une combinaison linéaire de la famille initiale (on rajoute zéro fois chacun des vecteurs qui n'apparaissait pas dans la sous famille).
Donc, par liberté de la famille initiale, tous les scalaires sont nécessairement nuls.
Ils le sont donc pour la sous famille : elle est libre. ■

B Familles génératrices

La notion de famille génératrice est très simple dans son principe : par définition, une famille est génératrice de l'espace qu'elle engendre.
Ainsi, pour savoir si une famille est génératrice de E, il faut voir si la famille engendre l'espace E.

Définition 4.6 *(Famille génératrice)*

La famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille **génératrice** de E, si

$$E=\text{Vect } (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\,.$$

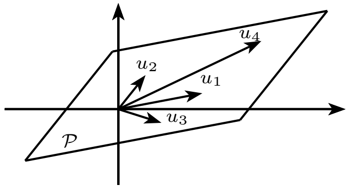
Cette notion nous assure que l'on ne travaille pas dans un espace « trop gros » et que tout vecteur de E peut être décomposé dans la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Si ce n'était pas le cas, alors, il faudrait, soit travailler dans un espace plus petit, soit ajouter des vecteurs dans la famille.

Théorème 4.7 *(Caractérisation)*

La famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille **génératrice** de E, si et seulement si tout vecteur de E peut s'exprimer comme combinaison linéaire des u_i.

Exemple

Une famille de $\mathbf{R}^3$ génératrice d'un plan doit contenir deux vecteurs non colinéaires.
Dans la figure ci-contre,
(u_1,u_2,u_3,u_4) est une famille génératrice du plan $\mathcal{P}$.
(on pourrait générer le même plan avec moins de vecteurs)



Exemple *(Trouver une famille génératrice)*

Soit F le sous espace de $\mathbf{R}^4$ défini par

$$F=\left\{(x+y+z,x-3y+4z,y-z,-x+2z)\,,\quad (x,y,z)\in\mathbf{R}^3\right\}.$$

Donner une famille génératrice de F.
Solution :

Exemple *(méthode)*

Montrer que $e_1 = (1,1,1)\,, e_2 = (1,2,3), e_3 = (2,3,4), e_4 = (3,2,3)$ forment une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$. La famille est-elle libre ?

Solution :

Dans l'exemple précédent, on observe que la famille est génératrice si et seulement si le système admet une solution quelque soit le second membre.

⚠ Ne pas être génératrice de $\mathbf{R}^n$ n'empêche pas d'être génératrice d'un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.

Propriété 4.8 *(Famille complétée)*

Tout famille génératrice de E complétée d'un ou plusieurs vecteurs de E est génératrice de E.

Preuve

Si $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est une famille génératrice de E que l'on complète avec $u_{n+1}, \cdots, u_p$, alors tout vecteur $u \in E$ peut s'écrire comme combinaison de $u_1, \cdots, u_n$. Ainsi il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ ..
En posant $\lambda_{i+1} = \cdots = \lambda_p = 0$, alors on a également $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$.
Donc $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est une famille génératrice de E. ■

C Bases

Ce qui nous intéresse, c'est de pouvoir générer un espace avec le nombre minimal de vecteurs.
Pour cela, il faut donc que la famille de vecteurs soit génératrice.
Mais en général, une famille génératrice contient plus de vecteurs que nécessaire. On impose donc également à la famille d'être libre.

Définition 4.9 *(Base)*

La famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une **base** de E, si elle est libre et génératrice de E.

Théorème 4.10 *(Caractérisation)*

La famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une **base** de E, si et seulement si
tout vecteur de E peut s'écrire de façon *unique* comme une combinaison linéaire des u_i.

Les coefficients de la combinaison linéaire sont alors appelés les **coordonnées** du vecteur dans la base.

Preuve

Tout vecteur de E peut se décomposer dans la famille car elle est génératrice de E et l'écriture est unique car la famille est libre. ■

Exemple

- Les vecteurs $\overrightarrow{i} = (1,0)$ et $\overrightarrow{j} = (0,1)$ forment une base de $\mathbf{R}^2$.
- De même, si dans $\mathbf{R}^n$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note $e_1 = (0, 0, \cdots, \underbrace{1}_{i}, 0, ..)$ le vecteur dont toutes les coordonnées valent 0, sauf la coordonnée i qui vaut 1, alors $\mathcal{C} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$ appelée **base canonique** de $\mathbf{R}^n$.

Exemple

Donner une base de $\mathbf{R}^2$, autre que la base canonique.
Solution :

Exemple *(Décomposer un vecteur dans une base de $\mathbf{R}^n$)*

Dans $\mathbf{R}^3$, on définit les vecteurs $e_1 = (1,5,2)$, $e_2 = (0,2,-2)$ et $e_3 = (1,3,2)$.
Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ donner les coordonnées de $u = (x,y,z)$ dans cette base.

Solution :

D Utilisation du pivot de Gauss

Exemple *(méthode)*

Montrer que les trois vecteurs $u = (0, 0, -1, 1)$, $v = (0, 9, -3, 1)$ et $w = (2, 5, 8, 0)$ forment une famille libre mais pas génératrice de $\mathbf{R}^4$.

Solution :

Il faut se souvenir de cette méthode qui permet de comprendre et justifier le théorème suivant (écrit dans le cas général) :

Théorème 4.11 *(Caractérisation des familles libres de $\mathbf{R}^n$)*

- Une famille de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ est **libre**, si et seulement si, la matrice composée de ses vecteurs écrits en colonne possède autant de pivots que de **colonnes**.
- Une famille de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ est **génératrice** de $\mathbf{R}^n$, si et seulement si, la matrice composée de ses vecteurs écrits en colonne possède autant de pivots que de **lignes**.
- Une famille de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ est une **base** de $\mathbf{R}^n$, si et seulement si, la matrice composée de ses vecteurs écrits en colonne possède autant de pivots que de **lignes** et de **colonnes**.

Exemple

Montrer que les trois vecteurs $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 1, 2)$ et $w = (2, 3, 1)$ forment une base de $\mathbf{R}^3$.

Solution :

5 Dimension

Approche intuitive :

On parle naturellement d'un espace à 2, 3, voire 4 dimensions dans la vie quotidienne. C'est ce que nous allons généraliser. On peut interpréter la dimension de deux façons complémentaires :

- *La dimension est le nombre d'orientations indépendantes selon lesquelles on peut se diriger au sein de l'espace.*
  - Par exemple, $\mathbf{R}$ est une droite : une ligne. Si mon monde se réduisait à cette ligne, je n'aurais qu'une direction possible pour mes mouvements le long de cette droite : l'espace est de dimension 1.
    Réciproquement, tout espace de dimension 1 est une droite.
  - $\mathbf{R}^2$ est un plan. Je peux donc m'orienter suivant deux directions : avant/arrière et gauche/droite. L'espace est de dimension 2.
    Réciproquement, tout espace de dimension 2 est un plan.
  - Pour $\mathbf{R}^3$, j'ajoute une direction supplémentaire : haut/bas.
  - Un espace de dimension 4 est plus difficile à représenter, mais il comporte à son tour encore une direction de mouvement supplémentaire. On a coutume d'ajouter le temps que l'on pourrait faire défiler à notre guise : se déplacer dans le temps pour désigner cette dimension supplémentaire.
  - Et ainsi de suite. Pour chaque dimension supplémentaire, on ajoute une nouvelle direction possible pour un mouvement.
- *La dimension d'un espace est le nombre minimal d'informations qu'il faut pour pouvoir décrire parfaitement et sans ambigüité chaque vecteur de cet espace.*
  - Pour l'espace $\{0\}$, on n'a besoin d'aucune information pour décrire le vecteur considéré car on n'a pas le choix : il n'y a que le vecteur 0 possible.
    Ainsi $\{0\}$ est de dimension 0.
  - Pour l'espace $\mathbf{R}$ (ou toute droite linéaire), il suffit d'avoir l'abscisse pour connaître le vecteur considéré.
  - Pour $\mathbf{R}^2$, il faut deux informations. Un vecteur du plan est décrit par un couple (abscisse, ordonnée). L'espace est de dimension 2.
  - Dans notre exemple initial avec nos paniers de légumes composés de courgettes et aubergines, l'espace était de dimension 2 car il fallait 2 informations pour connaître exactement la composition du panier. Nous avions représenté notre panier par un couple.
  - Si on rajoutait un autre type de légume à notre panier, alors, on aurait un espace de dimension 3 et chaque panier serait décrit par un triplet (x, y, z).

C'est cette deuxième approche qui nous servira à formaliser mathématiquement la notion de dimension.

Il reste la question de traduire ces informations (des uplets de nombres réels ou complexes) en vecteurs de l'espace. C'est la **base** qui permet de retrouver le vecteur à partir des n scalaires qui le décrivent. La base nous sert donc de repère[2] dans l'espace considéré .
Par exemple, en dimension 1, la description de la droite suppose d'avoir choisi un vecteur directeur u (qui sert de base). Ainsi tout autre vecteur de la droite s'écrit $v = \lambda u$. λ est « l'information » qui donne v sans ambigüité.

Définition 5.1 *(Dimension)*

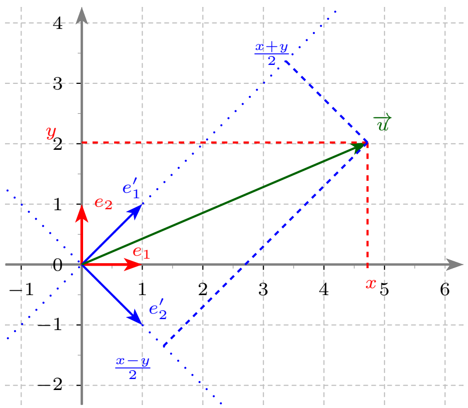
La dimension d'un espace vectoriel est égal au nombre de vecteurs qu'il faut pour constituer une base de l'espace.

Remarque : Certains espace n'admettent pas de base avec un nombre fini de vecteurs (mais c'est hors programme).

Une fois cette base fixée, la connaissance des coordonnées du vecteur dans cette base permet de décrire exactement ce vecteur par un uplet.

Exemple

Le plan $\mathbf{R}^2$ est un espace vectoriel de dimension 2. Pour connaître un vecteur, il me faut au minimum deux informations. Par exemple l'abscisse et l'ordonnée.
L'espace est de dimension 2, et pour construire une base, je prends deux vecteurs (e_1, e_2), tel que e_1 serve à donner l'abscisse : $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$, l'ordonnée.
Un vecteur (x, y) du plan est alors décrit par $xe_1 + ye_2$.
On peut aussi choisir une autre base (cela revient à changer de repère). Par exemple, prendre $e'_1 = (1, 1)$ et $e_2 = (1, -1)$. Le vecteur (x, y) s'écrit dans cette base $(x, y) = \frac{x+y}{2}e'_1 + \frac{x-y}{2}e'_2$



2. La différence avec le repère vu en géométrie est qu'il n'est pas ici nécessaire de préciser l'origine car on choisit toujours l'origine O que l'on sait faire partie de l'espace.

Méthode *(Déterminer la dimension d'un espace)*

En général, pour déterminer la dimension d'un espace, on lui trouve une base.
Il faut alors montrer qu'elle est à la fois libre et génératrice.

Il reste néanmoins encore une question : la définition 5.1 de la dimension suppose que toutes les bases d'un même espace vectoriel aient le même nombre d'éléments. En effet, si un espace pouvait avoir des bases avec des nombres différents de vecteurs, alors, il aurait plusieurs dimensions possibles.

Les théorèmes qui suivent proposent d'établir ce résultat géométriquement (visualiser sur $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$).

Propriété 5.2

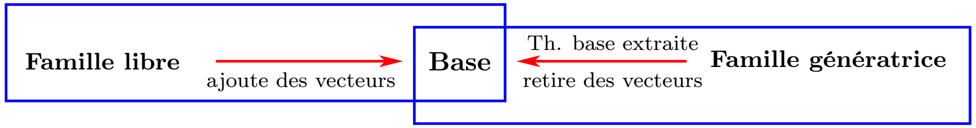
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.
Soit $\mathcal{F}$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie.

$$\operatorname{Card}\mathcal{F} \leqslant n \leqslant \operatorname{Card}\mathcal{G}.$$

Preuve

Admis. ■

Pour se souvenir



Base = famille libre maximale = famille génératrice minimale

Explications

La base est un ensemble de vecteurs de E, à partir desquels, je peux exprimer tous les autres *de façon unique*.

- Le fait que je puisse exprimer tous les autres vecteurs à partir de ceux de la base traduit que la base est une famille génératrice.
- Le fait que cette expression soit unique, traduit que la base est une famille libre.

Intuitivement : Lorsqu'on dispose d'une famille génératrice, si elle n'est pas libre, c'est qu'il y a une redondance d'information entre ces éléments. On peut donc en supprimer certains tout en restant générateur. Lorsque je ne peux plus en supprimer, c'est que la famille est une base : elle est aussi libre.
→ théorème de la base extraite.

De même, si une famille est libre, et qu'il manque des informations pour pouvoir exprimer tous les vecteurs, alors on peut compléter cette famille pour obtenir une base.
→ théorème de la base incomplète.

Théorème 5.3 *(Théorème de la base extraite)*

De toute famille génératrice finie d'un **R**-espace vectoriel (non réduit à 0), on peut extraire une base de E.

En particulier, tout espace vectoriel non nul de dimension finie admet une base (finie).

⚠ Cette base n'est pas unique.

Preuve

Idée : on part d'une famille génératrice et on enlève un à un les vecteurs « redondants » jusqu'à obtenir une famille libre (sans changer l'espace généré).
Soit $\mathcal{G} = (u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille génératrice de E.
Si la famille est libre, alors c'est une base de E.
Si la famille est liée, alors un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison des autres : par exemple $x_p = \sum\limits_{k=1}^{p-1} \lambda_k u_k$.
Alors la famille $(u_1, u_2, \cdots, u_{p-1})$ est génératrice.
On réitère ce processus en enlevant 1 à 1 les éléments surabondants de la famille jusqu'à obtenir une famille libre. Par construction cette famille est à la fois libre et génératrice : c'est donc une base.
(Le processus aboutit bien à un certain rang, car le nombre d'éléments dans la famille décroît strictement et une famille à un seul élément non nul est toujours libre.) ■

Théorème 5.4 *(Théorème de la base incomplète ⋆)*

Toute famille libre peut-être complétée en une base de E.
Les vecteurs pour compléter la famille peuvent être choisis dans une famille génératrice finie quelconque.

Preuve

Soit $\mathcal{F} = (x_1, x_2, ..., x_p)$ une famille libre de E.
On suppose que l'on possède une famille génératrice finie quelconque $\mathcal{G} = (y_1, y_2, \cdots, y_q)$ (existe car E est de dimension finie).

- Si tout élément de $\mathcal{G}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}$ est génératrice.
  En effet, si $\forall i \in [\![1, q]\!], \exists (\lambda_{i,k})_{1 \leqslant k \leqslant p}$ tels que $y_i = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_{i,k} x_k$.
  Comme $\mathcal{G}$ est génératrice, $\forall x \in E, \exists (\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ tels que $x = \sum\limits_{i=1}^{q} \mu_i y_i$,
  alors $x = \sum\limits_{i=1}^{q} \sum\limits_{k=1}^{p} \mu_i \lambda_{i,k} x_k$. $\mathcal{F}$ est génératrice, c'est donc une base.
- Sinon, il existe un élément de $\mathcal{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des x_i : par exemple y_1 (quitte à réordonner). Alors $(x_1, x_2, ..., x_p, y_1)$ est une famille libre.

On réitère le processus en ajoutant 1 à 1 les éléments de $\mathcal{G}$ jusqu'à obtenir une famille génératrice. Alors, par construction elle sera aussi libre. Ce sera donc une base.
(Le processus s'arrête nécessairement au plus tard quand tous les éléments de $\mathcal{G}$ ont été intégrés à $\mathcal{F}$). ■

Théorème 5.5 *(Caractérisation des bases)*

Si E est de dimension finie $n \geqslant 1$, et $\mathcal{F}$ une famille de n **vecteurs** de E,
Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{F}$ est une base de E,
2. $\mathcal{F}$ est génératrice de E,
3. $\mathcal{F}$ est libre.

Preuve

- Si $\mathcal{F}$ est une base, alors elle est génératrice.
- Si $\mathcal{F}$ est génératrice. Si elle était liée, alors on pourrait lui enlever un vecteur et elle resterait génératrice. C'est absurde car alors il existerait une famille génératrice à $n-1$ éléments (qui est moins que le nombre d'éléments de la base qui forme une famille libre). Donc $\mathcal{F}$ est libre.
- Si $\mathcal{F}$ est libre. Si ce n'était pas une base, alors il existerait $y \in E$ tel que $y \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. D'après la propriété 4.4, la famille $\mathcal{F}$ complétée par y serait libre et aurait plus d'éléments qu'une base (qui est génératrice). C'est impossible d'après la propriété 5.2. Donc la famille $\mathcal{F}$ est génératrice : c'est une base.

■

Méthode *(Montrer qu'une famille est une base)*

Lorsque l'on travaille dans un espace E dont on connaît la dimension n.
Pour montrer que $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base, il suffit de vérifier qu'elle a le bon nombre de vecteurs, et de prouver qu'elle est **soit** libre, **soit** génératrice.
En général, le plus simple est de montrer qu'elle est **libre**.

6 Sous espaces vectoriels de dimension finie

Les propriétés qui suivent ressemblent beaucoup à celles vues avec les ensembles finis. La différence est que l'on raisonne avec la dimension au lieu de compter le nombre d'éléments.
Comme la base permet de décrire parfaitement l'espace vectoriel, compter les éléments de la base revient intuitivement à compter les éléments de l'espace (au nombre d'éléments du corps près - certes infini dans ce chapitre).
⚠ Sauf pour l'espace $\{0\}$, tous les **R**-espaces vectoriels possèdent un nombre infini de vecteurs (il ne faut donc pas parler de cardinal).

Propriété 6.1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Si F est un sous espace vectoriel de E,
alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$,
de plus,
$$\dim E = \dim F \iff E = F.$$

Preuve

Si $F = \{0_E\}$ c'est terminé,
Sinon, une famille libre de F est également libre dans E, donc toutes les familles libres de F ont au plus n vecteurs. Si on note p le nombre maximum de vecteurs que peut contenir une famille libre de F, alors $p \leqslant \dim E$.
On considère une famille libre de F à p vecteurs : $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$.
Si, par l'absurde, cette famille n'est pas génératrice de F, alors il existe $y \in F$ tel que $y \notin \text{Vect}\,(e_1, \cdots, e_p)$. La famille complétée $(e_1, \cdots, e_p, y)$ est donc une famille libre de F avec $(p+1)$ vecteurs (d'après la propriété 4.4). C'est contradictoire avec la définition de p (cardinal maximal d'une famille libre).
Donc $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre et génératrice de F, donc c'est une base de F.
Ainsi F est de dimension finie, et $\dim F = p \leqslant \dim E$.
Cas d'égalité :
On pose $n = \dim E$ et on suppose que $\dim F = \dim E = n$.
F possède donc une base de la forme $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_n)$. Cette famille est libre dans F, donc également dans E et son cardinal est égal à la dimension de E.
D'après la propriété 5.5, c'est donc une base de E.
Ainsi $F = \text{Vect}\,(\mathcal{F}) = E$. Donc les espaces sont égaux. ■

Méthode *(Égalité de deux espaces vectoriels)*

Pour montrer que deux espaces vectoriels de dimension finie E et F sont égaux, il suffit de montrer que $F \subset E$ et que $\dim F \geqslant \dim E$.

L'égalité des dimensions remplace la deuxième inclusion d'un raisonnement par double inclusion.

Définition 6.2 *(Nature de sous espaces particuliers)*

Soit E un espace de dimension finie n et F un sous espace de E,

- Si $\dim F = 1$, alors F est une **droite vectorielle.**
- Si $\dim F = 2$, alors F est un **plan vectoriel.**
- Si $\dim F = n - 1$, alors F est un **hyperplan vectoriel.**

7 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 7.1 *(Rang d'une famille de vecteurs)*

Le rang d'une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est la dimension de l'espace vectoriel engendré

$$\text{Vect}\,(u_1, u_2, \cdots, u_n).$$

Méthode *(Calcul du rang par le pivot)*

Le rang d'une famille de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ est égal au nombre de pivot de la matrice formée des vecteurs colonne correspondants.

Exemple *(exercice récapitulatif)*

Dans $\mathbf{R}^4$, on définit les vecteurs

$$v_1 = (1,2,1,0) \qquad v_2 = (-1,1,1,0) \qquad v_3 = (1,5,3,0)$$
$$v_4 = (3,3,1,0) \qquad v_5 = (0,1,0,1) \qquad v_6 = (-1,3,3,-1)$$

On note $F = \text{Vect}\,(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$.

1. Dire sans calculs si la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ est libre.
2. Extraire de cette famille, une sous famille de rang maximal que l'on noter $\mathcal{E}$. Quelle est la dimension de F ?
3. Compléter $\mathcal{E}$ en une base de $\mathbf{R}^4$. On notera cette base $\mathcal{B}$.
4. Exprimer les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^4$ dans la base $\mathcal{B}$.

Solution :