Fonctions de deux variables

Jusqu'à présent, nous n'avons traité que les fonctions à une seule variable – exception faite des cas linéaires ou multilinéaires – mais cela reste souvent insuffisant.

Ce chapitre est une courte introduction aux fonctions de plusieurs variables (on commence avec deux variables réelles). Il ne faut pas s'attendre à une étude sérieuse et approfondie des fonctions de plusieurs variables, mais plutôt à une sensibilisation en vue de développements plus poussés en deuxième année.

On y trouvera en particulier deux idées assez simples pour revenir aux situations connues :

- se ramener à une fonction d'une seule variable, en considérant les autres comme des paramètres ; c'est l'approche avec les *fonctions partielles,*
- se ramener au cas linéaire en réalisant un développement limité au premier ordre : on identifie la fonction à son plan tangent (sous réserve d'avoir une régularité suffisante).

1 Représentation des fonctions de deux variables

A Définition

Exemple

1. On peut écrire la fonction « aire du rectangle » comme une fonction qui dépend du grand et du petit côté :
$$A : (x, y) \mapsto xy.$$
2. La norme euclidienne dans le plan est une fonction de deux variables :
$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

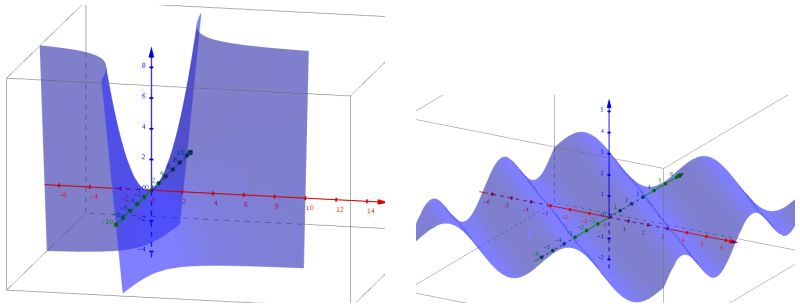
Définition 1.1 *(Fonction réelle de deux variables réelles)*

Une fonction réelle de deux variables réelles est une application définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbf{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Autre définition équivalente :
Pour $\mathscr{D} \subset \mathbf{R}^2$, on dit que f est une fonction de 2 variables réelles, si à tout couple $(x, y) \in \mathscr{D}$, elle associe un unique réel $z = f(x, y)$.
z est appelé l'image de (x, y) par f.

B Représentation graphique

Les fonctions à une variable sont représentées par une courbe dans le plan : l'axe des abscisses pour la variable x et l'axe des ordonnées pour l'image $f(x)$.
Dans le cas d'une fonction réelle à deux variables, il faudra 2 axes pour les variables et un axe pour les images. La fonction est donc représentée par une surface dans un espace de dimension 3.



Fonction $A(x, y) = xy$. Fonction $f(x, y) = \sin(x + y)$.

Surfaces de fonctions de deux variables.

De même qu'une fonction d'une variable peut-être interprétée comme la déformation de l'axe des abscisses en la courbe représentative, ainsi, une fonction de deux variables peut être vue comme la déformation du plan (O, x, y) en la surface représentative.

C Applications partielles

Ici, tombent tous vos espoirs de faire des choses compliquées... on se dit qu'une fonction de deux variables c'est finalement trop pénible et on essaie de se ramener à une seule variable en transformant l'autre en un paramètre : c'est ce que l'on appelle une **application partielle**.

Définition 1.2 *(Applications partielles)*

Soit f une fonction réelle de deux variables définie sur $\mathscr{D} \subset \mathbf{R}^2$ par

$$f \ : \ (x, y) \mapsto f(x, y).$$

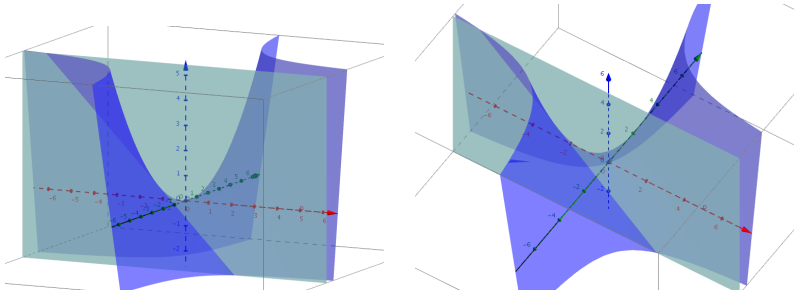
Les **applications partielles** de f en (x_0, y_0) sont définies par

$$f\left(\cdot\,,\, y_0\right) \ : \ x \mapsto f(x, y_0) \qquad \text{et} \qquad f\left(x_0\,,\,\cdot\right) \ : \ y \mapsto f(x_0, y).$$

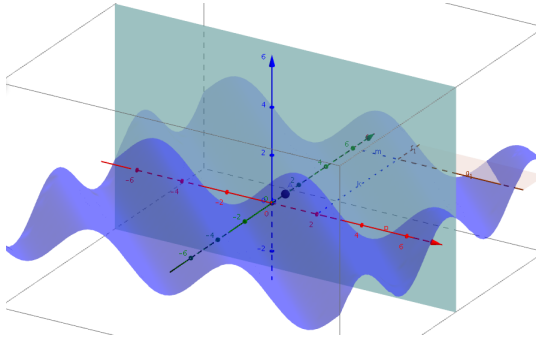
Remarque : Le domaine de définition de chacune des fonctions partielles dépend bien évidemment de $\mathscr{D}$ mais aussi du point choisi en paramètre.

Exemple

La courbe de l'application partielle $f(\cdot, y_0)$ est donnée par l'intersection de la surface de la fonction avec le plan $y = y_0$.
Par exemple, avec la fonction d'aire du rectangle $A : (x, y) \mapsto xy$.
Si on fixe $y = y_0$ et qu'on garde x comme variable, cela revient à étudier la fonction $A_{y_0} : x \mapsto xy_0$: c'est simplement une fonction linéaire.
Sur la figure ci-dessous, l'intersection de la surface avec le plan $y = y_0$ fait bien apparaître une droite.



Fonction $A(x, y) = xy$ intersectée avec le plan $y = 2$.



Fonction $f(x, y) = \sin(x + y)$ intersectée avec le plan $y = 2$.

Étudier une application partielle revient donc à suivre la surface à partir de (x_0, y_0) en suivant un chemin parallèle à l'axe des abscisses ou à l'axe des ordonnées.

⚠ Les applications partielles ne donnent que des informations *partielles* et elles ne disent rien de ce qui se passe en dehors des deux axes ce qui peut être trompeur.

Exemple

Si on considère la fonction « aire du rectangle » : $A \ : \ (x, y) \mapsto xy$ et qu'on souhaite son comportement à proximité de l'origine $(0, 0)$.
Les deux applications partielle en ce point sont très simples :

$$A_{y=0} \ : x \mapsto A(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad A_{x=0} \ : y \mapsto A(0, y) = 0.$$

Ces deux applications sont identiquement nulles sur $\mathbf{R}$, pourtant, si on s'éloigne du point $(0, 0)$ sans suivre une de ces applications partielles, alors l'application est non nulle même en des points infiniment proches de $(0, 0)$:

$$A(x, x) = x^2 \neq 0 \text{ dès que } x \neq 0.$$

2 Continuité

A Ouverts de $\mathbf{R}^2$.

Pour évoquer la notion de continuité, il convient déjà d'étendre la notion d'intervalle ouvert à $\mathbf{R}^2$.
En effet, si on revient au modèle des fonctions d'une seule variable, et qu'on considère la continuité en un point $a \in \mathbf{R}$, alors on a besoin de calculer une limite pour $x \to a$. Cela suppose que la fonction soit définie sur un voisinage de a : l'intérêt d'un ouvert est de ne pas avoir de « bord ». En tout point de l'ouvert, on doit disposer d'un peu de place (une boule ouverte) pour se mouvoir autour.

Ces notions d'ouverts et de fermés seront généralisées par la topologie de deuxième année.

Définition 2.1 *(Boule ouverte/fermée)*

Soient $r > 0$ et $A = (x_A, y_A) \in \mathbf{R}^2$.
On appelle **boule ouverte** de centre A et de rayon r l'ensemble

$$B(A, r) = \left\{M \in \mathbf{R}^2, \|AM\| < r\right\}.$$

On appelle **boule fermée** de centre A et de rayon r l'ensemble

$$\overline{B}(A, r) = \left\{M \in \mathbf{R}^2, \|AM\| \leqslant r\right\}.$$

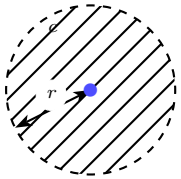
Remarque : Pour le cours de première année, on se restreint à la norme euclidienne canonique :

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Cependant, les notions vues ici, sont applicables aux autres normes comme cela sera étudié en deuxième année.

Ici, l'important est le signe d'inégalité *stricte* pour un ouvert et *large* pour un fermé.

Remarque : On constate que ce sont exactement les mêmes définitions que celles des intervalles ouverts ou fermés (segments) en remplaçant la valeur absolue par la norme.



Définition 2.2 *(Ouvert)*

Soit $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbf{R}^2$.
$\mathscr{D}$ est un **ouvert** de $\mathbf{R}^2$

- si, et seulement si $\mathscr{D}$ s'écrit comme union de boules ouvertes.
- si, et seulement si pour tout $(x, y) \in \mathscr{D}$,
  il existe une boule ouverte de centre (x, y) incluse dans $\mathscr{D}$.

Remarque : L'ensemble vide est ouvert (on peut le voir comme une union vide).

Comme sur $\mathbf{R}$, on voit que l'intérêt d'un ouvert est de pouvoir « se ménager de la place » autour de chacun de ses points.
C'est ce que dit la deuxième caractérisation. Bien entendu, cette notion sera essentielle pour définir la continuité comme elle l'avait été avec les fonctions d'une seule variable (revoir le cours correspondant).

Preuve

Montrons que les deux définitions sont équivalentes.
($\Rightarrow$) Si $\mathscr{D}$ s'écrit comme union de boules ouvertes, alors tout $A = (a, b) \in \mathscr{D}$ est à l'intérieur d'une boule ouverte.
On note $\Omega = (x_0, y_0)$ son centre, et $r > 0$ son rayon. On a donc $\|\Omega A\|_2 = \alpha < r$.
Si on considère la boule de centre A et de rayon $r' = r - \alpha > 0$, alors pour $M = (x, y)$ dans cette boule, on obtient par inégalité triangulaire

$$\|\Omega M\| \leqslant \|\Omega A\| + \|AM\| < \alpha + r' = r.$$

Donc $M \in \mathscr{D}$ ce qui prouve bien que $B(A, r') \subset \mathscr{D}$.
($\Leftarrow$) Pour chaque $(a, b) \in \mathscr{D}$, on note $B_{a,b}$ une boule ouverte de centre (a, b) incluse dans $\mathscr{D}$. Il est alors évident que $\mathscr{D} = \bigcup_{(a,b)\in\mathscr{D}} B_{a,b}$. ■

Propriété 2.3

Une boule ouverte est ouverte.

Preuve

C'est l'union d'une seule boule ouverte (une union avec un seul ensemble). ■

Exemple

Montrer que $\mathbf{R}^2$ est un ouvert.
Solution :
$\mathbf{R}^2 = \bigcup_{(x,y)\in\mathbf{R}^2} B((x, y), 1)$.

Exemple

Montrer que si I et J sont deux intervalles non vides de $\mathbf{R}$, $I \times J$ est un ouvert si, et seulement si I et J sont eux même ouverts.
Dans ce cas, on dit que $I \times J$ est un *pavé ouvert.*
Solution :
On conseille de faire des dessins...
($\Leftarrow$) Si I et J sont deux intervalles ouverts, alors pour tout $(a, b) \in I \times J$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_+^*$ tels que $]a - \alpha, a + \alpha[\subset I$ et $]b - \beta, b + \beta[\subset J$.
En notant $r = \min(\alpha, \beta) > 0$, on a donc pour $(x, y) \in B((a, b), r)$,

$$|x - a| \leqslant \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} < r \leqslant \alpha,$$

et de même $|y - b| < \beta$, ce qui donne $x \in I$ et $y \in J$.
Donc $B((a, b), r) \subset I \times J$ ce qui prouve que $I \times J$ est ouvert de $\mathbf{R}^2$.
($\Rightarrow$) Si $I \times J$ est un ouvert, alors pour $a \in I$, on pose b quelconque dans J de sorte que $(a, b) \in I \times J$.
$I \times J$ étant ouvert, il existe une boule ouverte de centre (a, b) et de rayon $r > 0$ incluse dans $I \times J$.
Pour $x \in]a - r, a + r[$, $\|(x - a, b - b)\| = |x - a| < r$, donc $(x, b) \in B((a, b), r) \subset I \times J$, donc $x \in I$. Ce que prouve que x ne peut être une borne de I qui est donc ouvert.
On fait de même pour J.

Exemple

Montrer que $\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, xy > 0\right\}$ est un ouvert.
Solution :
$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, xy > 0\right\} = (\mathbf{R}_+^*)^2 \cup (\mathbf{R}_-^*)^2$.
Or $(\mathbf{R}_+^*)^2$ et $(\mathbf{R}_-^*)^2$ sont des ouverts car ils sont produits cartésiens de deux intervalles ouverts (exemple précédent), et l'union de deux ouverts est un ouvert (il suffit d'écrire chacun comme union de boules ouvertes, et l'union d'une union est encore une union).
Autre méthode plus terre-à-terre :

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $xy > 0$.
On pose $r = \min(|x|, |y|) > 0$ alors pour tout $(a, b) \in B((x, y), r)$,

$$|a - x| \leqslant \|(a, b) - (x, y)\| < r \leqslant |x|$$

donc a du même signe (strict) que x et de même pour b avec y, donc $ab > 0$ donc la boule ouverte $B((x, y), r)$ est incluse dans l'ensemble qui est donc un ouvert.

Exemple

Soit $\mathscr{D}$ un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et f une fonction définie sur $\mathscr{D}$.
Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathscr{D}$, il existe, pour chacune des deux applications partielles, un intervalle ouvert sur lequel elle est définie.
Bien sûr, $\mathscr{D}$ n'est pas nécessairement un pavé.

B Fonction continue

Précédemment, on avait interprété une fonction réelle d'une variable comme la déformation de l'axe des abscisses en la courbe de la fonction. La fonction est continue lorsque cette déformation se fait sans déchirure. La fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ lorsqu'elle n'est pas pliée.
De même pour les fonctions de deux variables : une fonction est continue lorsque la surface n'est pas déchirée. Le caractère $\mathscr{C}^1$ correspond à l'absence de pliures.
Comme pour la notion d'ouvert, la définition formelle de la continuité en un point (x_0, y_0) est similaire à celle des fonctions d'une seule variable en remplaçant la valeur absolue par la norme euclidienne.

Définition 2.4 *(Fonction continue en un point)*

Soient $\mathscr{D}$ un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $f : \mathscr{D} \mapsto \mathbf{R}$.
Pour $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}$, on dit que f est continue en (x_0, y_0) si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in \mathscr{D}, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \eta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Pour les fonctions d'une seule variable, on avait travaillé avec des inégalités larges pour faciliter les manipulations. Cependant, on peut reformuler la continuité $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ avec des inégalités strictes ce qui donne une définition parfaitement équivalentes à celle-ci.

Exemple

Montrer que $A : (x, y) \mapsto xy$ est continue sur $\mathbf{R}^2$.

Exemple

Montrer que $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|$ est continue sur $\mathbf{R}^2$.

Exemple

Montrer que si g est continue au point (x_0, y_0) et $g(x_0, y_0) > 0$ alors g est strictement positive sur une boule ouverte contenant (x_0, y_0).

⚠ Ce n'est pas parce que les applications partielles sont continues que l'application est continue.

Exemple

Soit $f : (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ si $y \neq 0$ et $f(x, 0) = 0$ sinon.
Étudier la continuité des applications partielles de f en $(0, 0)$, puis la continuité de f en $(0, 0)$.
Solution :
$x \mapsto f(x, 0) = 0$ qui est donc continue en 0.
$y \mapsto f(0, y) = 0$ est aussi continue en 0.
Cependant, $\forall x > 0$, $f(x, x) = 1$, mais $f(0, 0) = 0$ donc f n'est pas continue en 0.
En effet, si on pose $\varepsilon = 1 > 0$, alors pour tout $\eta > 0$, on pose $(x, y) = \frac{\eta}{2\|(1, 1)\|}(1, 1)$, on obtient donc bien que $\|(x, y)\| = \frac{\eta}{2} < \eta$ et $f(x, y) = 1 \geqslant \varepsilon$.

Exemple

Soit $\varphi : (x, y) \mapsto \lfloor xy \rfloor$.
Étudier la continuité des applications partielles de φ en $(0, 0)$, puis la continuité de φ en $(0, 0)$.

Remarque : Travailler sur un ouvert permet de s'assurer qu'aucun des points considérés ne se trouve sur un bord.
Dans $\mathbf{R}$, nous avions contourné ce problème par les notions de continuité à gauche ou à droite, mais en deux dimensions, ce n'est pas facilement transposable, car il existe d'autres chemins pour s'approcher du point :
Il est possible de suivre une droite oblique (et non plus nécessairement parallèle à l'un des axes), voire même un chemin continu non droit. Cela revient alors à considérer un arc paramétré $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ à valeurs dans $\mathscr{D}$ et à considérer l'application $f \circ \gamma$.

Dans le cas des applications partielles, la fonction γ prend une forme très simple $\gamma : t \mapsto (t, y_0)$ ou $t \mapsto (x_0, t)$.

Propriété 2.5 *(Reformulation de la continuité)*

Soient $\mathscr{D}$ un ouvert de $\mathbf{R}^2$, $f : \mathscr{D} \mapsto \mathbf{R}$ et $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}$.
f est continue en (x_0, y_0)

- si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \eta), |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

- si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, f(B((x_0, y_0), \eta) \subset B(f(x_0, y_0), \varepsilon).$$

Preuve

Évidente. ■

Propriété 2.6

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$.
Si f et g sont continues en (x_0, y_0), et $\lambda \in \mathbf{R}$ alors

- $f + \lambda g$ est continue en (x_0, y_0),
- $f \times g$ est continue en (x_0, y_0),
- et si de plus g ne s'annule pas en (x_0, y_0) alors $\frac{f}{g}$ est continue en (x_0, y_0).

Preuve

Ce sont les mêmes preuves que pour les fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

- *On traite le cas $\lambda \neq 0$, sinon c'est trivial.*
  Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\eta_1 > 0$ tel que
  $$\forall (x, y) \in B\left((x_0, y_0), \eta_1\right), |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
  De même, il existe $\eta_2 > 0$ tel que
  $$\forall (x, y) \in B\left((x_0, y_0), \eta_2\right), |g(x, y) - f(x_0, y_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}.$$
  Ainsi pour $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$, $\forall (x, y) \in B\left((x_0, y_0), \eta\right)$
  $$\begin{aligned} |(f + \lambda g)(x, y) - (f + \lambda g)(x_0, y_0)| &\leqslant |f(x, y) - f(x_0, y_0)| + |\lambda| \, |g(x, y) - g(x_0, y_0)| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + |\lambda| \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} = \varepsilon. \end{aligned}$$
- On prend pour $\sqrt{\varepsilon}$ pour chaque fonction et on choisit le plus petit des deux η trouvés.
- On pose $A = |g(x_0, y_0)| > 0$, et par continuité de g en (x_0, y_0), il existe $\eta_1 > 0$ tel que
  $$\forall (x, y) \in B\left((x_0, y_0), \eta_1\right), |g(x, y)| > \frac{A}{2}.$$
  Ceci justifie en particulier que g ne s'annule pas sur cette boule.
  Alors pour (x, y) dans cette boule, on a
  $$\begin{aligned} \left|\frac{f(x, y)}{g(x, y)} - \frac{f(x_0, y_0)}{g(x_0, y_0)}\right| &= \frac{|f(x, y)g(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)g(x, y)|}{|g(x, y)g(x_0, y_0)|} \\ &\leqslant \frac{2}{A} |f(x, y)g(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)g(x, y)|. \end{aligned}$$
  Or, on vient de voir que la combinaison linéaire de fonctions continues était continue, donc $(x, y) \mapsto f(x, y)g(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)g(x, y)$ est continue en (x_0, y_0) et vaut 0 en ce point.
  Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta \in]0, \eta_1]$ tel que $\forall (x, y) \in B\left((x_0, y_0), \eta\right)$, la valeur absolue soit inférieure à $\varepsilon \frac{A}{2}$.
  On obtient donc la continuité cherchée.

■

Définition 2.7 *(Fonction continue sur un ouvert)*

Soient $\mathscr{D}$ un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $f : \mathscr{D} \mapsto \mathbf{R}$.
f est dite continue sur $\mathscr{D}$ si, et seulement si elle est continue en chaque point de $\mathscr{D}$.

Remarque : « L'étude de la continuité d'une fonction n'est pas un objectif du programme de première année. »

Exemple

Soient $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $f : (x, y) \mapsto g(x)$.
Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}^2$ si, et seulement si g l'est.

Définition 2.8 *(limite)*

Soit $\mathscr{D}$ un ouvert, $(a, b) \in \mathscr{D}$ et f une fonction définie $\mathscr{D} \setminus \{(a, b)\}$.
On dit que f admet une limite ℓ en (a, b) si et seulement si, la fonction prolongée par ℓ en (a, b) est continue en (a, b).
C'est-à-dire si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in \mathscr{D} \setminus \{(a, b)\}, \|(x, y) - (a, b)\| < \eta \Rightarrow |f(x, y) - \ell| < \varepsilon.$$

On aurait pu aussi définir la limite en un point puis en déduire la notion de continuité comme on l'avait fait sur $\mathbf{R}$.

3 Calcul différentiel à l'ordre 1

A Notions sur les dérivées partielles

Calculer une dérivée partielle, c'est fixer la valeur d'une variable et ne faire bouger que l'autre : on se ramène à dériver une fonction d'une variable avec un paramètre fixé.

⚠ Par contre, le résultat est bien une fonction de **deux** variables.

Définition 3.1 *(Dérivée partielle)*

Soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction définie sur un ouvert $\mathscr{D}$ de $\mathbf{R}^2$.

Pour $(x,y) \in \mathscr{D}$, on définit les **dérivées partielles** de f (lorsqu'elles existent) par :

- La dérivée partielle de f par rapport à x en (x,y) est la dérivée de l'application partielle $f_y = f(\cdot, y)$.

  Elle se note
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f'_y(x,y).$$
- La dérivée partielle de f par rapport à y en (x,y) est la dérivée de l'application partielle $f_x = f(x, \cdot)$.

  Elle se note
  $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f'_x(x,y).$$

Exemple

On reprend l'application $A : (x,\, y) \mapsto xy$.
Pour tout $y \in \mathbf{R}$, la dérivée de l'application partielle $A_y = A(\cdot, y)$ par rapport à x se note alors
$$\frac{\partial A}{\partial x}(x,y) = A'_y(x) = y.$$
Cela veut dire qu'à y fixé, la fonction a une pente constante mais que cette pente dépend de y : plus on éloigne le plan de de l'origine, plus la pente est importante.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par $\forall\,(r,\theta) \in \mathbf{R}^2,\ f(r,\theta) = r\cos\theta$.
Étudier la dérivabilité des fonctions partielles et calculer les dérivées partielles si elles existent.
Solution :
Les deux fonctions partielles sont dérivables sur $\mathbf{R}$, et $\forall\,(r,\theta) \in \mathbf{R}^2$,
$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin(\theta).$$

Exemple

Dérivée partielle de la norme euclidienne par rapport à une variable.
Solution :
On note $f : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$.
La fonction est définie sur $\mathbf{R}^2$. Pour $y \neq 0$, la fonction partielle suivant x est dérivable sur $\mathbf{R}$ et sa dérivée vaut :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
Par contre, pour $y = 0$, la fonction n'est dérivable que sur $\mathbf{R}^*$ et la formule précédente reste valable. De même par symétrie pour y.

⚠ L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité.

Exemple

Soit $f : (x,\, y) \mapsto \frac{x}{y}$ si $y \neq 0$ et $f(x,\, 0) = 0$ sinon.
Calculer les dérivées partielles de f lorsqu'elles existent.
Montrer en particulier que f admet des dérivées partielles en $(0,\, 0)$.
Mais on a vu que f n'est pas continue en $(0,\, 0)$.
Solution :
• Dérivées partielles en $(x_0,\, y_0) \in \mathbf{R}^2$, tel que $y_0 \neq 0$, , :
Pour $y_0 \neq 0$ et $x_0 \in \mathbf{R}$, il existe un voisinage (ouvert) de $(x_0,\, y_0)$ qui ne rencontre pas la droite $y = 0$.
Sur ce voisinage, on a donc $f(x,\, y) = \frac{x}{y}$ qui est dérivable à la fois par rapport à x et par rapport à y.
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\, y_0) = \frac{1}{y_0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\, y_0) = -\frac{x_0}{y_0^2}.$$
• Pour $(x_0,\, y_0) = (0,\, 0)$:
$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x,\, y_0) = 0, \ \text{ donc } \ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\, y_0) = 0.$$
$$\forall y \in \mathbf{R},\ f(x_0,\, y) = 0, \ \text{ donc } \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\, y_0) = 0.$$
• Pour $y_0 = 0$ et $x_0 \neq 0$:
$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x,\, y_0) = 0, \ \text{ donc } \ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\, y_0) = 0.$$
$$\forall y \in \mathbf{R},\ f(x_0,\, y) = \frac{x_0}{y}, \ \text{ donc } \ \frac{f(x_0,\, y) - f(x_0,\, y_0)}{y - y_0} = \frac{\frac{x_0}{y} - 0}{y} = \frac{x_0}{y^2} \xrightarrow[y \to 0]{} \pm\infty.$$
Donc la fonction n'admet pas de dérivée partielle au point $(x_0,\, 0)$ pour $x_0 \neq 0$.

Remarque : On peut même trouver des fonctions qui admettent des dérivées partielles en *tout* point, et qui pourtant ne sont pas continues :

Exemple

Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par
$$f(x,\, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,\, y) \neq (0,\, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Montrer que f admet des dérivées partielles selon x et selon y en tout point, sans être continue en $(0,\, 0)$.

B Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 3.2 *(Fonction de classe $\mathscr{C}^1$)*

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{D}$
si f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathscr{D}$
et si ces dérivées partielles sont continues (fonctions de deux variables).

On note alors $f \in \mathscr{C}^1(\mathscr{D}, \mathbf{R})$.

Exemple

Une application polynomiale de deux variables est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.

Les opérations sur les dérivées des fonctions d'une variable se généralisent aux fonctions de deux variables.

Propriété 3.3

Soit $\mathscr{D}$ un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

1. $\mathscr{C}^1(\mathscr{D})$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Les dérivées partielles sont linéaires.

$$\forall (f,g) \in \left(\mathscr{C}^1(\mathscr{D})\right)^2,\ \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad f + \lambda g \in \mathscr{C}^1(\mathscr{D})$$

avec
$$\frac{\partial (f+\lambda g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial (f+\lambda g)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}.$$

2. $\mathscr{C}^1(\mathscr{D})$ est stable par produit

$$\forall (f,g) \in \left(\mathscr{C}^1(\mathscr{D})\right)^2, \qquad f \times g \in \mathscr{C}^1(\mathscr{D})$$

avec
$$\frac{\partial (f\times g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \times g + f \times \frac{\partial g}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial (f\times g)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \times g + f \times \frac{\partial g}{\partial y}.$$

3. Si $(f,g) \in \left(\mathscr{C}^1(\mathscr{D})\right)^2$, telle que g ne s'annule pas, alors $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}^1(\mathscr{D})$ et

$$\frac{\partial \left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x} = \frac{1}{g^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} \times g - f \times \frac{\partial g}{\partial x}\right).$$

Preuve

Immédiat car on a déjà prouvé les propriétés pour la continuité des fonctions de deux variables. L'existence des dérivées partielles s'obtient par les fonctions d'une variable. ■

Théorème 3.4 *(Développement limité à l'ordre 1)*

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathscr{D}, \mathbf{R})$, et $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}$.
Le **développement limité** à l'ordre 1 de f au voisinage de (x_0, y_0) est donné par

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \times (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \times (y - y_0) + \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{o}(\|(x-x_0, y-y_0)\|).$$

Où on a défini le « petit o » par
$u(x,\,y) = \underset{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)}{o}(g(x,\,y))$ si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,\,y) \in \mathscr{D},\ \|(x-x_0,\,y-y_0)\| \leqslant \eta \Rightarrow |u(x,\,y)| \leqslant \varepsilon\,|g(x,\,y)|\,.$$

Preuve

Admis.

Pour les curieux :

La preuve est un peu longue, mais très simple quand on a compris la démarche et elle se généralise facilement à plus de variables.

Soit $(x_0,\,y_0) \in \mathscr{D}$.

Dans la suite, pour tout $r > 0$ on notera $B_r = B\left((x_0,\,y_0),\,r\right)$ la boule ouverte de centre $(x_0,\,y_0)$ et de rayon r.

$\mathscr{D}$ étant ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_r = B((x_0,\,y_0),\,r) \subset \mathscr{D}$.

On pose $\varepsilon > 0$.

Pour tout $(x,\,y) \in B_r$, on peut appliquer l'égalité des accroissements finis pour les fonctions partielles (continues et dérivables) :

$$\begin{aligned} f(x,\,y) &= f(x_0,\,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(c_x,\,y)\cdot(x-x_0) \quad \text{avec } c_x \in \,]\min(x,\,x_0),\,\max(x,\,x_0)[\\ &= f(x_0,\,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(c_x,\,y)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\,c_y)\cdot(y-y_0) \\ &\qquad \text{avec } c_y \in \,]\min(y,\,y_0),\,\max(y,\,y_0)[\end{aligned}$$

Or $(c_x,\,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(c_x,\,y)$ est continue donc en $(x_0,\,y_0)$ donc il existe $\eta_1 \in]0, r]$ tel que

$$\forall (x,\,y) \in B_{\eta_1},\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\,y_0)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Or, pour $(x,\,y) \in B_{\eta_1}$, on a également $(c_x,\,y) \in B_{\eta_1}$ et la majoration s'applique.
On obtient donc :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(c_x,\,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\,y_0)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Par continuité de $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\,y)$ on trouve également $\eta_2 \in [0,\,r]$ tel que

$$\forall (x,\,y) \in B_{\eta_2},\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\,c_y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\,y_0)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Donc pour $(x,\, y) \in B_{\min(\eta_1,\, \eta_2)}$

$$\left| f(x,\, y) - f(x_0,\, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\, y_0)\cdot(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\, y_0)\cdot(y - y_0) \right| \leqslant \varepsilon\left(|x - x_0| + |y - y_0|\right)$$
$$\leqslant \varepsilon \left\|(x - x_0,\, y - y_0)\right\|_1 .$$

Or pour tout $(a,\, b) \in \mathbf{R}^2$, $(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\,|ab|$.
Or $2\,|ab| \leqslant |a|^2 + |b|^2$, ce qui donne donc $(|a| + |b|)^2 \leqslant 2\left(|a|^2 + |b|^2\right)$.
Ainsi

$$\left\|(a,\, b)\right\|_1 \leqslant \sqrt{2}\left\|(a,\, b)\right\|_2 .$$

On obtient donc

$$\left| f(x,\, y) - f(x_0,\, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\, y_0)\cdot(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\, y_0)\cdot(y - y_0) \right| \leqslant \varepsilon\sqrt{2}\left\|(x - x_0,\, y - y_0)\right\|_1 .$$

Ce qui termine la preuve (quitte à diviser ε par $\sqrt{2}$).
Vous verrez en deuxième année, que ce résultat n'est pas seulement valable pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, mais pour toute norme de $\mathbf{R}^2$. ■

Théorème 3.5

Soit $\mathscr{D}$ un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $f\ : \mathscr{D} \to \mathbf{R}$.
Si $f \in \mathscr{C}^1\left(\mathscr{D},\, \mathbf{R}\right)$ alors f continue sur $\mathscr{D}$.

Preuve

D'après le développement limité plus haut. ■

Propriété 3.6 *(Dérivée d'une composée : « Règle de la chaîne »)*

Soit $I \times J$ un pavé ouvert de $\mathbf{R}^2$.
Soient $f \in \mathscr{C}^1(I \times J)$, $x \in \mathscr{C}^1(]a, b[,\, I)$ et $y \in \mathscr{C}^1(]a, b[,\, J)$.
On considère l'application F d'une seule variable

$$F\ :\ \begin{cases}]a, b[& \to \mathbf{R} \\ t & \mapsto f(x(t), y(t)) \end{cases} \qquad \in \mathscr{C}^1(]a, b[, \mathbf{R}).$$

F est alors de classe $\mathscr{C}^1\left(]a, b[\right)$ et

$$\forall t \in]a, b[, \qquad F'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t),\, y(t)\right) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}\left(x(t),\, y(t)\right).$$

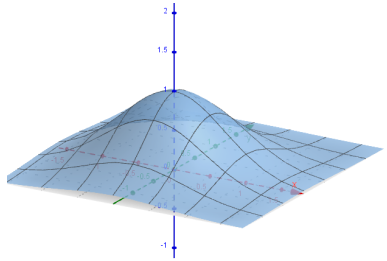
Explications

On retrouve ici l'idée d'un chemin continu : $\gamma\ : t \mapsto (x(t),\, y(t))$ tel qu'il a déjà été présenté plus haut. On évalue F le long de ce chemin (c'est une fonction d'une seule variable).

Exemple

Imaginons un relief le long duquel on se promène.
Par exemple :

$$F : (x,\, y) \mapsto \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}.$$



On peut par exemple s'intéresser à un cheminement parallèlement à un axe sur ce relief.
Disons qu'on fixe $y = 1$ et que l'on avance à vitesse constante le long de x. On prend alors

$$\gamma\ : t \mapsto (t,\, 1).$$

L'altitude en fonction du temps est alors donnée par

$$\forall t \in \mathbf{R},\ F\left(\gamma(t)\right) = \mathrm{e}^{-\left(t^2+4\right)}.$$

Si on veut connaître la variation d'altitude le long de ce chemin en fonction du temps (dérivée), on obtient

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \left(F \circ \gamma\right)'(t) = -2t\,\mathrm{e}^{-\left(t^2+1\right)}.$$

Si on fait le calcul avec la règle de la chaîne, on retrouve bien

$$\begin{aligned} x'(t)\frac{\partial f\left(x(t),\, y(t)\right)}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial f\left(x(t),\, y(t)\right)}{\partial y} \\ &= 1 \times \left(-2x(t)\right)\mathrm{e}^{-\left(x(t)^2+y(t)^2\right)} + 0 \times \left(-2y(t)\right)\mathrm{e}^{-\left(x(t)^2+y(t)^2\right)} \\ &= -2t\,\mathrm{e}^{-\left(t^2+1\right)}. \end{aligned}$$

On n'est pas obligé d'avancer à vitesse constante et on peut suivre le même chemin mais avec une vitesse variable.
Par exemple, on prend

$$\gamma\ : t \mapsto \left(\tan(t),\, 1\right).$$

On trouve alors

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right[,\ F\left(\gamma(t)\right) = \mathrm{e}^{-\left(\tan^2(t)+1\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\cos^2(t)}}.$$

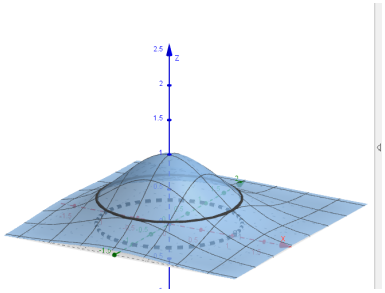
$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right[,\ \left(F \circ \gamma\right)'(t) = -\frac{2\sin(t)}{\cos^3(t)}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\cos^2(t)}}.$$

La règle de la chaîne donne le même résultat.
On peut aussi vouloir faire le tour de la colline sur un cercle dont le centre est le

sommet.
Par exemple, pour un cercle de rayon 1, on obtient le chemin :

$$\gamma \ : t \mapsto (\cos(t), \sin(t)).$$

On voit bien que lorsque t parcourt $[0, 2\pi]$, γ suit alors le cercle de centre 0 et de rayon 1.



Cette fois-ci, comme $\cos^2(t)+\sin^2(t) = 1$, l'altitude est constante égale à 1 et la règle de la chaîne donne bien

$$\forall t \in \mathbf{R},\ F'(t) = 0.$$

Preuve

Soit $t_0 \in]a, b[$ on note $x_0 = x(t_0)$ et $y_0 = y(t_0)$.
alors pour tout $t \in]a, b[\setminus \{t_0\}$, on peut appliquer le développement limité à $(x(t), y(t))$ ce qui donne

$$F(t) = F(t_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0)+o_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left(\|x-x_0, y-y_0\|\right).$$

Or $(x - x_0) = x'(t)(t - t_0) + o(t - t_0)$ et $(y - y_0) = y'(t)(t - t_0) + o(t - t_0)$.
On remarque alors que $o_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left(\|x-x_0, y-y_0\|\right) = o(t - t_0)$ donc

$$F(t) = F(t_0) + \left(x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)(t - t_0) + o(t - t_0).$$

■

Théorème 3.7 *(Dérivée d'une composée)*

Soient $\mathscr{D}$ un ouvert de $\mathbf{R}^2$,
φ et ψ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1(\mathscr{D}, \mathbf{R})$
et $f \ : (u, v) \mapsto f(u, v) \in \mathscr{C}^1\left((\varphi, \psi)(\mathscr{D}), \mathbf{R}\right)$.

La fonction $F : (x, y) \mapsto f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ est alors de classe $\mathscr{C}^1(\mathscr{D})$
et $\forall (x, y) \in \mathscr{D}$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(x, y), \psi(x, y))\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(x, y), \psi(x, y))\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y).$$

Plus simplement, on écrit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

avec $u = \varphi$ et $v = \psi$.

Exemple

Sous les mêmes hypothèses, écrire : $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$.

C Plan tangent

La formule du développement limité à l'ordre 1 est

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\times(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\times(y-y_0) + \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{o}\left(\|(x-x_0,y-y_0)\|_2\right).$$

On peut définir le plan tangent T comme l'approximation à l'ordre 1 de la surface.

Équation paramétrique du plan tangent :

$$\begin{aligned}
&(x, y, z) \in T \\
\iff &\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \end{pmatrix} \\
\iff &\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} + (x - x_0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix} + (y - y_0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc le plan tangent est un plan affine dont la direction vectorielle est engendrée par

$$\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right) \quad \text{et} \quad \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right).$$

Équation paramétrique du plan tangent :
En reprenant l'équation initiale, on obtient

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\, y_0)\Delta y.$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\, y_0)\Delta y - \Delta z = 0.$$

Le plan tangent est le plan qui passe par le point $(x_0,\, y_0,\, f(x_0, y_0))$ et qui est orthogonal au vecteur

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),\, -1\right).$$

D Gradient

Définition 3.8 *(Gradient)*

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathscr{D},\, \mathbf{R})$ et $(x_0,\, y_0) \in \mathscr{D}$.
Le **gradient** de f au point $(x_0,\, y_0)$ est donné par

$$\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right).$$

Quelques applications de l'écriture avec le gradient :

- Développement limité s'écrit plus simplement :

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\, y_0)\Delta y = \overrightarrow{\nabla} f(x_0,\, y_0).(\Delta x,\, \Delta y).$$

- Règle de la chaîne :
  Si $\gamma\ : t \mapsto (x(t),\, y(t))$ désigne un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,\, b[$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\gamma(]a,\, b[)$, alors $\forall t \in]a,\, b[$,

$$(f \circ \gamma)'(t) = \overrightarrow{\nabla} f(x(t),\, y(t)).\overrightarrow{\gamma'(t)}.$$

E Optimisation

Théorème 3.9 *(Maximum d'une fonction de plusieurs variables)*

Soit $f\ :\ (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction de deux variables définie sur le pavé *ouvert* $I \times J$.

Si f admet un extremum **local** en (x_0, y_0), alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

$(x_0,\, y_0)$ est un point critique de f.

⚠ La réciproque est fausse en général.

Preuve

Si $(x_0,\, y_0)$ est un extremum local pour f c'en est un pour les deux applications partielles (définies sur des ouverts), donc les deux dérivées partielles s'annulent.
En effet, dans le cas du minimum par exemple, il existe $r > 0$, tel que $\mathscr{B}((x_0,\, y_0,\, r) \subset I \times J$ et $\forall (x,\, y) \in \mathscr{B}((x_0,\, y_0),\, r),\ f(x,\, y) \geqslant f(x_0,\, y_0)$.
Pour tout $x \in]x_0 - r,\, x_0 + r[,\ (x,\, y_0) \in B((x_0,\, y_0),\, r)$ et $f(x,\, y) \geqslant f(x_0,\, y_0)$ ce qui justifie bien que x_0 est un minimum local pour $x \mapsto f(x,\, y_0)$. ■

Définition 3.10 *(Lignes de niveau)*

Soit $f\ :\ (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction de deux variables définie sur le pavé $I \times J$.
Une ligne de niveau, pour $k \in \mathbf{R}$ **fixé**, est

$$\mathscr{C}_k = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ \text{tel que } f(x, y) = k\right\}.$$

Explications
Ce sont l'ensemble des antécédents de k par f.
En général, ces lignes de niveau sont des courbes du plan, mais elles peuvent aussi comporter des points isolés (sommets...) ou des surfaces (plateaux) par exemple.

On appelle ces objets des courbes de niveau en référence à la cartographie. Si on interprète la surface de la fonction comme un relief en topologie, alors les lignes de niveau correspondent aux points de même altitude (représentés par des lignes orange sur les cartes IGN).

Supposons qu'on ait un chemin $\gamma\ : t \mapsto (x(t),\, y(t)) \in \mathscr{C}^1(]0,\, 1[,\, \mathbf{R}^2)$ qui soit inclus dans une ligne de niveau.
Ainsi $f \circ \gamma$ est une fonction $\mathscr{C}^1(]0,\, 1[,\, \mathbf{R})$ qui est constante et sa dérivée est donc identiquement nulle.
Donc $\forall t \in]0,\, 1[$, si on note $(x,\, y) = (x(t),\, y(t))$, on obtient avec la règle de la chaîne :

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,\, y) \cdot \gamma'(t) = 0.$$

On trouve donc que

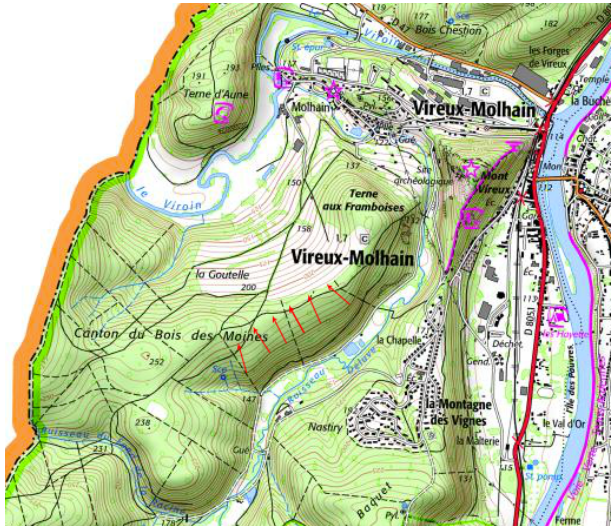
$$\gamma'(t) \perp \overrightarrow{\nabla} f(x,\, y).$$

Or, dans le plan $(x,\, y)$, $\gamma'(t)$ correspond au vecteur directeur de la tangente à la courbe de niveau, qui est donc orthogonale au gradient.

Les courbes de niveau sont orthogonales au gradient.

Explications

Lorsque l'on se situe sur un point particulier, on peut se demander dans quelle direction est la pente la plus forte. Cela est utile en particulier si on veut rejoindre le plus rapidement possible le pied de la vallée ou un sommet (minimum ou maximum) ou un point d'une autre altitude (recherche du zéro d'une fonction par la méthode de Newton).
Comme on vient de le voir si on trace une ligne de niveau dans le plan, le gradient lui est orthogonal. On imagine donc bien à contrario que la plus forte pente se trouvera dans la direction orthogonale à la ligne de niveau, c'est-à-dire parallèle au gradient.



Quelques gradients tracés en rouge.

$$\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f\,(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0) + o\left(\|(x-x_0,\, y-y_0)\|_2\right).$$

Si on cherche un chemin $\gamma\ : t \mapsto (x(t),\, y(t))$ qui maximise l'écart, on obtient

$$\Delta z = \overrightarrow{\text{grad}}\, f\,(x_0,y_0)\cdot\gamma'(t) + o\left(\|\gamma'(t)\|_2\right).$$

D'après Cauchy-Schwarz, on a donc

$$|\Delta z| \leqslant \left\|\overrightarrow{\text{grad}}\, f\,(x_0,y_0)\right\|_2 \|\gamma'(t)\|_2 + o\left(\|\gamma'(t)\|_2\right)$$

avec égalité pour $\overrightarrow{\nabla} f(x_0,\, y_0)$ et $\overrightarrow{\gamma'(t)}$ parallèles.
Ainsi le gradient indique bien la plus forte pente et cette pente est d'autant plus forte que la norme du gradient est grande.