Espaces vectoriels

« Sachez seulement qu'il n'y a pas que des nombres...
il y a aussi des grandeurs, des sommes, il y a des groupes, il y a des tas,
des tas de choses telles que les prunes, les wagons, les oies, les pépins... »
La Leçon, Ionesco

Si depuis votre plus jeune âge vous avez toujours voulu ajouter les choux et les carottes, les courgettes et les aubergines ou mélanger torchons et serviettes, alors ce chapitre est fait pour vous !

Nous nous contenterons d'y réaliser ce travail d'épicier, et pour lui conférer de la superbe, nous y mélangerons des x, y, quantificateurs et autres formules mathématiques propres à impressionner la galerie. Mais derrière tout cela, il ne faudra pas oublier la simplicité dérisoire des objets que nous manipulons : carottes et courgettes. Au menu : la composition d'un beau panier de courses que l'on tâchera de mener au bout sans le transformer en bouillie ; nos outils mathématiques ne vont pas jusqu'à l'art culinaire de la mixture informe.

À l'instar de Monsieur Jourdain, j'espère que vous pourrez bientôt clamer :

« Par ma foi ! il y a plus de dix-huit ans que je manipule les espaces vectoriels sans que j'en susse rien, et je vous suis le plus obligé du monde de m'avoir appris cela. »

1 Approche intuitive

Avant de donner toutes les définitions formelles, tâchons de comprendre « avec les mains » ce qu'est un espace vectoriel.

Un premier espace vectoriel :
Comme dit en préambule, le principe de l'espace vectoriel est de constituer des paniers d'objets sans trop les écraser l'un contre l'autre. Commençons par un panier composé exclusivement de courgettes et d'aubergines :

> On note E l'ensemble des paniers composés exclusivement de courgettes et d'aubergines.

Ainsi, le panier $p_1 =$ « 3 courgettes et 5 aubergines » est un élément de E.

Opérations : certaines opérations entre paniers sont naturelles et ne demandent aucun effort d'abstraction.

- **Addition 'interne' :**

  Si $p_2 =$ « 1 courgette », alors $p_1 + p_2 =$ « 4 courgettes et 5 aubergines ».

- **Produit 'externe' par un scalaire** (un nombre) **:**

  $2\,p_1 =$ « 6 courgettes et 10 aubergines ».

Enfin, si on mélange les deux opérations, cela forme une **combinaison linéaire**.

$2p_1 - 3p_2 =$ « 3 courgettes et 10 aubergines ».

Cependant, on voit qu'on arrive rapidement à un problème :

$p_1 - 4p_2 =$ « -1 courgette et 5 aubergines ».

Ici, la quantité de courgettes devient négative : ce sont exactement les difficultés que nous avions rencontré lors de la construction de $\mathbf{R}$ (voir le chapitre sur les nombres réels). Alors cette fois-ci, évitons de jeter Hippase de Métaponte par dessus bord, et autorisons nous directement les paniers avec des quantités négatives, fractionnaires et même irrationnelles de courgettes et d'aubergines.
Dans notre super-magasin, on pourra donc commander des paniers du type :

$p_3 =$ « $3\sqrt{2}$ courgettes et $-\dfrac{\pi}{4}$ aubergines ».

Par contre, nous éviterons de multiplier ou de diviser deux paniers entre eux, ce qui n'aurait pas beaucoup de sens.

Une base pour se reposer :
C'est magnifique, on a réussi à ajouter nos courgettes et aubergines. Mais, au bout de quelques lignes, vous serez vite fatigués d'écrire à chaque fois le mot « courgette », et le mot « aubergine » et vous commencerez à utiliser des abréviations.
Peu à peu, l'écriture du premier panier se transformera :

$$p_1 = \text{ « 3 courgettes et 5 aubergines » } \qquad \rightarrow \qquad p_1 = 3\,c + 5\,a.$$

On y est ! Vous avez défini une base.
Si on note $c =$ « courgettes » et $a =$ « aubergines », alors tout panier de course s'écrit *de manière unique* sous la forme :

$$p = \lambda c + \mu a\ , \quad \text{avec} \ \ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

λ désigne la quantité de courgettes et μ la quantité d'aubergines.

On dit que $\mathcal{B} = (c, a)$ forme une **base** de E :

> Tout panier s'écrit de manière unique comme **combinaison linéaire** des éléments de la **base** : c et a.

Si la base $\mathcal{B}$ a été clairement définie, alors on peut identifier chaque panier à un unique tableau en colonne (on parle de matrice colonne) noté $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(p_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.
La première coordonnée désigne le nombre de « c », et la deuxième, le nombre de « a ».

Toutes les opérations sur les paniers se réalisent alors à l'aide des matrices colonne, coefficient par coefficient : $2p_1 - 3p_2$ s'obtient en réalisant l'opération

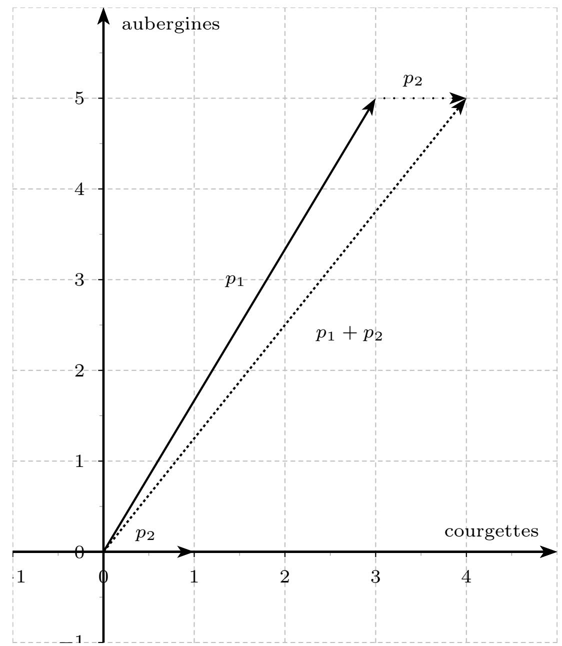
$$2 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Changement de base :
L'écriture sous cette forme nécessite d'avoir précisé la base auparavant. En effet, le choix de la base n'est pas unique.

- Par exemple, on peut choisir la base $\mathcal{B}' = (a, c)$, (échange l'ordre entre les courgettes et aubergines) et alors p_1 s'écrit $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(p_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- On peut aussi inventer des bases plus exotiques :
  avec $\mathcal{B}'' = (c, a - c)$, le panier s'écrit $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}''}(p_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

  Il est important de s'assurer que $\mathcal{B}''$ est une base : c'est-à-dire que l'on peut représenter tout panier comme *combinaison linéaire* des éléments de cette base, et que ces paniers n'ont qu'une seule écriture possible dans cette base. Ici, c'est trivial, mais cela sera un vrai sujet dans ce chapitre.

Représentation géométrique :
En se plaçant dans la base $\mathcal{B}$, on peut représenter tout panier par un *vecteur* de $\mathbf{R}^2$ (le terme espace « vectoriel » n'est pas anodin : c'est la généralisation des vecteurs vus en géométrie au lycée).
Ainsi, les paniers peuvent être représentés dans le plan, avec le nombre de courgettes en abscisse et le nombre d'aubergines en ordonnée. Si on change de base, cela revient à changer de repère.
Mais surtout, les opérations entre les paniers correspondent exactement aux opérations sur les vecteurs.



Passons maintenant à la formalisation mathématique de ces idées.

2 Combinaison linéaire

Dans l'approche intuitive, nous avons vu que l'intérêt de l'espace vectoriel était de pouvoir faire des *combinaisons linéaires* entre les vecteurs.
Par exemple, $2p_1 - 3p_2$ avec l'exemple d'introduction.
Cette notion est essentielle pour les espaces vectoriels car ils ont été construits *pour* faire des combinaisons linéaires comme nous allons le voir plus loin.

Nous allons donc commencer par définir ce qu'est une application linéaire, puis formaliser peu à peu la notion d'espace vectoriel.
Ce choix de présentation n'est pas très rigoureux, mais facilite la compréhension.

Pour les puristes : Pour ceux qui souhaitent une construction plus rigoureuse de l'objet, vous pouvez vous référer à l'annexe en fin de document à la section -1 en fin de document.

Notation : Dans tous ce chapitre, $\mathbf{K}$ désignera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Définition 2.1 *(Combinaison linéaire)*

Si E est un *espace vectoriel*[1]sur $\mathbf{K}$, alors on appelle **combinaison linéaire** de E toute somme finie de la forme
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \overrightarrow{u_k}$$
où $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \cdots, \overrightarrow{u_n}$ représentent un nombre **fini** de vecteurs
et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont des nombres de $\mathbf{K}$ (**scalaires**).

Dans notre exemple introductif, les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$... sont les paniers p_1, p_2...
La flèche au dessus du vecteur n'est pas indispensable (elle permet de bien identifier les vecteurs par rapport aux scalaires). Nous la notons ici pour simplifier la lecture et l'identification des objets, mais elle sera de plus en plus souvent omise à mesure que nous avancerons dans le chapitre.
Remarque : On parle indifféremment de $\mathbf{K}$-espace vectoriel, ou d'espace vectoriel sur $\mathbf{K}$.
Quand le choix de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ est sous-entendu, on parle plus simplement d'espace vectoriel.

Propriété 2.2 *(Propriété fondatrice des espaces vectoriels)*

Un espace vectoriel est *stable* par combinaison linéaire.
C'est-à-dire que toute combinaisons linéaire de vecteur de l'espace est encore un vecteur de l'espace.

Il est étonnant de donner la propriété avant d'avoir défini ce qu'est un espace vectoriel, mais il faut comprendre que les espaces vectoriels ont justement été définis *pour* pouvoir respecter cette propriété.
On définira un espace vectoriel comme un ensemble dans lequel on peut réaliser des combinaisons linéaires.

Exemple *(À connaître)*

- Le plan $\mathbf{R}^2$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, il correspond à tous les *vecteurs* du plan représentés par des couples.
- L'espace $\mathbf{R}^3$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, il correspond à tous les *vecteurs* de l'espace représentés par des triplets.
- L'espace $\mathbf{R}^n$ des n-uplets sur $\mathbf{R}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des polynômes réels de degré inférieurs ou égaux à n : $\mathbf{R}_n[X]$ forme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des matrices à coefficients réels de taille fixée forme un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.
- L'ensemble des suites réelles $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ forme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
- Pour Ω un ensemble, l'ensemble des application de Ω dans $\mathbf{R}$ forme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
- L'espace $\mathbf{C}^n$ des n-uplets sur $\mathbf{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$.
- L'ensemble des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à n : $\mathbf{C}_n[X]$ forme un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des matrices à coefficients complexes de taille fixée forme un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$.

1. On fait *comme si* on savait ce que c'était. En réalité, imposer de travailler dans un espace vectoriel E, revient simplement à s'assurer que l'ensemble est non vide et que les opérations proposées pour la combinaison linéaire existent bien.

3 Sous espaces vectoriels

A Caractérisation

Théorème 3.1 *(Caractérisation des sous espaces vectoriels)*

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et $F \subset E$,
F est un **sous espace vectoriel** de E s'il vérifie l'**une** des trois propriétés équivalentes suivantes :

- F est non vide et stable par combinaison linéaire.
- $\begin{cases} \overrightarrow{0_E} \in F, \\ \forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F^2, \ \ \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v} \in F. \end{cases}$
- $\begin{cases} \overrightarrow{0_E} \in F, \\ \forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F^2, \quad \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F, \\ \forall \overrightarrow{u} \in F, \ \ \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \lambda \overrightarrow{u} \in F. \end{cases}$

Remarque : on peut remplacer la condition $\overrightarrow{0_E} \in F$ par $F \neq \emptyset$.

Preuve

Cette preuve est réservée aux courageux qui ont lu l'annexe - 1.
L'équivalence des trois formulations est immédiate. Nous ne la prouvons donc pas ici.
Par contre, nous montrons que la deuxième formulation (par exemple) permet bien de caractériser les sous espaces vectoriels.

Tout d'abord un sous espace vectoriel vérifie toujours cette condition (propriétés 1.2 et 1.4).
Réciproquement, supposons qu'un sous-ensemble F de E vérifie cette condition, et montrons que c'est un sous espace vectoriel de E.

1. « + » est une loi interne en prenant $\lambda = 1$.
2. « + » est associative et commutative car E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
3. En prenant $\lambda = -1$, chaque élément admet un symétrique pour « + ».
4. $0_E \in F$ par hypothèse (si on remplace la condition par $F \neq \emptyset$, alors, on a $0 \cdot x = 0_E$, donc $0_E \in F$).
5. La loi externe est à valeurs dans F (en prenant $u = 0_E$).
6. « $\cdot$ » est distributive par rapport à « + » suivant la loi interne et la loi externe car E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
7. $\forall u \in E$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, $1 \cdot u = u$ et $(\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$ car E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

Donc F est un espace vectoriel. ■

Exemple

Montrer que les ensembles ci-dessous sont des espaces vectoriels.

- $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \text{ tel que } x + y + z = 0\right\}$.
- $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \text{ tel que } x = 3y = -2z\right\}$.

Solution :

Il y a toujours trois choses à vérifier :

1. L'ensemble est inclus dans un espace vectoriel « connu ».
2. L'ensemble est non vide (on montre qu'il contient le vecteur nul).
3. L'ensemble est stable par combinaison linéaire (se montre en une ou deux étapes au choix).

Faisons la preuve pour les ensembles donnés en exemple :

- $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \text{ tel que } x + y + z = 0\right\}$
  1. $E \subset \mathbf{R}^3$ qui est un espace vectoriel (avec les opérations usuelles).
  2. Pour $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, on a $x + y + z = 0 + 0 + 0 = 0$.
     Donc le vecteur nul appartient à E.
  3. (en deux étapes)
     - Si $\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in E$ et $\overrightarrow{v} = (x', y', z') \in E$, alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x + x', y + y', z + z')$.
       Or $(x+x')+(y+y')+(z+z') = (x+y+z)+(x'+y'+z') = 0+0 = 0$ (car $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$).
       Donc $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in E$, ainsi E est stable par somme.
     - De plus, si $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $\lambda \overrightarrow{u} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
       Or $\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda (x + y + z) = \lambda \cdot 0 = 0$.
       Donc E est stable par produit avec un scalaire.

     Ainsi E est stable par combinaison linéaire.

  Donc E est un espace vectoriel.
- $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \text{ tel que } x = 3y = -2z\right\}$
  1. $E \subset \mathbf{R}^3$ qui est un espace vectoriel (avec les opérations usuelles).
  2. Pour $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, on a $0 = 3 \cdot 0 = -2 \cdot 0$.
     Donc le vecteur nul appartient à E.
  3. (en une seule étape)
     Si $\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in E$, $\overrightarrow{v} = (x', y', z') \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors,
     $\overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v} = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$.
     Or $x + \lambda x' = 3y + \lambda \times 3y' = 3 (y + \lambda y')$
     et $x + \lambda x' = -2z + \lambda \times (-2) z' = -2 (z + \lambda z')$
     Donc $\overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v} \in E$, ainsi E est stable par combinaison linéaire.

  Donc E est un espace vectoriel.

Propriété 3.2

Un espace vectoriel contient toujours le vecteur nul.

Preuve

En effet, un espace vectoriel E est toujours non vide. Il contient donc au moins un vecteur $\overrightarrow{u} \in E$.
De plus, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \overrightarrow{u} \in E$ (stabilité par combinaison linéaire).
Donc pour $\lambda = 0$, on obtient $\lambda \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \in E$. ■

Méthode *(Montrer que E n'est pas un espace vectoriel)*

Pour montrer qu'un ensemble E n'est pas un espace vectoriel :

1. On teste si $\overrightarrow{0} \in E$.
2. Si c'est vérifié, alors on cherche des vecteurs et des scalaires pour construire une combinaison linéaire dont le résultat n'est pas dans E.

Exemple *(Contre-exemples)*

Montrer que les ensembles ci-dessous ne sont pas des espaces vectoriels (munis des opérations usuelles)

- Une droite affine du plan : pour $(a,b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$, $E = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ \text{tel que } y = ax+b\right\}$.
- Une demi-droite du plan.

Solution :

- $(0,0) \notin E$, donc E n'est pas un espace vectoriel.
- Ici, le point $(0,0) \in E$, donc il faut chercher un contre-exemple par combinaison linéaire.
  Très simplement, on prend le vecteur symétrique d'un vecteur de E :
  si $(x,y) \in E$ avec $(x,y) \neq (0,0)$, alors le point symétrique $-(x,y) \notin E$.
  Donc E n'est pas un espace vectoriel.

B Intersection d'espaces vectoriels

Théorème 3.3 *(Intersection de deux espaces vectoriels)*

Si F et G sont deux sous espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de E.

Preuve

- $F \cap G \subset F$, il suffit donc de montrer que $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de F.
- $\overrightarrow{0_E} \in F \cap G$ (car $\overrightarrow{0_E} \in F$ et $\overrightarrow{0_E} \in G$: ce sont des espaces vectoriels),
- $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F \cap G, \forall \lambda \in \mathbf{K}$,
  or $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F^2$, donc $\overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v} \in F$ car F est un espace vectoriel.
  et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in G^2$, donc $\overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v} \in G$ car G est un espace vectoriel.
  Donc $\overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v} \in F \cap G$.

Donc $F \cap G$ est un espace vectoriel. ■

Exemple

L'intersection de deux plans vectoriels (non confondus) dans l'espace forme une droite vectorielle.

Théorème 3.4 *(Intersection)*

Toute intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Remarque : C'est vrai pour l'intersection d'un nombre quelconque d'espaces vectoriels.

Preuve

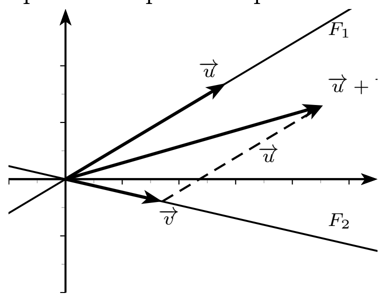
C'est la même preuve que pour 2 espaces. ■

⚠ En général l'union de deux espaces vectoriels $E \cup F$ **n'est pas** un espace vectoriel.

Exemple

L'union de deux droites non confondues du plan n'est pas un espace vectoriel.

Sur la figure ci-contre,
Si on note F_1 la première droite et F_2 la seconde droite.
$\overrightarrow{u} \in F_1$, donc $\overrightarrow{u} \in F_1 \cup F_2$
$\overrightarrow{v} \in F_2$, donc $\overrightarrow{v} \in F_1 \cup F_2$,
mais $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \notin F_1$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \notin F_2$,
donc $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \notin F_1 \cup F_2$.



Explications

En général, les structures « passent très bien » à l'intersection et mal à l'union.
Cela se comprend aisément : faire l'intersection de deux ensembles, c'est cumuler les conditions de chacun : si $\overrightarrow{u} \in E \cap F$, alors $\overrightarrow{u}$ vérifie *à la fois* les conditions de E et celles de F. C'est une notion très restrictive : on trie les candidats sur le volet.
En revanche, les structures passent moins bien à l'union, car dans l'union, il suffit de ne vérifier que l'une *ou* l'autre des conditions d'appartenance : c'est beaucoup moins rigide.
Cette idée n'est pas spécifique aux espaces vectoriels : par exemple, l'intersection de deux intervalles est encore un intervalle (éventuellement vide), par contre, l'union n'en est pas un (sauf cas particulier).

C Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$

Par définition, un espace vectoriel contient le vecteur nul et il est stable par combinaison linéaire. Les droites de $\mathbf{R}^2$ sont des espaces vectoriels si, et seulement si elles passent par 0.
Pour décrire une droite vectorielle, il suffit donc d'avoir un vecteur directeur (dit aussi *générateur*). Un point par lequel passe la droite est une information inutile car on sait que l'on peut choisir l'origine. De même, un plan vectoriel est décrit par deux vecteurs générateurs (au moins) et passe par l'origine.

Théorème 3.5 *(Espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$)*

Les espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$ sont :

- Le singleton $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$. C'est le « plus petit » espace vectoriel qui soit ; il ne contient qu'un seul vecteur. L'espace est de **dimension** 0 car on n'a pas besoin de vecteur générateur pour le décrire.
- Les droites qui passent par l'origine. Elles sont décrites par un vecteur générateur non nul. Ce sont les espaces de **dimension** 1 (besoin d'un vecteur générateur pour les décrire).
- Le plan $\mathbf{R}^2$ tout entier. Il est décrit par deux vecteurs générateurs. C'est un espace de **dimension** 2.

Ce sont les seuls espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$.

Théorème 3.6 *(Espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$)*

Dans $\mathbf{R}^3$, les espaces vectoriels sont :

- Le singleton $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$. C'est l'espace de **dimension** 0.
- Les droites qui passent par l'origine. Ce sont les espaces de **dimension** 1.
- Les plans qui passent par l'origine. Ils sont décrits par deux vecteurs générateurs. Ce sont les espaces de **dimension** 2.
- L'espace $\mathbf{R}^3$ tout entier. C'est un espace de **dimension** 3.

Ce sont les seuls espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.

Ces théorèmes sont admis à ce stade (on ne sait même pas encore formellement ce qu'est la dimension d'un espace vectoriel). Ils servent à mieux appréhender ce qu'est un espace vectoriel géométriquement.
Une fois que l'on a compris ce principe : décrire une droite à partir d'un vecteur directeur, un plan à partir de deux... il n'est pas très difficile de généraliser cela aux dimension supérieures.
C'est ce que nous allons faire désormais avec la notion d'espace vectoriel engendré.

4 Espace engendré

L'objet de cette section est de trouver une méthode pour décrire un espace vectoriel sans avoir besoin de lister tous les éléments de l'espace (il y en a une infinité).
Si on reprend l'exemple du préambule, nous avions naturellement décrit l'espace comme l'ensemble des paniers constitués de courgettes et d'aubergines. C'est une façon simple de décrire cet espace.
Nous allons introduire une notation mathématique pour traduire cette idée :

$$\text{Vect}\,(\text{« courgettes »}, \text{« aubergines »})$$

désigne tous les paniers que l'on peut composer avec des courgettes et des aubergines.
Par contre, cette description n'est pas unique, et on peut décrire le même espace avec Vect (« courgettes », « aubergines », « 5 aubergines »).

Géométriquement, on peut décrire une droite vectorielle par un vecteur directeur non nul $\overrightarrow{u}$. On la note Vect $(\overrightarrow{u})$ et elle est composée de tous les vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{u}$.
De même, le plan engendré par les deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est noté Vect $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, ce sont tous les vecteurs que l'on peut écrire comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Notation : À partir d'ici, nous n'utiliserons plus la flèche pour noter le vecteur. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{u}$ sera simplement noté u. C'est le contexte qui permettra de décider de la nature de l'objet (nombre réel ou vecteur).
Pour faciliter la lecture, il est d'usage de réserver les lettres grecques aux nombres réels (scalaires) et les lettres latines aux vecteurs. Mais il y a des exceptions.

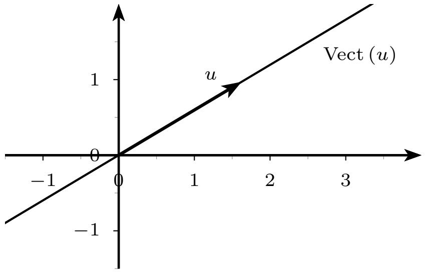
Définition 4.1 *(Sous espace vectoriel engendré)*

Soit E un espace vectoriel, et $u_1, u_2, \cdots, u_n$ une famille finie de vecteurs de E.
On appelle sous espace vectoriel de E **engendré** par $u_1, u_2, u_3, \cdots u_n$, le sous espace vectoriel de E composé des combinaisons linéaires des u_i.
On note

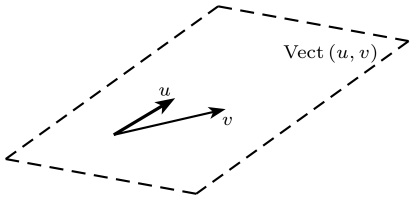
$$\text{Vect}\,(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \{\lambda_1\, u_1 + \lambda_2\, u_2 + \cdots \lambda_n\, u_n, \ \text{ pour } (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n\}.$$

Exemple

- L'espace vectoriel engendré par un vecteur u : $\text{Vect}\,(u) = \mathbf{K}u$ est la droite vectorielle de vecteur directeur u (et qui passe par 0_E).
  Par exemple, dans le plan réel :



- Espace vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires u, v :
  $\text{Vect}(u,v) = \{\lambda u + \mu v,\ (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2\}$ est le plan vectoriel engendré par ces deux vecteurs.



Explications
On voit que la description de l'espace avec une famille génératrice, correspond à la description paramétrique telle qu'elle a été vue en géométrie.

5 Familles finies de vecteurs

Dans cette section, E désigne un espace vectoriel.

A Familles libres et liées

Nous avons vu comment engendrer un espace vectoriel par une famille de vecteurs. Mais parfois, la famille contient des informations redondantes : par exemple $\text{Vect}(u, 2u) = \text{Vect}(u)$. En effet, $\text{Vect}(u, 2u)$ est exactement la droite engendrée par u : ici, l'ajout dans la famille du vecteur $2u$ n'apporte aucune information supplémentaire (car il est colinéaire à u).
Le but de cette section est analyser l'information portée par une famille de vecteurs :

- Lorsque tous les vecteurs de la famille sont *indispensables* et apportent chacun une information nouvelle, alors on dira que la famille est **libre**.
- A contrario, si certains vecteurs de la famille sont *superflus* et n'apportent aucune information supplémentaire, alors, la famille sera dite **liée** : on peut lui retirer un certain nombre de vecteurs sans modifier l'espace qu'elle engendre.

La famille $(u, 2u)$ est liée : on peut supprimer l'un des deux vecteurs sans que cela change l'espace engendré. Par contre, si $u \neq 0$, alors la famille composée du seul vecteur u est libre : si on enlève le vecteur, l'espace engendré est $\{0\}$ et non plus la droite.
On cherchera autant que possible à travailler avec des familles libres pour éviter les informations redondantes.

Définition 5.1 *(Famille libre et famille liée)*

Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que la famille est **liée**, si un de ses vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.
- On dit que la famille est **libre** si elle n'est pas liée. Dans ce cas, on dit aussi que les vecteurs sont **linéairement indépendants**.

Exemple
Deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$ forment une famille libre s'ils ne sont pas colinéaires.
Trois vecteurs de $\mathbf{R}^n$ forment une famille libre s'ils ne sont pas coplanaires.

Exemple
Dans $E = \mathbf{R}^3$, on définit les vecteurs $u = (2, 3, 5)$, $v = (3, 4, 0)$ et $w = (5, 7, 5)$.
Montrer que la famille (u, v, w) est liée, mais que la famille (u, v) est libre.
Solution :
On remarque que $w = u + v$, ainsi w peut s'écrire comme combinaison linéaire de u et de v. La famille est donc liée.
Par contre, u et v ne sont pas colinéaires et il forment donc une famille libre.

Théorème 5.2 *(Caractérisation des familles liées et libres)*

$(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est une **famille libre**, si et seulement si

$$\forall(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

$(u_1, u_2, \cdots, u_n) \in E^n$ est une **famille liée**, si et seulement si

$$\text{il existe } (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \textbf{ non tous nuls} \text{ tel que } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E.$$

Remarque : pour la famille libre, on a même l'équivalence, mais la réciproque n'apporte rien car elle est toujours vraie.

Preuve
(*sens direct*) par l'absurde : soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$.
Supposons par l'absurde qu'il existe un λ_{i_0} non nul, alors $u_{i_0} = \sum_{i\neq i_0} -\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} u_i$.
Donc u_{i_0} s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs : la famille n'est pas libre. C'est aburde. Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$.
(*sens réciproque*) par contraposée : si la famille est liée, alors un des vecteurs s'écrit

comme combinaison linéaire des autres. Par exemple $u_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \lambda_i u_i$.
Donc en posant $\lambda_{i_0} = -1$, on trouve $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ et les λ_i sont non tous nuls.
D'où le résultat par contraposée.
Le cas de la famille liée s'obtient simplement par la négation du précédent. ■

Méthode

- Pour montrer qu'une famille $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est **libre**, on suppose n scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ dans $\mathbf{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0$, et on montre que tous les λ_k sont nécessairement nuls.
- Pour montrer qu'une famille $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est **liée**, on cherche une combinaison linéaire qui donne 0_E.

Exemple *(méthode)*

Montrer que les trois vecteurs $u = (0, 0, -1, 1)$, $v = (0, 9, -3, 1)$ et $w = (2, 5, 8, 0)$ forment une famille libre de $\mathbf{R}^4$.

Solution :

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$, on suppose que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbf{R}^4}$.
Ainsi :

$$\lambda_1(0,0,-1,1) + \lambda_2(0,9,-3,1) + \lambda_3(2,5,8,0) = (0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow (0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 2\lambda_3, 0\lambda_1 + 9\lambda_2 + 5\lambda_3, -\lambda_1 - 3\lambda_2 + 8\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + 0\lambda_3) = (0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0\lambda_1 & +0\lambda_2 & +2\lambda_3 & = 0 \\ 0\lambda_1 & +9\lambda_2 & +5\lambda_3 & = 0 \\ -\lambda_1 & -3\lambda_2 & +8\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 & +\lambda_2 & +0\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

Le système a été obtenu en identifiant coordonnée par coordonnée dans le 4-uplet.
On voit qu'étudier la linéarité d'une famille de p vecteurs de $\mathbf{R}^n$ revient à résoudre un système linéaire homogène à p inconnues et n équations.
On sait que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ est toujours solution (le système est homogène). La question est de savoir si c'est la seule solution ou s'il y en a d'autres.

→ C'est la seule solution si et seulement si le système admet autant de pivots que d'inconnues, c'est-à-dire autant d'inconnues que de colonnes (nombre de vecteurs).

Ici, la matrice associée au système homogène est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que cette matrice peut être obtenue en plaçant les vecteurs u, v et w sous forme de colonne dans la matrice.
Ainsi, la famille est libre si et seulement si, la matrice ainsi obtenue admet autant de pivots que de colonnes : c'est ce que nous formalisons dans le théorème 5.3 qui suit.

Pour revenir à l'exercice présent, la solution est triviale :

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = 0 \\ 5\lambda_1 + 9\lambda_2 = 0 \\ 8\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ainsi la famille est libre.
Ici, le système est déjà sous forme échelonnée avec 3 pivots (quitte à changer l'ordre des lignes).

Il faut se souvenir de cette méthode qui permet de comprendre et justifier le théorème suivant (écrit dans le cas général) :

Théorème 5.3 *(Caractérisation des familles libres de $\mathbf{K}^n$)*

Une famille de vecteurs de $\mathbf{K}^n$ est libre, si et seulement si, la matrice composée de ses vecteurs écrits en colonne possède autant de pivots que de **colonnes**.

Exemple

Montrer que les trois vecteurs $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 1, 2)$ et $w = (2, 3, 1)$ forment une famille libre de $\mathbf{R}^3$.

Solution :

On écrit la matrice avec les trois vecteurs écrit sous forme de matrice colonne. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
On cherche le rang par le pivot de Gauss :

$$A \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow -L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 18 & 0 \end{pmatrix}$$

Quitte à changer l'ordre des vecteurs en u, w, v (ce qui revient à échanger les deux dernières colonnes), on obtient une forme échelonnée à 3 pivots.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Il y a autant de pivots que de colonnes, donc la famille est libre.

Propriété 5.4 *(Interprétation de la liberté)*

La famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille **libre** de E, si et seulement si tout vecteur de $\mathrm{Vect}\,(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ s'exprime de manière *unique* comme combinaison linéaire des u_i.

Preuve

- **sens direct :** on suppose que la famille est libre et on décompose un vecteur $u \in \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ de deux manières différentes : $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i$.

Montrons que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = \mu_i$ (la décomposition est unique).
Si on fait la différence, on obtient : $0_E = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i - \sum_{i=1}^n \mu_i u_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i)\, u_i$.
Or, la famille $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est libre, donc une si combinaison linéaire de ses vecteurs est nulle, alors les coefficients sont nuls. Donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i - \mu_i = 0$, donc $\lambda_i = \mu_i$.

- **sens réciproque :** on suppose que la décomposition est unique pour tout vecteur de l'espace engendré. C'est donc vrai en particulier pour le vecteur 0 :
$\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_E = \sum_{i=1}^n 0 \cdot u_i \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$. Donc la famille est bien libre. ■

Explications

Quel est l'intérêt d'une famille libre ?
Si un vecteur u peut être décomposé comme combinaison linéaire des éléments de cette famille, alors, cette décomposition est unique.
C'est l'intérêt des familles libres, on pourra raisonner par identification :

> Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leur décomposition dans la famille est identique.

Le théorème suivant sert à construire des familles libres par ajouts successifs de vecteurs. On l'utilise dans des raisonnements par récurrence.
Il traduit une intuition géométrique forte qu'il faut comprendre :
Si on veut ajouter un vecteur qui donne une « information » supplémentaire, il faut (et il suffit) qu'il n'appartienne pas à l'espace déjà engendré par les premiers vecteurs.

Théorème 5.5 *(Ajout d'un vecteur à une famille libre)*

Si $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille libre de E et $y \in E$,
alors la famille obtenue à partir de $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ complétée par y est libre si et seulement si

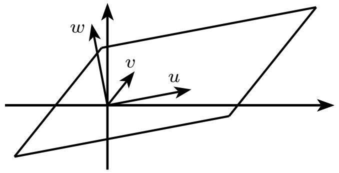
$$y \notin \text{Vect } (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

Preuve

(sens direct) par contraposée.
Si $y \in \text{Vect } \left(\{u_i\}_{i \leqslant i \leqslant n}\right)$, alors y s'écrit comme combinaison linéaire des (u_i), donc la nouvelle famille est liée.
(sens réciproque) par contraposée.
Si la famille obtenue est liée, alors on peut trouver des vecteurs (non tous nuls) tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i + \lambda_{n+1} y = 0_E$.
Si $\lambda_{n+1} = 0$, alors la famille des u_i serait liée, ce qui est contraire à l'énoncé. Donc en divisant par λ_{n+1}, on montre que $y \in \text{Vect } \left(\{u_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}\right)$. ■

Exemple

Si u et v sont deux vecteurs non colinéaires (famille libre), alors Vect (u, v) est un plan.
Pour que la famille (u, v, w) soit libre, il faut (et il suffit) que les vecteurs soient non coplanaires, c'est-à-dire que w n'appartienne pas au plan engendré par u et v.



Propriété 5.6 *(Famille extraite)*

Toute famille extraite d'une famille libre est libre.

Explications

Si dans une famille de vecteurs, chaque vecteur porte une information qui lui est propre et ne peut pas s'obtenir avec les autres vecteurs de la famille, alors, c'est « encore plus vrai » si on ne prend qu'une partie de cette famille :

Preuve

On suppose que $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est une famille libre.
On en extrait une sous famille (c'est-à-dire que l'on ne prend qu'une partie des u_k) et on écrit qu'une combinaison linéaire de ces vecteurs est égale à 0_E.
Or, c'est également une combinaison linéaire de la famille initiale (on rajoute zéro fois chacun des vecteurs qui n'apparaissait pas dans la sous famille).
Donc, par liberté de la famille initiale, tous les scalaires sont nécessairement nuls.
Ils le sont donc pour la sous famille : elle est libre. ■

B Familles génératrices

La notion de famille génératrice est très simple dans son principe : par définition, une famille est génératrice de l'espace qu'elle engendre.
Ainsi, pour savoir si une famille est génératrice de E, il faut voir si la famille engendre l'espace E.

Définition 5.7 *(Famille génératrice)*

La famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille **génératrice** de E, si

$$E = \text{Vect } (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

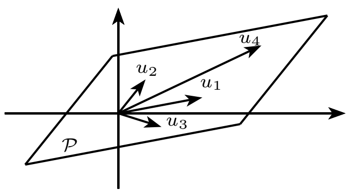
Cette notion nous assure que l'on ne travaille pas dans un espace « trop gros » et que tout vecteur de E peut être décomposé dans la famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.
Si ce n'était pas le cas, alors, il faudrait, soit travailler dans un espace plus petit, soit ajouter des vecteurs dans la famille.

Théorème 5.8 *(Caractérisation)*

La famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille **génératrice** de E, si et seulement si tout vecteur de E peut s'exprimer comme combinaison linéaire des u_i.

Exemple

Une famille de $\mathbf{R}^3$ génératrice d'un plan doit contenir deux vecteurs non colinéaires.
Dans la figure ci-contre,
(u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille génératrice du plan $\mathcal{P}$.
(on pourrait générer le même plan avec moins de vecteurs)



Exemple *(Trouver une famille génératrice)*

Soit F le sous espace de $\mathbf{R}^4$ défini par

$$F = \left\{(x+y+z, x-3y+4z, y-z, -x+2z)\,, \quad (x,y,z) \in \mathbf{R}^3\right\}$$

Donner une famille génératrice de F.
Solution :
Pour cela on écrit le vecteur sous forme de somme à partir des paramètres x, y, z.

$$\begin{aligned}
&(t,u,v,w) \in F\\
&\iff \exists (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \text{ tel que } (t,u,v,w) = (x+y+z, x-3y+4z, y-z, -x+2y)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = x(1,1,0,-1) + y(1,-3,1,0) + z(1,4,-1,0)
\end{aligned}$$

Ainsi, tout vecteur de F s'écrit comme combinaison linéaire de $(1,1,0,-1)\,,\,(1,-3,1,0)$ et $(1,4,-1,0)$.

Donc la famille $\big((1,1,0,-1)\,,\,(1,-3,1,0)\,,\,(1,4,-1,0)\big)$ est génératrice de F

Remarque : on peut aussi montrer que cette famille est libre.

Méthode *(Montrer qu'une famille est génératrice)*

Cas général :
Pour montrer que la famille $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une famille génératrice de E, on pose $u \in E$ quelconque, et on cherche

$$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \text{ tel que } u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

$\to$ résolution d'équation.

Dans $\mathbf{K}^n$:
Cela revient à résoudre un système linéaire : chaque équation correspond à une coordonnée.

Exemple *(méthode)*

Montrer que $e_1 = (1,1,1)\,, e_2 = (1,2,3), e_3 = (2,3,4), e_4 = (3,2,3)$ forment une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$. La famille est-elle libre ?
Solution :
Soit $u \in \mathbf{R}^3$ quelconque. Il existe $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ tel que $u = (x,y,z)$.

$$\begin{aligned}
&u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4\\
&\iff \left\{\begin{array}{lllll}
\lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & = x\\
\lambda_1 & +2\lambda_2 & +3\lambda_3 & +2\lambda_4 & = y\\
\lambda_1 & +3\lambda_2 & +4\lambda_3 & +3\lambda_4 & = z
\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{llllll}
\lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & = x & \\
 & \lambda_2 & +\lambda_3 & -\lambda_4 & = -x+y & \leftarrow L_2 - L_1\\
 & 2\lambda_2 & +2\lambda_3 & & = -x+z & \leftarrow L_3 - L_1
\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{llllll}
\lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & = x & \\
 & \lambda_2 & +\lambda_3 & -\lambda_4 & = -x+y & \\
 & & & 2\lambda_4 & = x-2y+z & \leftarrow L_3 - 2L_2
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Le système n'a pas de pivots dans le second membre : il est compatible.
Ainsi, il existe (au moins) une solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ au système.

Dans l'exemple précédent, on observe que la famille est génératrice si et seulement si le système admet une solution quelque soit le second membre.

Théorème 5.9 *(Caractérisation des familles génératrices de $\mathbf{K}^n$)*

Une famille de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ est génératrice de $\mathbf{K}^n$, si et seulement si, la matrice composée de ses vecteurs écrits en colonne possède autant de pivots que de **lignes**.

On obtient donc la règle suivante :

- **libre :** autant de pivots que de colonnes,
- **génératrice :** autant de pivots que de lignes.

⚠ Ne pas être génératrice de $\mathbf{R}^n$ n'empêche pas d'être génératrice d'un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.

Propriété 5.10 *(Famille complétée)*

Tout famille génératrice de E complétée d'un ou plusieurs vecteurs de E est génératrice de E.

Preuve

Si $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est une famille génératrice de E que l'on complète avec $u_{n+1}, \cdots, u_p$, alors tout vecteur $u \in E$ peut s'écrire comme combinaison de $u_1, \cdots, u_n$. Ainsi il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ ..
En posant $\lambda_{i+1} = \cdots = \lambda_p = 0$, alors on a également $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$.
Donc $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est une famille génératrice de E. ■

C Bases

Ce qui nous intéresse, c'est de pouvoir générer un espace avec le nombre minimal de vecteurs.
Pour cela, il faut donc que la famille de vecteurs soit génératrice.
Mais en général, une famille génératrice contient plus de vecteurs que nécessaire. On impose donc également à la famille d'être libre.

Définition 5.11 *(Base)*

La famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une **base** de E, si elle est libre et génératrice de E.

Théorème 5.12 *(Caractérisation)*

La famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une **base** de E, si et seulement si
tout vecteur de E peut s'écrire de façon *unique* comme une combinaison linéaire des u_i.

Les coefficients de la combinaison linéaire sont alors appelés les **coordonnées** du vecteur dans la base.

Preuve

Tout vecteur de E peut se décomposer dans la famille car elle est génératrice de E et l'écriture est unique car la famille est libre. ∎

Exemple

- Les vecteurs $\overrightarrow{i}=(1,0)$ et $\overrightarrow{j}=(0,1)$ forment une base de $\mathbf{R}^2$.
- De même, si dans $\mathbf{R}^n$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on note $e_1=(0,0,\cdots,\underbrace{1}_{i},0,..)$ le vecteur dont toutes les coordonnées valent 0, sauf la coordonnée i qui vaut 1, alors $\mathcal{C}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$ appelée **base canonique** de $\mathbf{R}^n$.

Exemple

Donner une base de $\mathbf{R}^2$, autre que la base canonique.
Solution :
Il suffit d'obtenir deux vecteurs avec lesquels on peut former un repère de $\mathbf{R}^2$. On a l'embarra du choix !

Exemple *(Décomposer un vecteur dans une base de $\mathbf{R}^n$)*

Dans $\mathbf{R}^3$, on définit les vecteurs $e_1=(1,5,2)$, $e_2=(0,2,-2)$ et $e_3=(1,3,2)$.
Montrer que (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ donner les coordonnées de $u=(x,y,z)$ dans cette base.
Solution :
On répond aux deux questions par un seul calcul. Pour $u=(x,y,z)$ quelconque dans $\mathbf{R}^3$, on cherche $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbf{R}^3$ tel que $u=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3$ et on montre que ces scalaires sont uniques.

Cela revient à montrer que le système linéaire admet une unique solution :

$$\begin{cases}\lambda_1 & & +\lambda_3 & =x\\ 5\lambda_1 & +2\lambda_2 & +3\lambda_3 & =y\\ 2\lambda_1 & -2\lambda_2 & +2\lambda_3 & =z\end{cases}$$

Pour changer, utilisons la méthode avec la matrice augmentée :

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&x\\5&2&3&y\\2&-2&2&z\end{array}\right)\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-5L_1\\L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&x\\0&2&-2&-5x+y\\0&-2&0&-2x+z\end{array}\right)$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&x\\0&2&-2&-5x+y\\0&0&-2&-7x+y+z\end{array}\right)$$

On voit que le système admet 3 pivots, la solution existe donc est elle est unique.
Cela montre que la famille est une base.
Il suffit de finir la résolution pour trouver $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ qui sont les coordonnées de u dans cette base.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&x\\0&2&-2&-5x+y\\0&0&-2&-7x+y+z\end{array}\right)\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1+L_3\\L_2\leftarrow L_2-L_3}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-6x+y+z\\0&2&0&2x-z\\0&0&-2&-7x+y+z\end{array}\right)$$

On note $\mathrm{mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(x,y,z)=\begin{pmatrix}-6x+y+z\\x-\frac{z}{2}\\\frac{7x-x-z}{2}\end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de (x,y,z) dans la base (e_1,e_2,e_3).

Méthode *(Extraire une base)*

Si $(u_1,u_2,\cdots,u_p)$ est une famille génératrice de $\mathbf{K}^n$, alors on peut en extraire une base avec la méthode suivante :

1. on écrit la matrice composée des vecteurs $(u_1,\cdots,u_p)$ écrits sous forme de colonne.
2. on effectue la méthode du pivot, jusqu'à obtenir n pivots.
(pas besoin d'aller jusqu'à la forme échelonnée réduite)
3. on sélectionne les u_i, dont la colonne a donné un pivot.

Exemple *(Extraire une base)*

Montrer que $e_1=(1,1,1)\,,e_2=(1,2,3),e_3=(2,3,4),e_4=(3,2,3)$ forment une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$.
En extraire une base.
Solution :
On a déjà vu à l'exemple de la page 10 que la famille est génératrice.
On avait obtenu la matrice échelonnée :

(on l'avait écrit sous forme de système ce qui revient au même, et on avait réalisé les calculs avec un second membre que l'on ne considère pas ici)

$$\begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & = x & \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & -\lambda_4 & = -x+y & \\ & & & 2\lambda_4 & = x-2y+z & \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases} \quad \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On obtient des pivots aux colonnes 1, 2 et 4.
Si on ne garde que ces colonnes, c'est-à-dire la famille (e_1, e_2, e_4), alors les mêmes opérations sur les lignes donnent la matrice échelonnée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En effet, les opérations sur les lignes agissent indépendamment sur chaque colonne et le fait d'enlever certaines colonnes à la matrice initiale revient à enlever ces mêmes colonnes à la matrice finale, sans avoir à modifier le reste.
La matrice obtenue contient autant de pivots que de lignes : la famille est génératrice.
De plus, la matrice contient autant de pivots que de colonnes, donc la famille est libre.
(e_1, e_2, e_4) est une base de $\mathbf{R}^3$.
Remarque : ce n'est pas la seule base extraite possible.

6 Dimension d'un espace vectoriel

A Approche intuitive

On parle naturellement d'un espace à 1, 2 ou 3 voire 4 dimensions dans la vie quotidienne. C'est ce que nous allons généraliser. On peut interpréter la dimension d'un espaces de deux façons complémentaires :

- *La dimension est le nombre de directions indépendantes selon lesquelles on peut se diriger au sein de l'espace.*
  - Par exemple, $\{0\}$ est un singleton. Si mon monde se réduisait à ce seul point, alors je serais nécessairement immobile : je ne pourrais pas changer de point et n'aurais donc aucun mouvement possible.
    $\{0\}$ est de dimension 0. C'est le seul espace de dimension 0.
  - $\mathbf{R}$ est une droite : une ligne. Si mon monde se réduisait à cette ligne, je n'aurais qu'une direction possible pour mes mouvements le long de cette droite : l'espace est de dimension 1.
    Réciproquement, tout espace de dimension 1 est une droite.
  - $\mathbf{R}^2$ est un plan. Je peux donc m'orienter suivant deux directions : avant/arrière et gauche/droite. L'espace est de dimension 2.
    Réciproquement, tout espace de dimension 2 est un plan.
  - Pour $\mathbf{R}^3$, j'ajoute une direction supplémentaire : haut/bas.
  - Un espace de dimension 4 est plus difficile à représenter, mais il comporte à son tour encore une direction de mouvement supplémentaire. On a coutume d'ajouter le temps que l'on pourrait faire défiler à notre guise : se déplacer dans le temps pour désigner cette dimension supplémentaire.
  - Et ainsi de suite. Pour chaque dimension supplémentaire, on ajoute une nouvelle direction possible pour un mouvement.
- *La dimension d'un espace est le nombre minimal d'informations qu'il faut pour pouvoir décrire parfaitement et sans ambigüité chaque vecteur de cet espace.*
  - Pour l'espace $\{0\}$, on n'a besoin d'aucune information pour décrire le vecteur considéré car on n'a pas le choix : il n'y a que le vecteur 0 possible.
    Ainsi $\{0\}$ est de dimension 0.
  - Pour l'espace $\mathbf{R}$ (ou toute droite linéaire), il suffit d'avoir l'abscisse pour connaître le vecteur considéré : une information donc de dimension 1.
  - Pour $\mathbf{R}^2$, il faut deux informations. Un vecteur du plan est décrit par un couple (abscisse, ordonnée). L'espace est de dimension 2.

  C'est cette deuxième approche qui nous servira à formaliser mathématiquement la notion de dimension.

Exemple

- Dans l'exemple introductif nous avions considéré des paniers de légumes composés de courgettes et d'aubergines. L'espace était de dimension 2.
- Si on rajoutait un autre type de légume à notre panier, alors, on aurait un espace de dimension 3 et chaque panier serait décrit par un triplet (x, y, z).

Intérêt de la base :
On voit donc que chaque nouvelle information indépendante donne une nouvelle direction, c'est-à-dire augmente la dimension de 1.
Ainsi, tout vecteur d'un espace de dimension n peut être décrit de façon unique par n informations.

La question est donc de traduire ces informations (des nombres réels) en vecteurs de l'espace.
Par exemple, avec les paniers de courgettes et aubergines, on peut traduire $(5, 3)$ par le panier « 5 courgettes et 3 aubergines ». Mais on pourrait aussi le traduire par « 3 courgettes et 5 aubergines ».
Il faut donc donner une clef de lecture pour comprendre que le 5 désigne le nombre d'aubergines et le 3, le nombre de courgettes. Cette « clef de lecture » est ce qui permet de transformer nos informations numériques en vecteurs de l'espace : on appelle cela une **base**.
Dans l'exemple en question, la base est simplement composée de deux vecteurs (ici des paniers) :

- $e_1 =$ « 1 aubergine et 0 courgettes »,
- $e_2 =$ « 0 aubergine et 1 courgettes ».

Ainsi, écrire $(5,3)$ revient à faire $5e_1 + 3e_2 =$ « 5 courgettes et 3 aubergines ».
(e_1, e_2) est la base choisie pour l'espace (on pourrait en choisir d'autres).

La base sert de *repère*[2] dans l'espace considéré.
Par exemple, en dimension 1, la description de la droite suppose d'avoir choisi un vecteur directeur u (qui sert de base). Ainsi tout autre vecteur de la droite s'écrit $v = \lambda u$. λ est « l'information » qui donne v sans ambigüité.

La dimension de l'espace est égal au nombre de vecteurs qu'il faut pour constituer une base de l'espace.

Une fois cette base fixée, la connaissance des coordonnées du vecteur dans cette base permet de décrire exactement ce vecteur par un uplet.

Pourquoi une base ? On voit bien que la famille qui doit servir de repère doit être génératrice pour que l'on puisse décrire *tous* les vecteurs de l'espace grâce à elle.
De plus, on ne veut pas qu'elle porte d'informations redondantes et qu'elle permettre de décrire chaque vecteur de façon *unique*. Elle doit donc être libre.
Cela correspond exactement à la définition d'une base.

D'un point de vue formel, pour que tout ceci fonctionne, il faut s'assurer

1. que les espaces considérés possèdent tous au moins une base,
2. que pour un espace fixé, toutes les bases ont le même nombre de vecteurs (sinon un espace aurait plusieurs dimensions...)

C'est l'objet de la partie mise en annexe - 2 pour ceux que cela intéresse. Ici, nous nous contenterons d'une définition intuitive.

Définition 6.1 *(Dimension)*

La dimension d'un espace vectoriel est égal au nombre de vecteurs qu'il faut pour constituer une base de l'espace.

Remarque : Certains espace n'admettent pas de base avec un nombre fini de vecteurs (mais c'est hors programme).

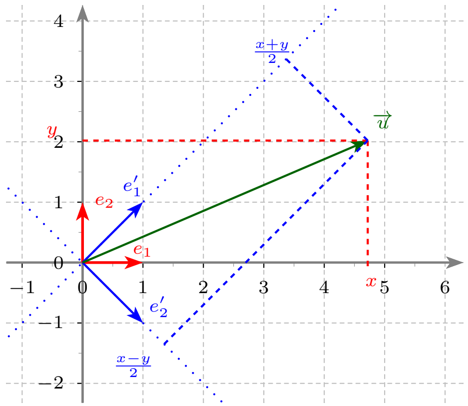
Une fois cette base fixée, la connaissance des coordonnées du vecteur dans cette base permet de décrire exactement ce vecteur par un uplet.

Exemple

Le plan $\mathbf{R}^2$ est un espace vectoriel de dimension 2. Pour connaître un vecteur, il me faut au minimum deux informations. Par exemple l'abscisse et l'ordonnée. L'espace est de dimension 2, et pour construire une base, je prends deux vecteurs (e_1, e_2), tel que e_1 serve à donner l'abscisse : $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$, l'ordonnée.

2. La différence avec le repère vu en géométrie est qu'il n'est pas ici nécessaire de préciser l'origine car on choisit toujours l'origine O que l'on sait faire partie de l'espace.

Un vecteur (x,y) du plan est alors décrit par $xe_1 + ye_2$.
On peut aussi choisir une autre base (cela revient à changer de repère). Par exemple, prendre $e_1' = (1,1)$ et $e_2 = (1,-1)$. Le vecteur (x,y) s'écrit dans cette base $(x,y) = \frac{x+y}{2}e_1' + \frac{x-y}{2}e_2'$



Méthode *(Déterminer la dimension d'un espace)*

En général, pour déterminer la dimension d'un espace, on lui trouve une base.
Il faut alors montrer qu'elle est à la fois libre et génératrice.

Il reste néanmoins encore une question : la définition 6.1 de la dimension suppose que toutes les bases d'un même espace vectoriel aient le même nombre d'éléments. En effet, si un espace pouvait avoir des bases avec des nombres différents de vecteurs, alors, il aurait plusieurs dimensions possibles.

Les théorèmes qui suivent proposent d'établir ce résultat géométriquement (visualiser sur $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$).

Propriété 6.2

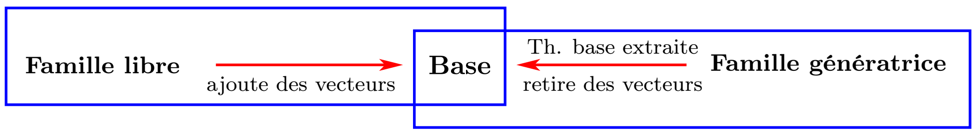
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.
Soit $\mathcal{F}$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie.

$$\operatorname{Card} \mathcal{F} \leqslant n \leqslant \operatorname{Card} \mathcal{G}.$$

Preuve

Voir l'annexe - 2. ∎

Pour se souvenir



Base = famille libre maximale = famille génératrice minimale

Explications

La base est un ensemble de vecteurs de E, à partir desquels, je peux exprimer tous les autres *de façon unique.*

- Le fait que je puisse exprimer tous les autres vecteurs à partir de ceux de la base traduit que la base est une famille génératrice.
- Le fait que cette expression soit unique, traduit que la base est une famille libre.

Intuitivement : Lorsqu'on dispose d'une famille génératrice, si elle n'est pas libre, c'est qu'il y a une redondance d'information entre ces éléments. On peut donc en supprimer certains tout en restant générateur. Lorsque je ne peux plus en supprimer, c'est que la famille est une base : elle est aussi libre.
→ théorème de la base extraite.

De même, si une famille est libre, et qu'il manque des informations pour pouvoir exprimer tous les vecteurs, alors on peut compléter cette famille pour obtenir une base.
→ théorème de la base incomplète.

Théorème 6.3 *(Théorème de la base extraite)*

De toute famille génératrice finie d'un **K**-espace vectoriel (non réduit à 0), on peut extraire une base de E.

En particulier, tout espace vectoriel non nul de dimension finie admet une base (finie).

⚠ Cette base n'est pas unique.

Preuve

Idée : on part d'une famille génératrice et on enlève un à un les vecteurs « redondants » jusqu'à obtenir une famille libre (sans changer l'espace généré).
Soit $\mathcal{G} = (u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille génératrice de E.
Si la famille est libre, alors c'est une base de E.
Si la famille est liée, alors un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison des autres : par exemple $x_p = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k u_k$.
Alors la famille $(u_1, u_2, \cdots, u_{p-1})$ est génératrice.
On réitère ce processus en enlevant 1 à 1 les éléments surabondants de la famille jusqu'à obtenir une famille libre. Par construction cette famille est à la fois libre et génératrice : c'est donc une base.
(Le processus aboutit bien à un certain rang, car le nombre d'éléments dans la famille décroît strictement et une famille à un seul élément non nul est toujours libre.) ■

Théorème 6.4 *(Théorème de la base incomplète ⋆)*

Toute famille libre peut-être complétée en une base de E.
Les vecteurs pour compléter la famille peuvent être choisis dans une famille génératrice finie quelconque.

Preuve

Soit $\mathcal{F} = (x_1, x_2, ..., x_p)$ une famille libre de E.
On suppose que l'on possède une famille génératrice finie quelconque $\mathcal{G} = (y_1, y_2, \cdots, y_q)$ (existe car E est de dimension finie).

- Si tout élément de $\mathcal{G}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}$ est génératrice.
  En effet, si $\forall i \in [\![1, q]\!], \exists (\lambda_{i,k})_{1 \leqslant k \leqslant p}$ tels que $y_i = \sum_{k=1}^{p} \lambda_{i,k} x_k$.
  Comme $\mathcal{G}$ est génératrice, $\forall x \in E, \exists (\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{q} \mu_i y_i$,
  alors $x = \sum_{i=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} \mu_i \lambda_{i,k} x_k$. $\mathcal{F}$ est génératrice, c'est donc une base.
- Sinon, il existe un élément de $\mathcal{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des x_i : par exemple y_1 (quitte à réordonner). Alors $(x_1, x_2, ..., x_p, y_1)$ est une famille libre.

On réitère le processus en ajoutant 1 à 1 les éléments de $\mathcal{G}$ jusqu'à obtenir une famille génératrice. Alors, par construction elle sera aussi libre. Ce sera donc une base.
(Le processus s'arrête nécessairement au plus tard quand tous les éléments de $\mathcal{G}$ ont été intégrés à $\mathcal{F}$). ■

Théorème 6.5 *(Caractérisation des bases)*

Si E est de dimension finie $n \geqslant 1$, et $\mathcal{F}$ une famille de n **vecteurs** de E,
alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{F}$ est une base de E,
2. $\mathcal{F}$ est génératrice de E,
3. $\mathcal{F}$ est libre.

Preuve

- Si $\mathcal{F}$ est une base, alors elle est génératrice.
- Si $\mathcal{F}$ est génératrice. Si elle était liée, alors on pourrait lui enlever un vecteur et elle resterait génératrice. C'est absurde car alors il existerait une famille génératrice à $n-1$ éléments (qui est moins que le nombre d'éléments de la base qui forme une famille libre). Donc $\mathcal{F}$ est libre.
- Si $\mathcal{F}$ est libre. Si ce n'était pas une base, alors il existerait $y \in E$ tel que $y \notin \text{Vect}(\mathcal{F})$. D'après la propriété 5.5, la famille $\mathcal{F}$ complétée par y serait libre et aurait plus d'éléments qu'une base (qui est génératrice). C'est impossible d'après la propriété 6.2. Donc la famille $\mathcal{F}$ est génératrice : c'est une base.

■

Méthode *(Montrer qu'une famille est une base)*

Lorsque l'on travaille dans un espace E dont on connaît la dimension n.
Pour montrer que $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base, il suffit de vérifier qu'elle a le bon nombre de vecteurs, et de prouver qu'elle est **soit** libre, **soit** génératrice.
En général, le plus simple est de montrer qu'elle est **libre**.

7 Sous espaces vectoriels de dimension finie

Les propriétés qui suivent ressemblent beaucoup à celles vues avec les ensembles finis. La différence est que l'on raisonne avec la dimension au lieu de compter le nombre d'éléments.
Comme la base permet de décrire parfaitement l'espace vectoriel, compter les éléments de la base revient intuitivement à compter les éléments de l'espace (au nombre d'éléments du corps près - certes infini dans ce chapitre).
⚠ Sauf pour l'espace $\{0\}$, tous les **R**-espaces vectoriels possèdent un nombre infini de vecteurs (il ne faut donc pas parler de cardinal).

Propriété 7.1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Si F est un sous espace vectoriel de E,
alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$,
de plus,
$$\dim E = \dim F \iff E = F.$$

Preuve

Si $F = \{0_E\}$ c'est terminé,
Sinon, une famille libre de F est également libre dans E, donc toutes les familles libres de F ont au plus n vecteurs. Si on note p le nombre maximum de vecteurs que peut contenir une famille libre de F, alors $p \leqslant \dim E$.
On considère une famille libre de F à p vecteurs : $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$.
Si, par l'absurde, cette famille n'est pas génératrice de F, alors il existe $y \in F$ tel que $y \notin \text{Vect}\,(e_1, \cdots, e_p)$. La famille complétée $(e_1, \cdots, e_p, y)$ est donc une famille libre de F avec $(p+1)$ vecteurs (d'après la propriété 5.5). C'est contradictoire avec la définition de p (cardinal maximal d'une famille libre).
Donc $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre et génératrice de F, donc c'est une base de F.
Ainsi F est de dimension finie, et $\dim F = p \leqslant \dim E$.
Cas d'égalité :
On pose $n = \dim E$ et on suppose que $\dim F = \dim E = n$.
F possède donc une base de la forme $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_n)$. Cette famille est libre dans F, donc également dans E et son cardinal est égal à la dimension de E.
D'après la propriété 6.5, c'est donc une base de E.
Ainsi $F = \text{Vect}\,(\mathcal{F}) = E$. Donc les espaces sont égaux. ■

Méthode *(Égalité de deux espaces vectoriels)*

Pour montrer que deux espaces vectoriels de dimension finie E et F sont égaux, il suffit de montrer que $F \subset E$ et que $\dim F \geqslant \dim E$.

L'égalité des dimensions remplace la deuxième inclusion d'un raisonnement par double inclusion.

Définition 7.2 *(Nature de sous espaces particuliers)*

Soit E un espace de dimension finie n et F un sous espace de E,

- Si $\dim F = 1$, alors F est une **droite vectorielle.**
- Si $\dim F = 2$, alors F est un **plan vectoriel.**
- Si $\dim F = n-1$, alors F est un **hyperplan vectoriel.**

Maintenant, on peut démontrer facilement les théorèmes cités plus haut qui listent les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$.

8 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 8.1 *(Rang d'une famille de vecteurs)*

Le rang d'une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est la dimension de l'espace vectoriel engendré
$$\text{Vect}\,(u_1, u_2, \cdots, u_n).$$

Méthode *(Calcul du rang par le pivot)*

Le rang d'une famille de vecteurs de $\mathbf{K}^n$ est égal au nombre de pivot de la matrice formée des vecteurs colonne correspondants.

Exemple *(exercice récapitulatif)*

Dans $\mathbf{R}^4$, on définit les vecteurs

$$v_1 = (1,2,1,0) \qquad v_2 = (-1,1,1,0) \qquad v_3 = (1,5,3,0)$$
$$v_4 = (3,3,1,0) \qquad v_5 = (0,1,0,1) \qquad v_6 = (-1,3,3,-1)$$

On note $F = \text{Vect}\,(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$.

1. Dire sans calculs si la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ est libre.
2. Extraire de cette famille, une sous famille de rang maximal que l'on noter $\mathcal{E}$. Quelle est la dimension de F ?
3. Compléter $\mathcal{E}$ en une base de $\mathbf{R}^4$. On notera cette base $\mathcal{B}$.
4. Exprimer les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^4$ dans la base $\mathcal{B}$.

Solution :

1. La famille contient 6 vecteurs dans un espace de dimension 4, elle est donc nécessairement liée (lemme de Steinitz).
2. Une sous famille libre de rang maximal sera une base de l'espace vectoriel engendré. En effet, la famille est génératrice de F, mais elle est liée. On peut donc en extraire

une base qui sera libre et génératrice (et aura autant d'éléments que la dimension de F). Ce sera une famille de rang maximal, car s'il existait une sous famille libre de rang supérieure, cela contredirait le lemme de Steinitz dans F.
Pour trouver cette sous famille, on effectue le pivot de Gauss sur les matrices colonne correspondants au vecteurs de la famille.
En effet, résoudre $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + \lambda_5 v_5 + \lambda_6 v_6 = (0,0,0,0)$, cela revient à résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où les vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_6$ ont été écrit sous forme de matrices colonne et accolés. Pour que la famille soit libre, il faut que le système n'ait qu'une seule solution : que ce soit un système de Cramer en ayant autant de pivots que d'inconnues.
On effectue donc la méthode du pivot de Gauss en opérant sur les lignes[3]

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système a trois pivots, il est de rang 3, F est un sous espace de $\mathbf{R}^4$ de dimension 3. Pour obtenir une famille libre de cardinal maximal, on peut prendre les trois vecteurs qui donnent des pivots dans la matrice échelonnée : v_1, v_2, v_5.

3. (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de F, donc de $\mathbf{R}^4$. On peut donc la compléter en une base de $\mathbf{R}^4$.
Comme $\mathbf{R}^4$ est de dimension 3, il suffit de rajouter un quatrième vecteur qui n'appartient pas à F. Cela formera alors une famille libre à 4 éléments dans un espace de dimension 4 : c'est une base.
On cherche donc un vecteur $(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$ qui n'appartienne pas à F. Pour cela on reprend la matrice précédente (on ne garde que les colonnes des v_1, v_2 et v_5) et on fait les mêmes opérations sur les lignes que précédemment en ajoutant le second membre (x,y,z,t).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & x \\ 2 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 3 & 1 & -2x+y \\ 0 & 2 & 0 & -x+z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ 0 & 3 & 1 & -2x+y \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2}z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2}z \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}x - y + \frac{3}{2}z + t \end{pmatrix}$$

Ainsi, le vecteur n'appartient pas à l'espace si et seulement si on a un pivot à la dernière colonne. On peut donc prendre le vecteur $v_7 = (0,0,0,1)$ par exemple.
Ainsi, mis, dans la matrice, cela donne 4 pivots : c'est une base de $\mathbf{R}^4$.

4. Pour exprimer un vecteur (x,y,z,t) comme combinaison linéaire des éléments de la base $\mathcal{B}$, on cherche $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbf{R}^4$ tel que $(x,y,z,t) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_5 v_5 + \lambda_7 v_7$.
On a donc un nouveau système linéaire à résoudre, que l'on obtient directement avec les mêmes calculs que précédemment :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2}z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}x - y + \frac{3}{2}z + t \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2}z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}x - y + \frac{3}{2}z + t \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour le premier vecteur de la base canonique $e_1 = (1,0,0,0)$, on prend $x = 1$, et $y = z = t = 0$. On trouve donc $e_1 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_5 + \frac{1}{2}v_7$.
On note

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(e_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Il existe une méthode duale qui consiste à travailler sur les colonnes, mais dans le cadre de notre cours, nous avons préféré concentrer toutes nos manipulations sur les lignes des matrices correspondants.

Annexes

1 Structure d'espace vectoriel

Cette section est plus formelle et peut être sautée sans nuire à la compréhension de l'ensemble.

Il n'est pas nécessaire d'apprendre la définition par cœur. Dans les situations concrètes, nous verrons une méthode beaucoup plus efficace pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.

Définition 1.1 *(Espace vectoriel)*

Un ensemble E muni des opérations $+$ et $\cdot$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. **loi interne « + » :**
   (a) $+$ est une loi *interne* : $\forall (u,v) \in E^2,\ u+v \in E$,
   (b) $+$ est *associative* : $\forall (u,v,w) \in E^3,\ (u+v)+w = u+(v+w)$,
   (c) $+$ est *commutative* : $\forall (u,v) \in E^2,\ u+v = u+v$,
   (d) $+$ admet un élément neutre noté 0_E : $\forall u \in E,\ u+0_E = u$,
   (e) tout élément de E admet un symétrique pour la loi $+$:
   $\forall u \in E,\ \exists v = (-u) \in E,$ tel que $u + (-u) = 0,$
   $(-u)$ est appelé l'**opposé** de u.
2. **loi externe « $\cdot$ » :** produit avec un scalaire
   (a) $\cdot$ est une loi de $\mathbf{K} \times E$ dans E.
   (b) $\forall u \in E,\ 1 \cdot u = u$
   (c) (distributivité par rapport à l'addition de E)
   $$\forall \lambda \in \mathbf{K},\ \forall (u,v) \in E^2, \quad \lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$$
   (d) (distributivité par rapport à l'addition de $\mathbf{K}$)
   $$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2,\ \forall u \in E, \quad (\lambda+\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$$
   (e) (associativité mixte) $\quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2,\ \forall u \in E, \quad (\lambda \times \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$

Les éléments de $(E,+,\cdot)$ sont alors appelés **vecteurs**.
Les éléments de $\mathbf{K}$ sont appelés **scalaires**.
L'élément neutre 0_E de E s'appelle le **vecteur nul**.

Remarques sur les notations :

- Dans la notation $\lambda \cdot u$, on omet souvent le point « $\cdot$ » pour écrire simplement $\lambda\, u$.
- En géométrie, il est d'usage de noter les vecteurs en gras $\boldsymbol{u}$ ou avec une flèche $\overrightarrow{u}$ comme nous l'avons fait plus haut. Ici, les vecteurs de la même manière que les scalaires ce qui demande de redoubler de vigilance et de bien réfléchir à la nature de l'objet.
  Pour faciliter la lecture, il est d'usage d'utiliser plutôt les lettres latines $(u, v, w,...)$ pour les vecteurs et les lettres grecques $(\lambda, \mu,...)$ pour les scalaires, mais il y a toujours des exceptions.

Explications

Toutes ces conditions de la définition sont naturelles avec les ensembles sur lesquels nous travaillons, mais la rigueur mathématique exige d'en faire la liste exhaustive pour définir proprement ce qu'est un espace vectoriel et éviter toute ambigüité future.

1. **loi interne :**
   (a) La caractère interne est essentiel pour « *ne pas sortir de l'ensemble* » avec une opération.
   (b) L'associativité permet de s'affranchir des parenthèses : il n'y a pas d'ordre de priorité au sein de l'addition. Ainsi, je peux commencer par ajouter u et v puis ensuite w à droite ou au contraire, commencer à ajouter v et w puis ensuite u à gauche.
   (c) La commutativité ne doit pas être confondue avec l'associativité. L'associativité permet de ne pas utiliser les parenthèses, mais l'ordre d'*écriture* importe, c'est la raison pour laquelle nous précisions au point précédent si on ajoutait à droite ou à gauche. Avec la commutativité nous pouvons mélanger les termes : additionner à droite ou à gauche revient au même.
   (d) L'intérêt de l'élément neutre n'est pas immédiat. Pourquoi inventer un élément dont le rôle est justement de *ne rien faire* ? Ce n'est pas pour rien s'il a fallu attendre le $\text{XII}^{\text{ème}}$ siècle pour que le 0 soit pleinement accepté en Occident.
   En fait, le zéro devient important lorsqu'il ne s'agit plus seulement d'ajouter mais aussi de soustraire. C'est l'objet du point suivant.
   (e) Chaque élément admet un symétrique. Lorsque l'on ajoute à un élément son symétrique on retombe sur l'élément neutre. On parle d'opposé. L'existence d'un symétrique veut dire que l'on peut soustraire. Soustraire, c'est ajouter l'opposé[4].
   C'est pour pouvoir définir cet opposé que nous avions besoin de l'élément neutre 0.
2. **loi externe :**
   (a) On définit une loi de $\mathbf{K} \times E$ dans E, car à partir d'un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ et d'un vecteur $u \in E$, on obtient un nouveau vecteur $\lambda \cdot u \in E$.
   $$\begin{cases} \mathbf{K} \times E & \to E \\ (\lambda, u) & \mapsto \lambda \cdot u \end{cases}$$
   (b) Si on multiplie le vecteur par 1, il ne faut pas qu'il soit modifié.
   (c) Si dans une caisse, on place un panier u et un panier v et qu'on prend λ caisses, alors, on obtient au total λu et λv : multiplier les objets séparément ou ensemble revient au même.
   (d) Prendre 5 fois u, revient au même que de prendre 3 fois u, puis encore 2 fois u.
   (e) Prendre 15 fois u est la même chose que prendre 5 fois u et de multiplier le tout par 3.

Remarque : on peut montrer que l'élément neutre et l'opposé sont définis de manière unique.

4. En fait, la soustraction en tant que telle n'a pas besoin d'être définie, c'est simplement l'ajout de l'opposé.

Propriété 1.2

Un espace vectoriel est toujours **non vide** : il contient le vecteur nul.

Théorème 1.3 *(Règles de calcul)*

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel. Si $\lambda \in \mathbf{K}$, et $u \in E$ alors

1. $\lambda \cdot u = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $u = 0_E$.
2. L'opposé de u est unique. On le note $-u$.
3. L'opposé de u est égal à $(-1) \cdot u$.

Preuve

1. (sens réciproque)
   - Si $\lambda = 0$, $0 \cdot u = (0+0) \cdot u = 0 \cdot u + 0 \cdot u$,
   On ajoute de part et d'autre de l'égalité l'opposé de $0 \cdot u$ et on obtient : $0_E = 0 \cdot u$.
   - Si $u = 0_E$, $\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$.
   Si on ajoute de part et d'autre de l'égalité l'opposé de $\lambda \cdot 0_E$, on trouve $0_E = \lambda \cdot 0_E$.

   (sens direct)
   Si $\lambda \cdot u = 0_E$ et $\lambda \neq 0$, alors on peut multiplier par $\frac{1}{\lambda}$.
   À gauche, on trouve $\left(\frac{1}{\lambda} \times \lambda\right) \cdot u = 1 \cdot u = u$.
   Et à droite, $\frac{1}{\lambda} \cdot 0_E = 0_E$ d'après la réciproque montrée plus haut. Donc $u = 0_E$.
   Ainsi $\lambda \cdot u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$ ou $u = 0_E$.
2. Si v et w sont deux opposés de u, alors $v = 0_E + v = (w+u) + v$
   $$= w + (u+v) \quad \text{par associativité}$$
   $$= w + 0_E = w.$$
3. $u + (-1) \cdot u = 1 \cdot u + (-1) \cdot u = (1 + (-1)) \cdot u = 0 \cdot u = 0_E$.
   Donc $(-1) \cdot u$ est l'opposé de u. ■

Remarque : Il ne faut par confondre 0_E l'élément nul de l'espace vectoriel avec le nombre 0. 0_E et 0 sont des objets de nature différente :

- 0_E désigne un vecteur (un couple, une application, un n-uplet... on pourrait mettre une flèche au dessus).
- 0 est un nombre réel.

Nous retrouvons à présent la propriété énoncée plus haut, mais nous sommes désormais en mesure de la démontrer en utilisant les définitions formelles.

Propriété 1.4 *(Propriété essentielle)*

Un espace vectoriel est *stable* par combinaison linéaire.

C'est **la** propriété essentielle des espaces vectoriels : celle qui nous intéressait dans notre exemple initial. Les espaces vectoriels sont conçus pour pouvoir réaliser des combinaisons linéaires (additions et produit externe). Dans le théorème 3.1, nous verrons que cette notion suffit *presque* pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.

Preuve

Idée : faire une récurrence sur le nombre n d'éléments de la somme et couper celle-ci en deux pour l'hérédité.

Initialisation : pour $n = 0$, si la somme est vide, alors elle est nulle.
Or E contient le vecteur nul. L'initialisation est donc vraie.
Hérédité : on suppose le résultat vrai pour toute combinaison linéaire à n éléments et on le montre pour $n+1$ éléments.
Soient $(u_1, u_2, \cdots, u_{n+1}) \in E^{n+1}$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{K}^{n+1}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k u_k = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\right) + \lambda_{n+1}u_{n+1} \qquad \text{(associativité)}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \in E$.
De plus, $\lambda_{n+1} \in \mathbf{K}$ et $u_{n+1} \in E$,
donc par propriété sur le produit externe $\lambda_{n+1}u_{n+1} \in E$.
Et la somme de deux éléments de E est un élément de E, donc $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k u_k \in E$.
D'après le principe de récurrence, le résultat est vrai pour toute combinaison linéaire. ■

2 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 2.1

Un espace vectoriel est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie.

Remarque : Certains espaces ne sont pas de dimension finie.
Par exemple l'ensemble des suites réelles est de dimension infinie car il n'admet aucune famille génératrice de dimension finie : il faut un nombre infini d'informations pour décrire une suite quelconque (il faut tout ses termes).
Si un espace admet une famille génératrice finie, alors on peut décrire chaque vecteur comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille. Et donc avec un nombre fini d'informations.
Le problème est, qu'en général, l'écriture du vecteur n'est pas unique. Pour éviter cet écueil, on veut donc que la famille soit aussi libre : une base.

Justifions donc que l'on peut en trouver une.

Théorème 2.2 *(Théorème de la base extraite)*

De toute famille génératrice finie d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel (non réduit à 0), on peut extraire une base de E.
Donc tout espace vectoriel non nul de dimension finie admet une base (finie).

⚠ Cette base n'est pas unique.

Preuve

Idée : on part d'une famille génératrice et on enlève un à un les vecteurs « redondants » jusqu'à obtenir une famille libre (sans changer l'espace généré).

Soit $\mathcal{G} = (u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille génératrice de E.
Si la famille est libre, alors c'est une base de E.
Si la famille est liée, alors un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison des autres : par exemple $x_p = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k u_k$.
Alors la famille $(u_1, u_2, \cdots, u_{p-1})$ est génératrice.
On réitère ce processus en enlevant 1 à 1 les éléments surabondants de la famille jusqu'à obtenir une famille libre. Par construction cette famille est à la fois libre et génératrice : c'est donc une base.
(Le processus aboutit bien à un certain rang, car le nombre d'éléments dans la famille décroît strictement et une famille à un seul élément non nul est toujours libre.) ■

Maintenant que l'on sait que tout espace de dimension finie admet une base, il reste à démontrer que toutes ses bases ont le même nombre d'éléments pour pouvoir définir la dimension.

Théorème 2.3 *(Lemme de Steinitz)*

Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Autre formulation : Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice finie de E et $\mathcal{F}$ une famille libre de E, alors

$$\operatorname{Card}\mathcal{F} \leqslant \operatorname{Card}\mathcal{G}.$$

Explications

Ce théorème est assez intuitif. Il énonce simplement que si on peut exprimer $(n+1)$ vecteurs à partir de n vecteurs différents, alors les $n+1$ vecteurs ne peuvent pas être linéairement indépendants.

Preuve *(⋆⋆)*

Par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le résultat est trivial (deux vecteurs d'une même droite vectorielle sont colinéaires).
En effet, si x engendre E, et $(y_1, y_2) \in E^2$. Alors $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$, tels que $\lambda_1 x = y_1$ et $\lambda_2 x = y_2$.
Si $y_1 = y_2 = 0$, c'est évident, sinon, par exemple $y_1 \neq 0$ donc $\lambda_1 \neq 0$, donc $y_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2} y_1$.

On suppose le résultat vrai au rang n, et on cherche à le montrer au rang $n+1$.
Soit $\mathcal{F} = (x_1, x_2, ..., x_{n+2})$ une famille à $n+2$ éléments et $\mathcal{G}(y_1, y_2, ..., y_{n+1})$ une famille génératrice à $n+1$ éléments.
On suppose par l'absurde que $\mathcal{F}$ est une famille libre. Par conséquent aucun de ses éléments n'est nul.
En particulier $x_{n+2} \neq 0$.
Tout élément de $\mathcal{F}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{G}$. C'est-à-dire

$$\forall i \in [\![1, n+1]\!], \exists(\lambda_{i,1}, \lambda_{i,1}, ..., \lambda_{i,n}) \text{ tel que } x_i = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{i,k} y_k$$

Comme x_{n+2} est non nul, il existe un des coefficients $\lambda_{n+2,k}$ qui est non nul. Par exemple $\lambda_{n+2,n+1}$ (quitte à réordonner les éléments).
Pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, on pose

$$f_i = x_i - \frac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}} x_{n+2}$$

Alors

$$\begin{aligned}\forall i \in [\![1, n+1]\!],\ f_i &= \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{i,k} y_k - \frac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}} x_{n+2} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{i,k} y_k - \frac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{n+2,k} y_k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\lambda_{i,k} - \frac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}} \lambda_{n+2,k}\right) y_k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{i,k} y_k\end{aligned}$$

Et le coefficient de y_{n+1} dans la combinaison est nul : $\alpha_{i,n+1} = \lambda_{i,n+1} - \frac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}} \lambda_{n+2,n+1} = 0$.
Donc $(f_1, f_2, \cdots, f_{n+1})$ forme une famille à $n+1$ éléments du sous espace vectoriel $E' = \mathrm{Vect}\,(y_1, y_2, \cdots, y_n)$.
Or $(f_1, f_2, \cdots, f_{n+1})$ est libre.

En effet, si $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \mu_i f_i = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \left(x_i - \frac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}} x_{n+2}\right) = 0$
ie $\left(\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i x_i\right) - \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}} x_{n+2} = 0$

Comme la famille des x_i est libre, alors $\forall i \in [\![1; n+1]\!]$, $\mu_i = 0$. Donc la famille des f_i est aussi libre.

Par hypothèse de récurrence, toute famille à $n+1$ vecteurs dans un espace engendré par n vecteurs est liée : $(f_1, f_2, ..., f_{n+1})$ est liée.
C'est absurde, donc $(x_1, x_2, \cdots, x_{n+2})$ est liée.

Par principe de récurrence, le résultat est donc démontré pour tout $n \in \mathbf{N}$ ■

Théorème 2.4 *(Dimension)*

Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre d'éléments.
Ce nombre est appelé **la dimension** de l'espace.
Par convention, l'espace vectoriel nul : $\{0_E\}$ est de dimension 0 (on ne parle pas de base pour cet espace).

Preuve

Si E admet une base à n éléments. Cette base est une famille génératrice, donc toute famille libre de E admettra au plus n éléments.
Donc toutes les autres bases admettent au plus n éléments.
Si on suppose qu'il existe une autre base admettant strictement moins que n éléments, alors en échangeant les rôles, on voit que la première base qui contient n éléments ne peut pas être libre. C'est absurde. ■