Fonctions usuelles

Jésus s'adressa à ses disciples :
— « $y = x^2$. »

Pierre prit alors la parole :
— « Rabbi, tes paroles sont souvent énigmatiques, mais cette fois-ci, nous sommes complètement perdus. »

Jésus de rétorquer : « C'est normal, c'est une parabole... »

Après un chapitre sur les applications dans le cas général, celui-ci s'intéresse plus précisément aux applications $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ comme au lycée.
Ce chapitre est à lire comme une sorte de « *mise au point* » qui liste les notions indispensables pour mener à bien une étude de fonction en prépa. Il est essentiellement *utilitaire.*

Il sera donc fait abstraction de tous les aspects théoriques pour se concentrer sur l'étude *pratique* et concrète des fonctions.

Les approfondissements nécessaires à certaines notions théoriques sont réalisés dans d'autres chapitres (majorants, minorants avec les nombres réels, limites et continuité, dérivabilité...). Il ne faut donc pas être surpris si ce chapitre ne contient presque pas de preuves.

Notation : Dans la suite I désignera un intervalle de $\mathbf{R}$, a un point de I et f une application $I \to \mathbf{R}$.

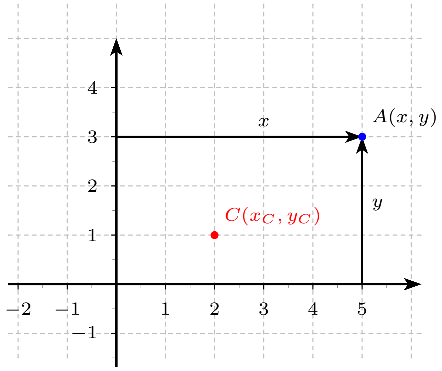
1 Propriétés globales

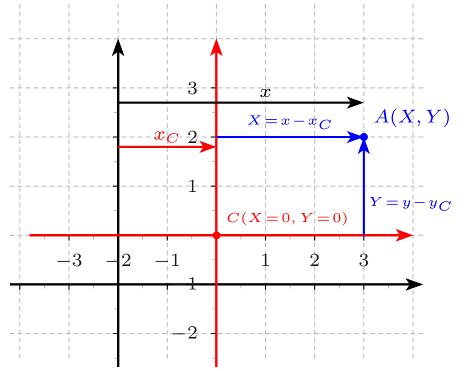
A Rappels sur le repérage dans le plan

Changement d'origine :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on définit $C(x_C, y_C)$.
Soit $A(x, y)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Dans le repère *translaté* d'origine C, les coordonnées de A sont

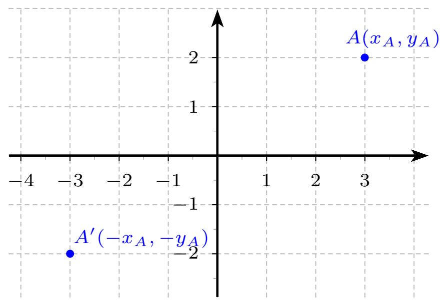
$$X = x - x_C \text{ et } Y = y - y_C$$



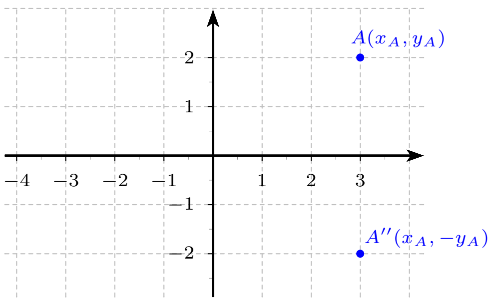


Remarque : On vérifie que dans le nouveau repère, les coordonnées de l'origine C sont $X = x_C - x_C = 0$ et $Y = y_C - y_C = 0$.

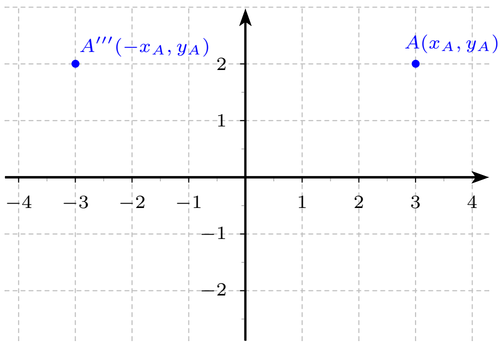
Symétries liées à l'origine



Symétrie par rapport à l'origine

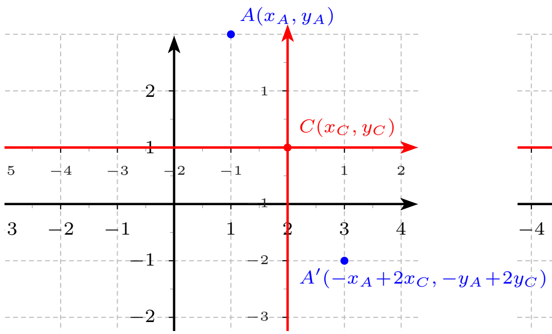


Symétrie par rapport à l'axe des abcisses

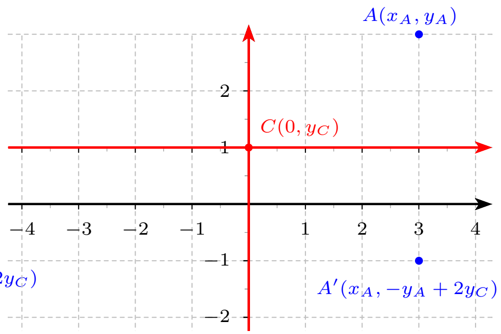


Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

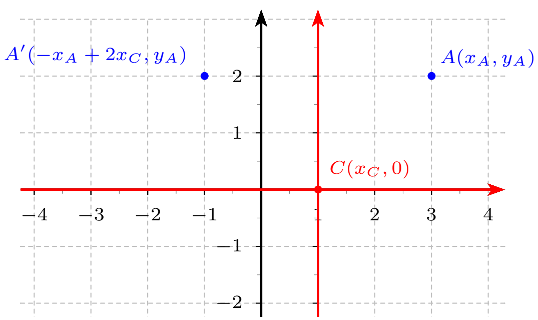
Symétries liées à un point quelconque



Symétrie par rapport à un point



Symétrie par rapport à une droite horizontale



Symétrie par rapport à une droite verticale

Preuve

On ne présente que la preuve pour la symétrie par rapport à un point, les autres sont simplement des cas particuliers.

On note en minuscule les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et en majuscules dans le repère $(C, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Dans le nouveau repère, les coordonnées de A sont $(X_A, Y_A) = (x_A - x_C, y_A - y_C)$
2. Symétrie par rapport à l'origine C :
   Les coordonnées du symétrique sont
   $(-X_A, -Y_A) = (-(x_A - x_C), -(y_A - y_C)) = (-x_A + x_C, -y_A + y_C)$
3. Dans le repère d'origine, cette fois-ci on rajoute les coordonnées de C et on obtient bien la bonne formule :

$$A'(-X_A + x_C, -Y_A + y_C) = A'(-x_A + 2x_C, -y_A + 2y_C)$$

On donnera lors de l'explication de la propriété 1.5 d'autres façons de retrouver ces relations géométriques. ∎

B Application à l'étude des fonctions

Définition 1.1 *(Fonction paire)*

f est une fonction **paire** si

- *(parité du domaine)* $\forall x \in I,\ -x \in I$
- *(symétrie de la fonction)* $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$

Propriété 1.2 *(Symétrie d'une fonction paire)*

Une fonction est paire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

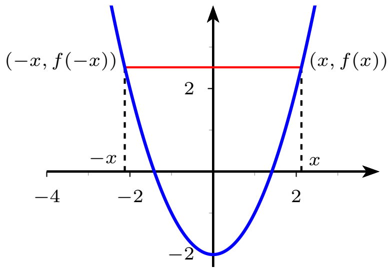
Preuve

- *Sens direct* : Si f est paire, alors pour tout $x \in I, -x \in I$ et $f(-x) = f(x)$.
  Donc si $M(x, f(x))$ est sur la courbe représentative de f, alors son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $M'(-x, f(x))$ est aussi sur la courbe.
  La courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- *Sens réciproque* : Si la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, alors pour tout $M(x, y)$ sur la courbe, le point $M'(-x, y)$ est aussi sur la courbe.
  Donc si $x \in I$, alors $-x \in I$ et si $y = f(x)$, alors $y = f(-x)$, donc $f(-x) = f(x)$.
  Ainsi la fonction est paire.

∎

Exemple

Les fonctions constantes sont paires,
La fonction $x \mapsto x^2$ est paire,
La fonction $x \mapsto \cos x$ est paire,...



Définition 1.3 *(Fonction impaire)*

f est une fonction **impaire** si

- *(parité du domaine)* $\forall x \in I,\ -x \in I$
- *(symétrie de la fonction)* $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$

Propriété 1.4 *(Symétrie d'une fonction impaire)*

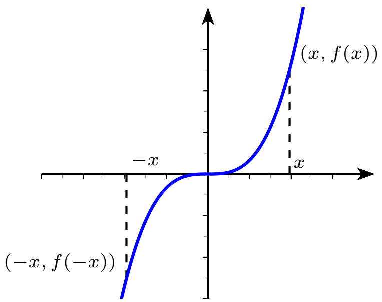
Une fonction est impaire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine.

Preuve

En exercice, c'est identique à celle pour la fonction paire. ∎

Exemple

Les fonctions linéaires sont impaires,
La fonction $x \mapsto x^3$ est impaire,
La fonction $x \mapsto \sin x$ est impaire,...



Propriété 1.5 *(Symétrie par rapport à un axe vertical)*

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et $x_0 \in \mathbf{R}$. La courbe représentative de f est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = x_0$
si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad -x + 2x_0 \in I \quad \text{et} \quad f(x) = f(-x + 2x_0)$$

si et seulement si

$$\forall x + x_0 \in I, \quad -x + x_0 \in I \quad \text{et} \quad f(x + x_0) = f(-x + x_0)$$

Explications

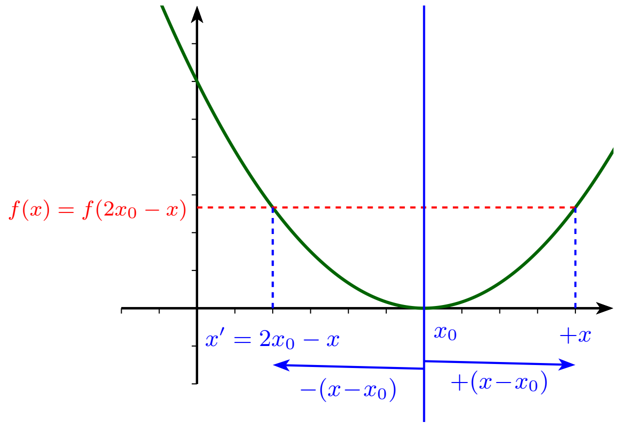
Ces relations sont de simples conséquences des symétries vues pour les points du plan. Les précédentes figures permettent de l'illustrer.

- Le premier cas de la propriété 1.5 correspond à la sous-figure ci-dessous.

  Si x' est le symétrique de x par rapport à x_0, alors $f(x') = f(x)$.

  La valeur de x' en fonction de x peut être obtenue par plusieurs raisonnements :

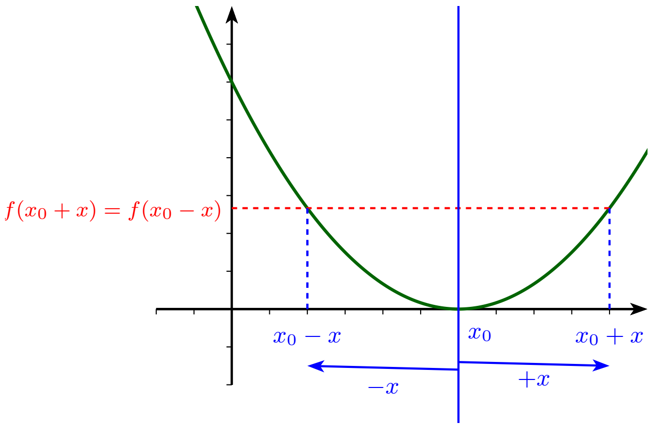
  – En utilisant la propriété de la symétrie par rapport à un point quelconque vue en début du cours.
  – On cherche x' tel que x_0 soit le milieu de $[x', x]$. C'est-à-dire que l'on résout $x_0 = \frac{x+x'}{2}$, et on trouve la valeur $x' = 2x_0 - x$.
  – On voit que pour avancer de x_0 vers x, il faut ajouter la quantité $x - x_0$. Pour aller de x_0, vers x', il faut donc reculer de cette même valeur, c'est-à-dire avancer de $-(x - x_0)$. Donc $x' = x_0 - (x - x_0) = 2x_0 - x$.



- La deuxième relation est illustrée par la figure qui suit.
  Si on avance de la quantité x par rapport à x_0, alors on obtient $x_0 + x$.
  Et l'image doit être la même que si on recule de la même quantité x par rapport à x_0, c'est-à-dire pour $x_0 - x$.

  Ainsi, les deux images doivent être égales : $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$.

  Cette deuxième relation est sans doute plus visuelle, mais souvent plus difficile à utiliser concrètement. En effet, dans la permière relation, il n'y avait qu'une expression à calculer $f(2x_0 - x)$ pour essayer de retrouver $f(x)$.
  Avec cette deuxième relation, il faut calculer deux relations $f(x-x_0)$ et $f(x+x_0)$ et montrer qu'elles sont égales.



Propriété 1.6 *(Symétrie par rapport à un point)*

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$.
La courbe représentative de f est symétrique par rapport au point (x_0, y_0) si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad -x + 2x_0 \in I \quad \text{et} \quad f(-x + 2x_0) = -f(x) + 2y_0$$

si et seulement si

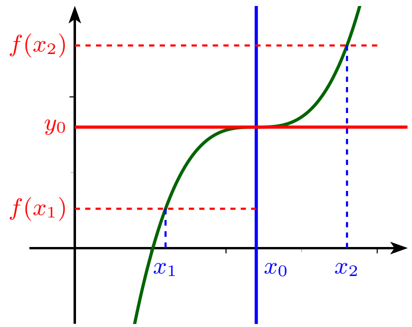
$$\forall x + x_0 \in I, \quad -x + x_0 \in I \quad \text{et} \quad f(x + x_0) + f(-x + x_0) = 2y_0$$

Preuve

En exercice ■

Explications

Si x_1 et x_2 sont symétriques par rapport à x_0, alors $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont symétriques par rapport à y_0.
C'est-à-dire que y_0 est le milieu de $[f(x_1), f(x_2)]$.
Donc
$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = y_0$$
Ce qui donne immédiatement la formulation de la propriété 1.6.
Il suffit de remplacer x_1 et x_2 par deux points symétriques l'un de l'autre par rapport à x_0.
Comme pour la propriété 1.5 de symétrie par rapport à un axe, on peut prendre $x_1 = x$ et $x_2 = 2x_0 - x$, ou prendre $x_1 = x + x_0$ et $x_2 = x - x_0$.



Propriété 1.7 *(Symétrie par rapport à la première bissectrice)*

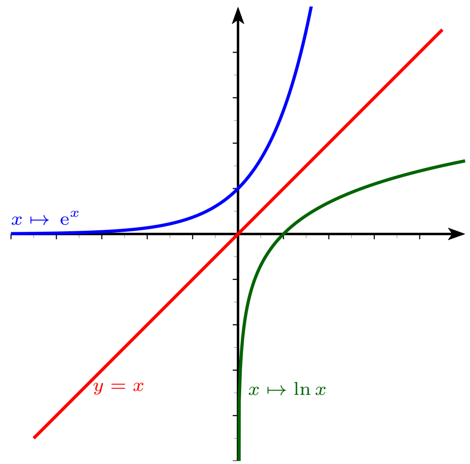
Deux courbes sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ si et seulement si elles représentent des applications réciproques l'une de l'autre.

Preuve

f et g ont leur courbes symétriques,
$\iff$ $M(x, f(x))$ est sur la courbe de f si et seulement si $M'(f(x), x)$ est sur celle de g.
$\iff$ $\forall x \in I$, $g(f(x)) = x$ (sens direct) et pour tout $y = f(x) \in f(I)$, $f(g(y)) = y$.
$\iff$ f et g sont réciproques l'une de l'autre. ■

Exemple

exp et ln (voir ci-contre),
sin et arcsin,
$x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$



Exponentielle et logarithme.

Définition 1.8 *(Périodicité)*

Une fonction f est dite périodique de période $T > 0$, si

$$\forall x \in \mathbf{R},\ x \in I \iff x + T \in I \text{ et } f(x+T) = f(x)$$

Remarque : On trouvera parfois en physique) une définition légèrement différente de la périodicité.

$$\forall x \in I, \quad x + T \in I \text{ et } f(x+T) = f(x)$$

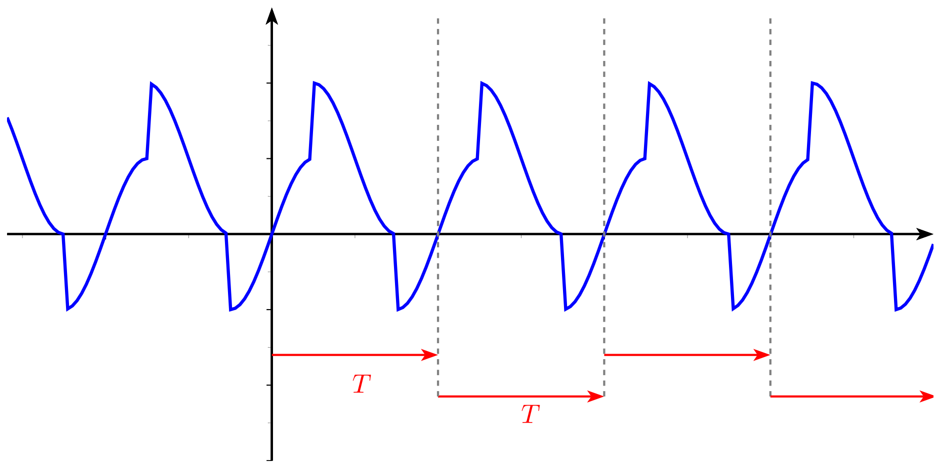
Avec cette formulation, on peut avancer de T, mais on n'est pas sûr de pouvoir reculer : rien n'exige que $x - T \in I$.
Cette expression permet de donner un *début* au processus comme c'est souvent le cas en physique : avant $t = 0$, le processus n'est pas initialisé, et pour $t > 0$, le processus est périodique.

Propriété 1.9

Une fonction f est périodique de période $T > 0$ si et seulement si sa courbe représentative est invariante par la translation horizontale de vecteur $T\vec{i}$.

Exemple

$x \mapsto \sin x$ est 2π-périodique, mais aussi 4π-périodique. En général, on cherchera la plus petite période possible.
$x \mapsto \tan x$ est π-périodique.
Si $\forall T > 0$, f est $T-$ périodique, alors f est constante.



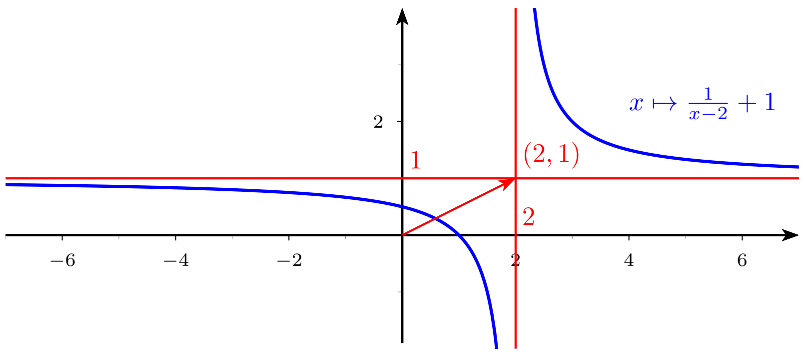
Fonctions numériques : Courbe d'une fonction T-périodique

Propriété 1.10 *(Translation d'une courbe)*

Soit $f : I \to \mathbf{R}$, soit $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$,

- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x - x_0)$ est la translatée de la courbe de f de vecteur $+x_0\vec{i}$ suivant l'axe des abscisses.
- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x) + y_0$ est la translatée de la courbe de f de vecteur $+y_0\vec{j}$ suivant l'axe des ordonnées.

Exemple



C Majorants-minorants

Définition 1.11

- On dit que f est **majorée sur** I, s'il existe un majorant $M \in \mathbf{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq M$$

Définition équivalente : f majorée sur I si $f(I)$ est une partie majorée de $\mathbf{R}$.

- On dit que f est **minorée sur** I, s'il existe un minorant $m \in \mathbf{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq m$$

Définition équivalente : f majorée sur I si $f(I)$ est une partie minorée de $\mathbf{R}$.

- On dit que f est **bornée sur** I, si elle est à la fois majorée et minorée.
Définition équivalente : f bornée sur I si $f(I)$ est une partie bornée de $\mathbf{R}$.

Définition 1.12 *(Maximum, minimum, extremum)*

On dit que f **admet un maximum sur I en a** si

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq f(a)$$

On dit que f **admet un minimum sur I en a** si

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq f(a)$$

On appelle **extremum**, un maximum ou un minimum.

⚠ En général, pour une fonction majorée, la borne supérieure n'est pas atteinte et la fonction n'admet pas de maximum.
De même, une fonction minorée n'admet pas toujours de minimum.
Dans la définition précédente, l'écriture $f(a)$ suppose que la valeur est atteinte en a : il s'agit donc nécessairement d'un maximum (ou minimum).

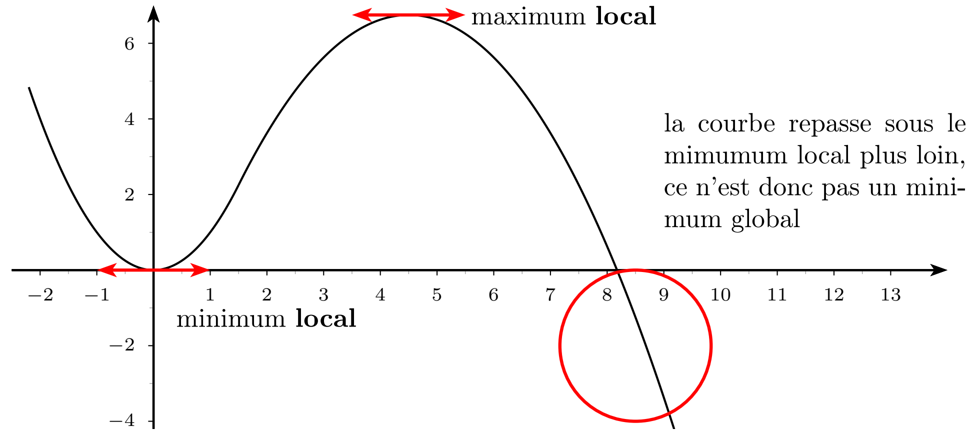
Exemple

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ définie sur $\mathbf{R}^*$.
f est-elle majorée ? minorée ? admet-elle un maximum ? un minimum ?
Solution :

Définition 1.13 *(Extremum local)*

On dit que f admet un extremum **local** sur I en a, s'il existe un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ qui contient a tel que f admet un extremum en a sur $I \cap]\alpha, \beta[$.

Explications
Cela veut dire que l'extremum n'est valable que dans une proximité immédiate de a. On dit *au voisinage*[1] *de* a.



2 Continuité

A Rappel sur la continuité

Sans entrer dans les détails...

Définition 2.1 *(Fonction continue)*

f est continue en $a \in I$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. f est continue sur I, si f est continue en tout point de I.

Explications
Une fonction est continue en a si on peut « faire rentrer » la limite dedans :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f\left(\lim_{x \to a} x\right) = f(a)$$

C'est ce qui caractérise les fonctions continues. Ce n'est donc pas vrai pour n'importe quelle fonction.
Avec les mains : une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue lorsque l'on peut tracer sa courbe « sans lever le crayon ».

Notion locale vs globale :

Local : La continuité est une notion locale, c'est une théorie pour les myopes : pour savoir si une courbe est continue, il faut la regarder d'infiniment près, point par point. Le nez collé contre la feuille, on suit la courbe point après point sans s'occuper de la forme générale de la courbe : c'est une notion locale.

Global : A contrario, le caractère borné d'une fonction peut-être considéré comme une notion globale. En effet, pour savoir si une fonction est bornée, je dois prendre un peu de distance. Une fonction continue est toujours bornée au voisinage de chacun de ses points. Si je reste collé à la feuille, je ne pourrais donc rien en conclure. En revanche, c'est la forme générale de la courbe qui me donne l'information.

1. On peut se représenter un *voisinage* de a comme une petite bulle qui contient a.

Exemple

La plupart des applications usuelles sont continues sur leur domaine de définition. Par contre, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en tout point de $\mathbf{Z}$. En effet selon que l'on s'approche par la gauche (valeurs inférieures) ou par la droite (valeurs supérieures) d'un nombre entier la limite de la fonction n'est pas la même.
Cela se traduit par des ruptures dans le graphe de la courbe.

B Théorèmes liés à la continuité

Les théorèmes qui suivent sont FONDAMENTAUX

Théorème 2.2 *(Théorème des valeurs intermédiaires)*

Si f est continue sur un intervalle I contentant $[a, b]$.
Alors f prend toutes les valeurs situées entre $f(a)$ et $f(b)$.

Autre formulation : L'image d'un intervalle par une application continue (à valeurs réelles) est un intervalle.

Corollaire 2.3 *(Utilisation pour l'annulation d'une fonction)*

Si f est continue sur un intervalle I telle qu'il existe $(a, b) \in I^2$, avec $f(a)f(b) \leq 0$ (de signes contraires), alors f s'annule entre a et b.

Corollaire 2.4

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$, Si f est continue sur $]a, b[$, et admet des limites en a et en b avec

$$\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to b} f(x)\right) < 0$$

Alors, $\exists x \in]a, b[,\ f(x) = 0$.

Remarque : Ce corollaire est vrai si a, ou b, ou les limites sont infinies.
Contrairement au corollaire précédent, comme a et b n'appartiennent pas à l'intervalle, il faut que l'inégalité soit stricte (aucune des deux limites n'est nulle).

Théorème 2.5 *(Théorème de la bijection continue)*

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors

- $f(I)$ est un intervalle.
- f est bijective de I dans $f(I)$.

De plus, f^{-1} est elle-même continue, strictement monotone et de même monotonie que f.

⚠ Ne pas confondre le théorème des valeurs intermédiaires avec le théorème de la bijection continue. Dans le premier, il n'y a pas unicité de la solution, contrairement au second.

Preuve

$f(I)$ est un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
La bijectivité est obtenue par la surjectivité (théorème des valeurs intermédiaires) et l'injectivité (stricte monotonie).
La continuité de f^{-1} est admise, sa stricte monotonie, du même sens que f peut être cherché en exercice (facile). ■

Corollaire 2.6 *(Utilisation pratique)*

Si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$, avec $f(a)f(b) \leq 0$,
alors, $f(x) = 0$ admet une **unique** solution sur $[a, b]$.

Corollaire 2.7

Si f est continue et strictement monotone sur $]a, b[$, avec

$$\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to b} f(x)\right) < 0$$

Alors, $f(x) = 0$ admet une **unique** solution sur $]a, b[$.

Remarque : Ici, la monotonie de f permet de prouver l'existence des limites a priori (contrairement au cas du théorème des valeurs intermédiaires où c'est une hypothèse supplémentaire). Nous verrons ce résultat plus tard dans l'année (théorème de la limite monotone).
Dans l'énoncé, a, b et les limites peuvent être infinis.

Théorème 2.8 *(Théorème des bornes atteintes)*

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes : elle possède un maximum et un minimum.
Autre formulation : L'image d'un segment par une application continue est un segment.

3 Continuité

A Dérivabilité d'une fonction

Définition 3.1 *(Taux d'accroissement)*

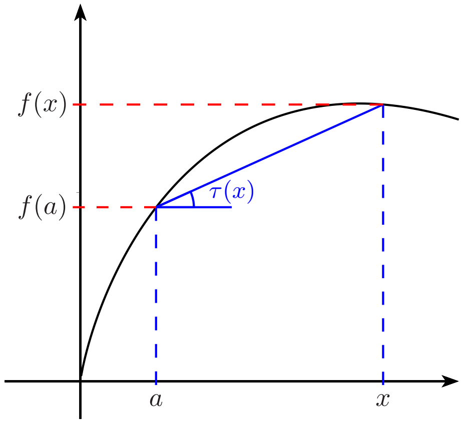
On appelle **taux d'accroissement** de f en a la fonction définie sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\tau(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Explications

Cela correspond à la pente de la corde qui relie les deux points de la courbe

$(a, f(a))$ et $(x, f(x))$.



Interprétation physique : Lorsque la courbe représente le temps en abscisse et la position en ordonnée, alors le taux de variation donne la vitesse moyenne entre deux points. Dans ce cas, on remplace souvent la variable x par t pour bien indiquer qu'il s'agit d'un temps.
Si on note $d = f(t)$ la distance parcourue à l'instant t, on retrouve bien la forme *classique* de la vitesse :

$$v_{\text{moy}} = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

Histoire des mathématiques : La notion de dérivée marque la découverte du calcul infinitésimal. Auparavant, la question de l'infini était déjà présente grâce aux suites, mais il s'agissait uniquement d'infiniment grand et non d'infiniment petit. La notion est apparue au XVII$^{\text{ème}}$ siècle avec **Fermat et Newton** (qui se disputent son origine). Mais ce n'est qu'au XIX$^{\text{ème}}$ siècle qu'elle est clairement définie et adoptée grâce aux concepts de limite et de continuité donnés par Cauchy et Weiestrass.
Cette notion était très déconcertante dans les premiers temps et Newton désignait la dérivée comme une grandeur « *évanescente* », c'est-à-dire qu'elle disparaîtrait au moment même où nous devrions l'atteindre : le taux n'est plus défini pour $x = a$. La division par une quantité nulle a longtemps posé problème et Newton lui-même sera embarrassé par ces « *fantômes* ».
Dans son approche, Fermat était également contraint à se débarrasser de termes « *infiniment petits* » pour déterminer des tangentes. Il n'est donc pas étonnant que ces notions aient été très controversées au début.
Cependant, l'audace paya et la puissance calculatoire de la dérivée l'imposa avant même qu'elle fut formellement acceptée.

Définition 3.2 *(Dérivée)*

f est **dérivable** en a si son taux d'accroissement admet une limite finie en a.
On appelle **dérivée de** f **en** a et on note $f'(a)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ cette limite.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

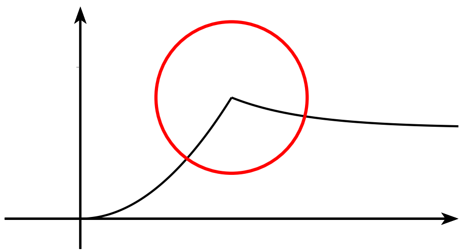
⚠ La continuité n'implique pas la dérivabilité.

Explications

La dérivée correspond à la pente limite lorsque les deux points de la corde se rapprochent infiniment.
En physique, la dérivée représente la vitesse instantanée. En général, il n'y a pas de problème d'existence de dérivée en physique car les phénomènes possèdent une certaine régularité. Cela peut cependant arriver lors du rebond d'un objet par exemple où la vitesse varie trop brusquement au moment du rebond pour que l'on puisse définir la vitesse instantanée (à une certaine échelle).
En mathématiques, les situations où la dérivée n'existe pas sont fréquente et se présentent dès que la fonction se met à varier trop brusquement au voisinage d'un point, ou sur le point lui-même.

Exemple

Au point *singulier* (pointu) de la courbe, la pente n'est pas définie. On ne peut pas parler de dérivée. On dit que la fonction n'est pas dérivable en ce point.



Méthode *(Étude de la dérivabilité en un point particulier)*

En un point où les théorèmes généraux ne s'appliquent pas, il faut revenir à la définition de la dérivée : limite du taux d'accroissement.

- Si le taux d'accroissement admet une limite finie alors, la fonction est dérivable et sa dérivée vaut cette limite.
- Si le taux d'accroissement admet une limite infinie alors, la fonction n'est pas dérivable mais admet une tangente verticale au point.
- Si le taux d'accroissement n'admet pas de limite alors, la fonction n'est pas dérivable et n'admet pas de tangente au point.

Remarque : Parfois, si on a une limite du taux d'accroissement à gauche et à droite qui sont différentes, alors la fonction n'est pas dérivable au point, mais admet deux demi tangentes (par exemple la fonction valeur absolue en 0).

Exemple

Étude en 0 de $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

Solution :

Exemple

Soit $f : \begin{cases} \mathbf{R}_+ \setminus \{1\} & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$

Montrer que la fonction f est continue et dérivable sur son domaine de définition.

Solution :

Définition 3.3 *(Dérivabilité sur un intervalle)*

f est **dérivable sur un intervalle** I si f est dérivable en tout point de I.
On note $\mathcal{D}(I)$, $\mathcal{D}(I, \mathbf{R})$, $\mathcal{D}^1(I)$ ou $\mathcal{D}^1(I, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.

Remarque : Comme la continuité, la dérivabilité n'est pas une notion globale.

Théorème 3.4 *(Dérivabilité et continuité)*

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
La réciproque est fausse en général.

La continuité est donc une condition *nécessaire* mais *pas suffisante* à la dérivabilité.

Exemple

Les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont continues en 0, mais pas dérivables en 0.

Exemple

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est définie et continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Solution :

B Opérations sur les dérivées

Propriété 3.5

Soient u est v deux fonctions définies sur I, et $a \in I$.
Si u et v sont dérivables en a, alors

1. (*linéarité*) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2,\quad \lambda u+\mu v$ est dérivable en a et
$$(\lambda u+\mu v)'(a)=\lambda u'(a)+\mu v'(a)$$
2. (*produit*) uv est dérivable en a et
$$(uv)'(a)=u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$$
3. (*inverse*) si de plus, $v(a)\neq 0$, alors $\frac{1}{v}$ est dérivable en a et
$$\left(\frac{1}{v}\right)'(a)=-\frac{v'(a)}{(v(a))^2}$$
4. (*quotient*) si de plus, $v(a)\neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable en a et
$$\left(\frac{u}{v}\right)'(a)=\frac{u'(a)v(a)-u(a)v'(a)}{(v(a))^2}$$

Théorème 3.6 *(Dérivée d'une composée)*

Soient I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$ (avec au moins deux points), et $a\in I$.
Soient $u: I\to J$ et $f: J\to\mathbf{R}$.

Si on suppose que u dérivable en a et que f est dérivable en $u(a)$.
Alors $f\circ u$ est dérivable en a et
$$(f\circ u)'(a)=u'(a)f'(u(a))$$

⚠ N'apprenez pas seulement le résultat, mais aussi les hypothèses de ce théorème. Cela ne sert à rien de connaître le résultat si vous ne savez pas dans quelles conditions vous pouvez l'utiliser.

⚠ Dans la formule, on prend la dérivée de f au point $u(a)$ et non en a.

⚠ Il ne faut pas confondre $f'(u(x))$ et $(f\circ u)'(x)$.

Dans le premier cas, c'est la fonction f que l'on dérive (et on calcule cette dérivée au point $a=u(x)$). Dans le deuxième cas, c'est la fonction $f\circ u$ que l'on dérive (au point x). Dans la première situation, $u(x)$ est considéré comme fixe : on ne considère par les variations de u par rapport à x.
Il ne faut **jamais écrire** $f(u(x))'$ par exemple. Car $f(u(x))$ est un nombre et non une fonction, et il ne peut donc pas être dérivé.

Preuve

(Placée ici pour les curieux qui ne l'auraient pas démontré en terminale).

$$\begin{aligned}\tau(x)&=\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{f(u(x+h))-f(u(x))}{h}\\&=\frac{f(y+H)-f(y)}{h}\quad\text{avec } y=u(x)\text{ et } y+H=u(x+h)\\&=\frac{f(y+H)-f(y)}{H}\times\frac{H}{h}=\frac{f(y+H)-f(y)}{H}\times\frac{y+H-y}{h}\\&=\frac{f(y+H)-f(y)}{H}\times\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\quad\text{car } y+H=u(x+h)\text{ et } y=u(x)\end{aligned}$$

Or quand h tend vers 0, alors $H=u(x+h)-u(x)$ tend aussi vers 0 par continuité de f, donc

$$\lim_{h\to0}\left(\frac{g(X+H)-g(X)}{H}\right)=\lim_{H\to0}\left(\frac{g(X+H)-g(X)}{H}\right)=g'(X)=g'(u(x))$$

Et $\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x)$. Donc par passage à la limite d'un produit

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\left(\frac{g(X+H)-g(X)}{H}\times\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right)=u'(x)g'(u(x))$$

■

Exemple

Calculer la dérivée de la fonction $g: x\mapsto(2x^2-3)^4$.
Solution :

Explications

Dans l'exemple précédent, pour contruire g, on commence par faire $x\mapsto 2x^2-3$, puis on met le tout à la puissance 4.
Le théorème énonce que la vitesse de variation des deux actions « enchaînées[2] » correspond au produit de leurs vitesses prises individuellement.
D'un point de vue imagé, on peut se figurer un mouvement d'engrenages, dont l'un tourne à la vitesse $u'(a)$ et l'autre f, démultiplie la vitesse par $f'(u(a))$.
La vitesse à l'arrivée correspond donc au produit des deux vitesses.

2. Cet enchaînement ne correspond pas à des actions qui se suivent dans le temps, mais plutôt à un emboîtement d'actions les unes dans les autres.

Exemple

Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 8x + 6}$ là où elle est définie.
Solution :

Théorème 3.7 *(Dérivée d'une fonction réciproque)*

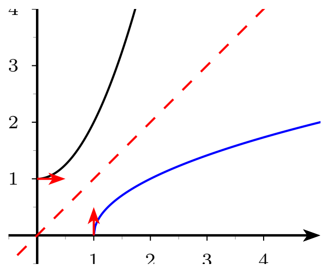
Si f est une bijection de I sur $J = f(I)$, dérivable en $a \in I$,
Alors f^{-1} est dérivable en $y \in J$ si et seulement si f' ne s'annule pas en $f^{-1}(y)$, et dans ce cas

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

On admet la dérivabilité pour le moment.
Pour se rappeler de la formule, il suffit de dériver $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ comme une fonction composée.

Explications

La courbe de la réciproque d'une application, correspond à la symétrique par rapport à la première bissectrice $y = x$. Cela revient à échanger les rôles de x et y.
Si $f'(x) = 0$, alors la tangente est horizontale. Lorsque l'on effectue la symétrie, cela donne une tangente verticale, c'est-à-dire une pente infinie. On comprend donc la condition $f'(x) \neq 0$.



C Dérivée et variations

Théorème 3.8

Soit f dérivable sur un **intervalle** I, alors

- f croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I.
- f décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I.
- f constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.

Exemple

Donner un contre-exemple dans le cas où I n'est pas un intervalle.
Solution :

Propriété 3.9

Si f est dérivable sur $]a, b[$,

- Si $f' > 0$ sur $]a, b[$ alors f est strictement croissante.
- Si $f' < 0$ sur $]a, b[$ alors f est strictement décroissante.

La réciproque est fausse.

Exemple

Donner un contre-exemple à la réciproque de la propriété précédente.
Solution :

Propriété 3.10 *(« Réciproque »)*

Soit f dérivable sur I, f est strictement croissante sur I, si et seulement si $f' > 0$ sur I sauf éventuellement en des points isolés où elle s'annule.

On a une propriété équivalente pour strictement décroissante.

Définition 3.11 *(Point critique)*

On appelle **point critique** de f un point $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) = 0$.

Exemple

0 est un point critique de $x \mapsto x^2$, de $x \mapsto x^3$...
$\frac{\pi}{2}$ est un point critique de $x \mapsto \sin x$.

Théorème 3.12 *(Extremum et point critique)*

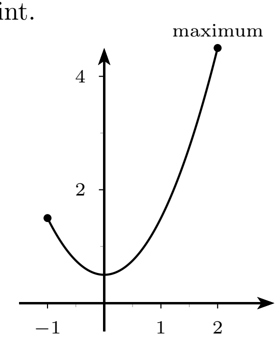
Soit f une fonction dérivable sur I, et $a \in I$ qui n'est pas une borne de I.
Si f admet un extremum *local* en a, **alors**, a est un point critique de f.

Preuve

(*idée de la preuve*) Si a correspond à un maximum ou minimum local de f, alors f est à la fois croissante et décroissante en a, donc $f'(a) \geq 0$ et $f'(a) \leq 0$.
Donc $f'(a) = 0$. ∎

⚠ Une lecture très rigoureuse du théorème est importante :

1. C'est une implication et en général, la réciproque est fausse.
   Par exemple $x \mapsto x^3$ admet un point critique en 0, mais 0 n'est pas un extremum local.
2. L'extremum **local** suffit. La dérivation est une notion locale qui ne donne d'information que dans le voisinage immédiat du point.
3. Dans le théorème, a est supposé ne pas être une borne de I, sinon, c'est faux.
   Par exemple pour la fonction
   $$x \mapsto x^2 + \frac{1}{2} \text{ sur } I = [-1, 2].$$
   -1 et 2 sont des points d'extremums locaux et pourtant la dérivée ne s'annule pas en ces points (voir la figure ci-contre).



D Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition 3.13 *(Dérivée k-ième)*

Soit f définie sur un intervalle I (contenant au moins deux points) et $a \in I$.
On définit les dérivées successives de f (sous réserve d'existence) par récurrence :
Initialisation : Par convention, on pose $f^{(0)} = f$.
Hérédité : Soit $k \in \mathbf{N}^*$,

- si f admet une dérivée $(k-1)$-ième sur un voisinage de a,
- et si la dérivée $(k-1)$-ième est dérivable en a,

alors f admet une dérivée k-ième en a, que l'on note $f^{(k)}(a)$.

Explications

Il faut que f soit dérivable $(k-1)$ fois sur **un voisinage** de a, c'est-à-dire sur un petit intervalle ouvert qui contient a (« un peu autour de a »). En effet, pour définir la dérivée k-ième, on utilise le taux d'accroissement de la dérivée $(k-1)$-ième. Cela suppose que cette dérivée ne soit pas seulement définie en a, mais sur un voisinage de a. La notion de dérivée est une notion qui « s'étale » un peu autour du point.

Définition 3.14

f est dérivable k fois sur I si f admet une dérivée k-ième en tout point de I.
On note $\mathcal{D}^k(I)$ ou $\mathcal{D}^k(I, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables k fois sur I.

Définition 3.15 *(Fonction de classe $\mathcal{C}^k$)*

Pour $k \in \mathbf{N}$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ en a,
si f admet une dérivée k-ième sur un voisinage de a et si $f^{(k)}$ est **continue** en a.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, si f est de classe $\mathcal{C}^k$ en tout point de I.
On note $\mathcal{C}^k(I)$ ou $\mathcal{C}^k(I, \mathbf{R})$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Remarque : Si $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbf{R})$, alors pour tout $p \leq k$, $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbf{R})$

Définition 3.16

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en $a \in I$, si $\forall k \in \mathbf{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ en a.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, si $\forall k \in \mathbf{N}$, $\quad f \in \mathcal{C}^k(I)$.
On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ ou $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{R})$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Exemple

Les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de dérivabilité.

4 Éléments remarquables pour tracer la courbe

A Tangentes

Propriété 4.1 *(Tangente à une courbe)*

La courbe de f admet une tangente en a si et seulement si f est dérivable en a.
Dans ce cas, l'équation de la tangente est
$$T \ : \ y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Explications

La tangente est une droite affine qui a la même pente que la courbe au point a : $f'(a)$.
Elle passe par le point $(a, f(a))$, d'où l'expression voulue.

Les tangentes remarquables doivent apparaître sur la représentation graphique de la courbe (sous forme de flèches).

Par exemple, il est souvent important d'indiquer les tangentes horizontales, la tangente en 0, ou lorsque la courbe croise l'axe des abscisses...

B Asymptotes

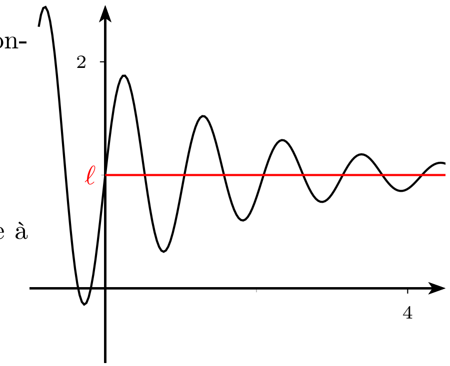
Définition 4.2 *(Asymptote horizontale à l'infini)*

La courbe de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$,
si f admet une limite finie en $+\infty$:

$$\exists \ell \in \mathbf{R}, \text{ tel que } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

La droite horizontale $y = \ell$ est l'asymptote à f en $+\infty$

On a la même définition en $-\infty$



Exemple

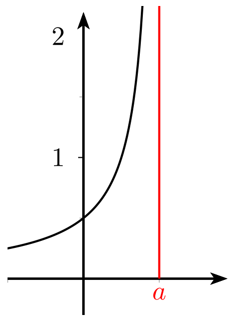
La droite $y = 0$ est asymptote à la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ à la fois en $+\infty$ et en $-\infty$.
La droite $y = 1$ est asymptote à courbe de $x \mapsto \frac{1}{x} + 1$ à la fois en $+\infty$ et en $-\infty$.
La courbe de la fonction $x \mapsto \sin x$ n'admet pas d'asymptotes horizontales.

Définition 4.3 *(Asymptote verticale en un point)*

La courbe de f admet une asymptote verticale en a,
si f admet une limite infinie en a :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

La droite verticale $x = a$ est l'asymptote à f en a



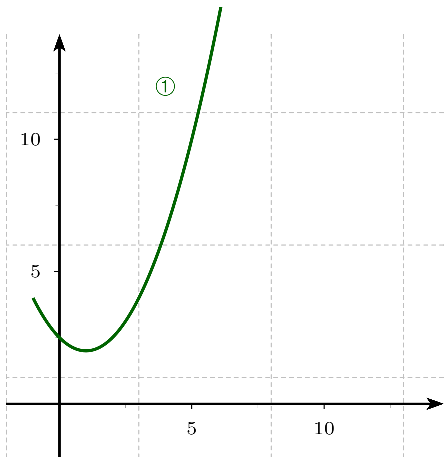
Exemple

La droite $x = 0$ est asymptote verticale à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ en 0.
La droite $x = 1$ est asymptote verticale à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ en 1.

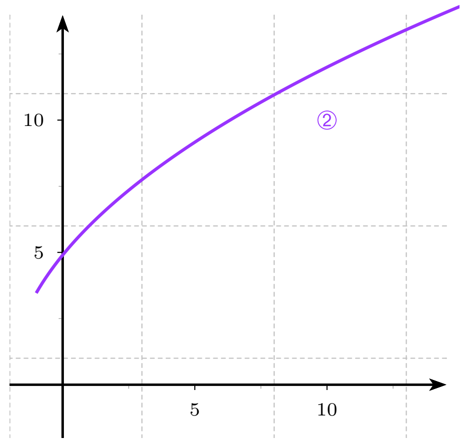
C Étude des branches infinies

L'étude des branches infinies permet d'aller plus loin que le seul calcul des limites et donne l'idée de la forme de la courbe. Nous n'allons énoncer les résultats que pour $x \to +\infty$. Cela se généralise aisément pour $x \to -\infty$.
Lorsque la limite est finie, nous avons déjà vu que nous avons une asymptote horizontale : c'est facile. Lorsque la limite est infinie, nous souhaiterions savoir de quelle façon $f(x)$ tend vers l'infini.

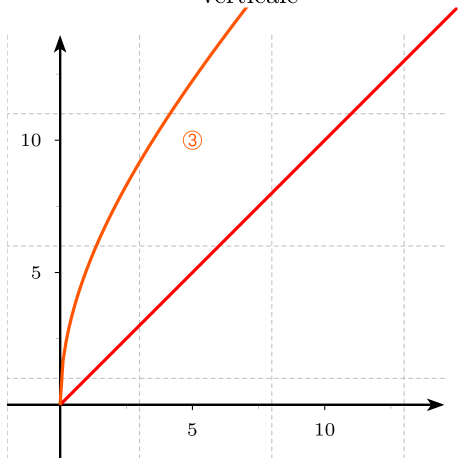
Voici un certain nombre de situations possibles. Ce ne sont pas les seules, mais celles que vous devrez savoir identifier.



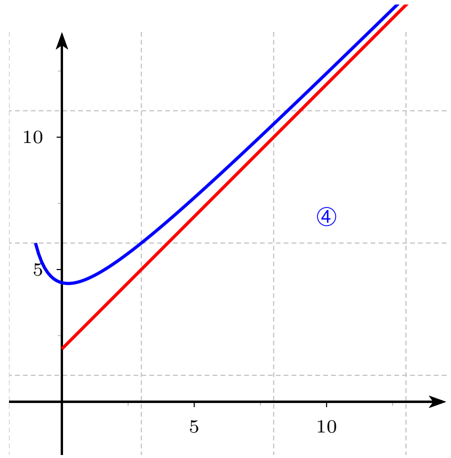
branche parabolique de direction verticale



branche parabolique de direction horizontale



branche parabolique de direction $y = ax$



asymptote oblique d'équation $y = ax + b$

- Le cas ① correspond à une courbe de type $x \mapsto x^2$, c'est-à-dire une parabole « tournée vers le haut ».
  On parle de *branche parabolique de direction Oy, ou verticale.*
- Le cas ② correspond à une courbe de type $x \mapsto \sqrt{x}$, c'est-à-dire une parabole « couchée ». On parle de *branche parabolique de direction Oy, ou verticale.*
- Le cas ③ correspond à une courbe du type (du type $x \mapsto \sqrt{x} + ax$), c'est-à-dire une parabole « inclinée ». On parle de *branche parabolique de direction $y = ax+b$.*
- Le cas ④ correspond à une courbe de type $x \mapsto ax + b$.
  On parle de *droite asymptote d'équation $y = ax + b$.*

Nature des branches en $+\infty$

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale $y = \ell$ au voisinage de $+\infty$.
- si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$,
  - ① si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
  - ② si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
  - si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}^*$,
    - ③ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $y = ax$.
    - ④ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b \in \mathbf{R}$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

On peut définir de même les branches en $-\infty$.

Exemple

Donner les natures des branches infinies de $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto x(2 + \mathrm{e}^{-x})$.

Solution :

Méthode *(Position par rapport à une asymptote)*

Lorsque la courbe admet une asymptote horizontale ou oblique, on peut déterminer la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote $y = ax + b$ en étudiant le signe de la différence.

Exemple

Étude de la branche en $+\infty$ de la courbe de

$$f : x \mapsto \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{x^2 - 4}$$

Solution :

Il faut bien distinguer une situation avec une asymptote, d'une situation avec branche parabolique.
Dans le cas d'une asymptote, horizontale, verticale ou oblique, la courbe s'approche infiniment de la droite asymptote. En revanche, pour une branche parabolique, la *direction* de la courbe tend à s'approcher de la direction asymptotique, mais la courbe s'éloigne inexorablement d'une quelconque droite ayant cette direction.
Par exemple, $x \mapsto \sqrt{x}$ a une pente qui se rapproche de plus en plus de l'horizontale : elle a donc une direction asymptotique horizontale. Par contre, elle s'éloignera infiniment de n'importe quelle droite d'équation $y = a$ (pour n'importe quel a, aussi grand soit-il).

5 Schéma d'étude d'une fonction

Méthode

Lorsque l'on étudie une fonction, on répond aux questions (dans l'ordre) :

1. **Domaine de définition** de la fonction, éventuellement domaine de continuité, dérivabilité...
2. **Domaine d'étude :**
   A priori, il faut étudier la fonction sur tout son domaine de définition, mais parfois, on peut réduire le domaine d'étude.
   - Si la fonction est T périodique, alors il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle (semi-ouvert) de longueur T, puis raisonner par translation.
   - Si la fonction est paire ou impaire, on peut diviser par deux le domaine d'étude puis raisonner par symétrie.
3. **Variations :**
   On étudie les variations de la fonction, on repère les éventuelles tangentes horizontales.
   On calcule les valeurs de f aux points remarquables.
4. **Limites et asymptotes :**
   On étudie les limites sur les points de discontinuité ou aux limites du domaine de définition.
   On repère les asymptotes verticales, horizontales ou obliques ou les directions asymptotiques.
5. **Tracer le graphe**
   Lorsque c'est possible, tracer le graphe de la fonction : on a besoin de visualiser.
   Placer les asymptotes, points et tangentes remarquables...

Exemple

Étudier l'application : $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+x-1}{x^2+x}$.

Solution :

Exemple

Étudier l'application : $f : x \mapsto \frac{1}{2}\cos 2x - \cos x$.

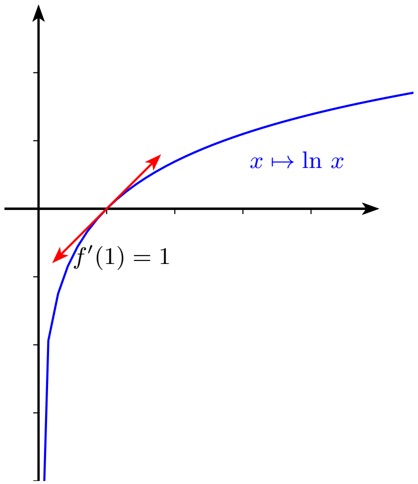
Solution :

6 Applications usuelles

A Logarithme

La fonction logarithme népérien est l'unique primitive sur $\mathbf{R}_+^*$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

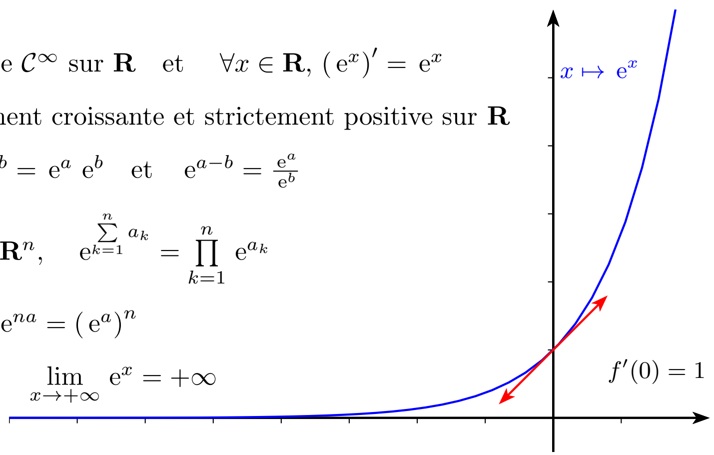
- $x \mapsto \ln x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$
- $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$
- $\forall (a,b) \in (\mathbf{R}_+^*)^2,\ \ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\forall (a,b) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^2,\ \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\forall (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^n$,
$$\ln\left(\prod_{k=1}^n a_k\right) = \sum_{k=1}^n \ln a_k$$
- $\forall a \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbf{Z} \quad \ln(a^n) = n \ln a$
- $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$



B Exponentielle

La fonction exponentielle est l'application réciproque du logarithme népérien.

- $\mathrm{e}^0 = 1$
- $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R},\ (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
- $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est strictement croissante et strictement positive sur $\mathbf{R}$
- $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2, \quad \mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\, \mathrm{e}^b$ et $\mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$
- $\forall (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^n a_k} = \prod_{k=1}^n \mathrm{e}^{a_k}$
- $\forall a \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{Z}, \quad \mathrm{e}^{na} = (\mathrm{e}^a)^n$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$



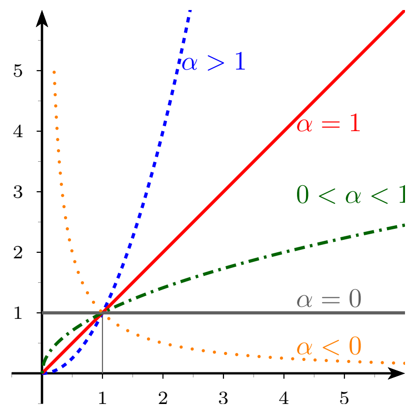
C Fonctions puissances

Les puissances entières ont déjà été vues dans les chapitre sur les sommes et produits. On s'intéresse ici à l'étude des courbes des puissances à exposant réel quelconque, (ce qui implique des restrictions sur le domaine de définition).
Pour $\alpha \in \mathbf{R}$, on définit la puissance d'exposant α par

$$p_\alpha : \begin{cases} \mathbf{R}_+^* & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \end{cases}$$

⚠ Les fonctions sont définies pour $x > 0$ sinon le logarithme n'a pas de sens.
Ne **jamais** écrire $\cancel{(-1)^x}$.

- La fonction puissance est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$,
- La fonction puissance est strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$,
- $\forall x > 0, \quad p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$,
- - si $\alpha > 0$, stricte croissance sur $\mathbf{R}_+^*$
  - si $\alpha < 0$, stricte décroissance sur $\mathbf{R}_+^*$
  - si $\alpha = 0$, constante égale à 1 sur $\mathbf{R}_+^*$
- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2, \quad \forall (a,b) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^2$,
$$(ab)^\alpha = a^\alpha\, b^\alpha \quad \text{et} \quad a^{\alpha+\beta} = a^\alpha\, a^\beta$$



Remarque :
Pour $\alpha > 0$, on peut prolonger la fonction en 0 par $p_\alpha(0) = 0$.
Pour $\alpha = 0$, on peut prolonger la fonction en 0 par $p_\alpha(0) = 1$.
Dans ces deux cas, la fonction prolongée est alors continue sur $\mathbf{R}_+$.

Pour se souvenir des formes des courbes :

- Pour $\alpha > 1$, prendre la fonction $x \mapsto x^2$ comme modèle,
- Pour $\alpha = 1$, c'est la fonction identité $x \mapsto x$,
- Pour $1 > \alpha > 0$, prendre la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ comme modèle,
- Pour $\alpha = 0$, c'est la fonction constante $x \mapsto 1$,
- Pour $\alpha < 0$, prendre la fonction $x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x}$ comme modèle.

D Exponentielle et logarithme en base a

Définition 6.1

Pour tout $a > 0$, on définit l'exponentielle de base a par $x \mapsto a^x$.

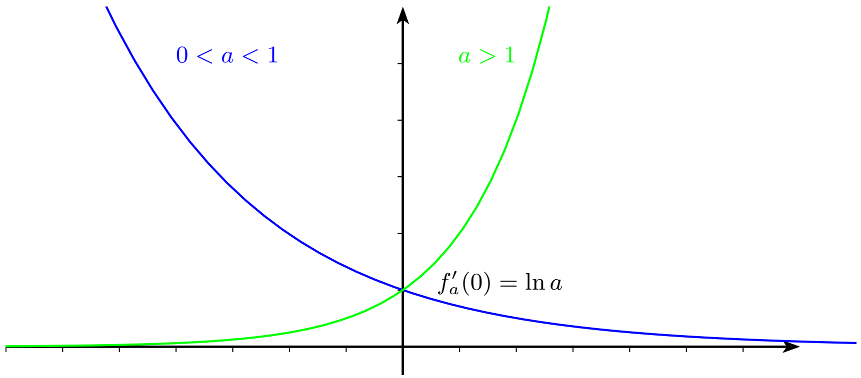
L'exponentielle vue plus haut, correspond à l'exponentielle en base e. On rappelle que $e \approx 2,71$, et que $e \notin \mathbf{Q}$.

Propriété 6.2

L'application $f_a : x \mapsto a^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad f_a'(x) = (\ln a)\, a^x$$

- si $a > 1$, $\quad x \mapsto a^x$ est strictement croissante et strictement positive sur $\mathbf{R}$
- si $0 < a < 1$, $\quad x \mapsto a^x$ est strictement décroissante et strictement positive sur $\mathbf{R}$



Définition 6.3

Si $a \neq 1$, le logarithme en base a est l'application réciproque de l'exponentielle en base a. Il est défini par

$$\forall x > 0, \quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Le logarithme népérien est le logarithme en base e.

Exemple

Logarithme en base 10 en physique, logarithme en base 2 en informatique...

E Croissances comparées

Propriété 6.4

- *la puissance l'emporte sur le logarithme*

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$$

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*, \quad \lim_{x \to 0^+} x^\beta \, |\ln x|^\alpha = 0$$

- *l'exponentielle l'emporte sur la puissance « fixe »*

$$\forall a > 1,\ \forall \alpha \in \mathbf{R}, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$$

$$\forall a > 1,\ \forall \alpha \in \mathbf{R}, \quad \lim_{x \to -\infty} a^x |x|^\alpha = 0$$

Preuve

Cette preuve peut être sautée en première lecture.

- Logarithme :
  ⋆ On va montrer la croissance comparée pour le logarithme en $+\infty$ avec $\alpha = 1$ et $\beta > 0$. Nous verrons que tous les autres cas en découlent directement. On suppose donc $\alpha = 1$ et $\beta > 0$.
  Si pour $x > 0$, on pose $f(x) = \ln x - x$. f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$.
  f' est négative sur $[1, +\infty[$, donc décroissante sur cet intervalle.
  Or $f(1) = -1 < 0$, donc $\forall x \geq 1$, $f'(x) < 0$.

$$\forall x \geq 1, \quad \ln x \leq x$$

  En particulier, si on choisit $\gamma \in]0; \beta[$, alors pour $x \geq 1$, on a $x^\gamma \geq 1$
  Donc la relation précédente reste vraie si on remplace x par x^γ et on obtient :

$$\text{pour } x \geq 1 \quad \gamma \ln x = \ln x^\gamma \leq x^\gamma \Rightarrow 0 \leq \frac{\gamma \ln x}{x^\beta} \leq x^\gamma \frac{1}{x^\beta}$$
$$\Rightarrow 0 \leq \frac{\ln x}{x^\beta} \leq \frac{1}{\gamma x^{\beta - \gamma}} \qquad (\text{car } \gamma > 0)$$

  Or $\beta - \gamma > 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\gamma x^{\beta-\gamma}} = 0$

  Donc par le théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\beta} = 0$.
  ⋆ On peut généraliser ce résultat pour $\alpha \in \mathbf{R}$ quelconque. En effet,
  - si $\alpha < 0$, alors pour $x \geq 1$, $\ln^\alpha(x) \leq \ln x$, et limite s'obtient par comparaison.
  - si $\alpha > 1$, alors on peut étudier $\dfrac{\ln x}{x^{\beta/\alpha}}$ avec $\beta/\alpha > 0$.
    Si la limite est nulle (ce qui est le cas), alors elle reste nulle, une fois mise à la puissance $\alpha > 1$.

  ⋆ Pour la limite en 0 on fait le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ et on en déduit la limite voulue.

- Exponentielle : C'est une conséquence directe du point précédent sur le logarithme.

$$\frac{x^\beta}{a^x} = e^{\beta \ln x - x \ln a} = e^{x\left(\beta \frac{\ln x}{x} - \ln a\right)}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \beta \frac{\ln x}{x} - \ln a = -\ln a$ (d'après le point précédent)
Donc par produit des limites, comme $a > 1$,

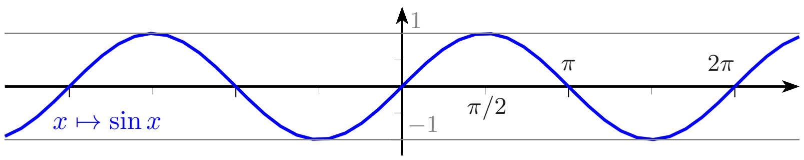
$$\lim_{x \to +\infty} x\left(\beta \frac{\ln x}{x} - \ln a\right) = -\infty$$

Donc par composition des limites, on a le résultat voulu. De même en $-\infty$.

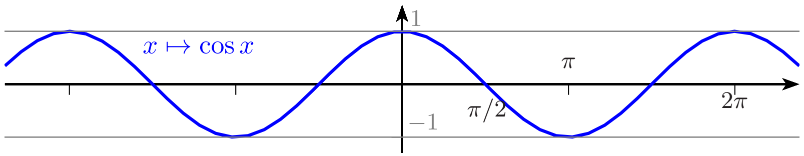
■

F Fonctions circulaires

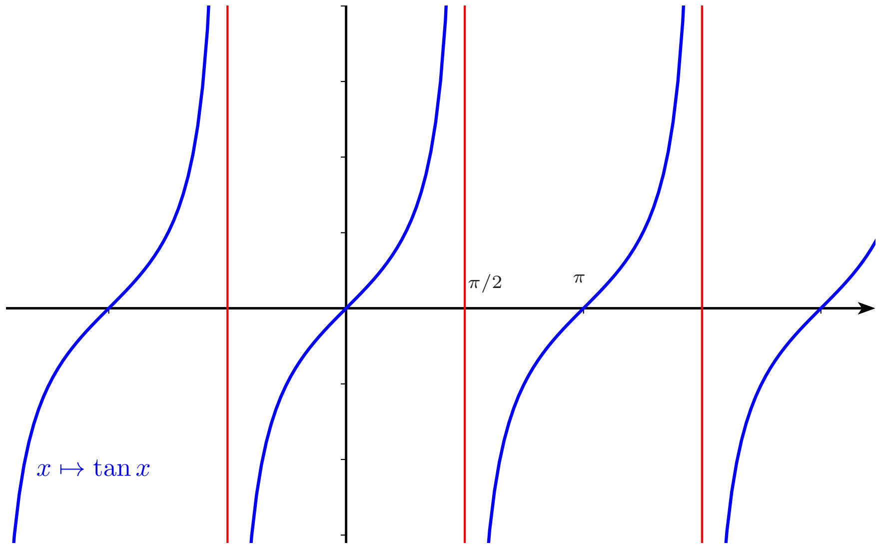
Voir le chapitre sur les complexes et la trigonométrie pour les principales propriétés.



Fonction sinus



Fonction cosinus

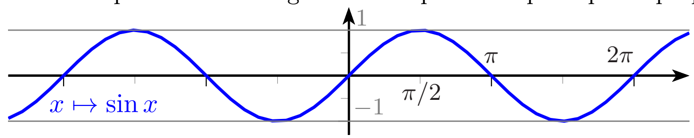


Fonction tangente

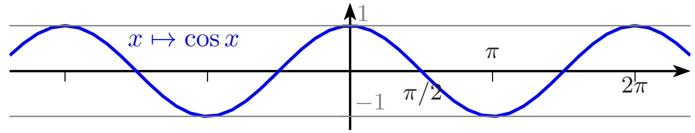
G Fonctions circulaires et circulaires réciproques

Voir le chapitre sur les complexes et la trigonométrie pour les principales propriétés.

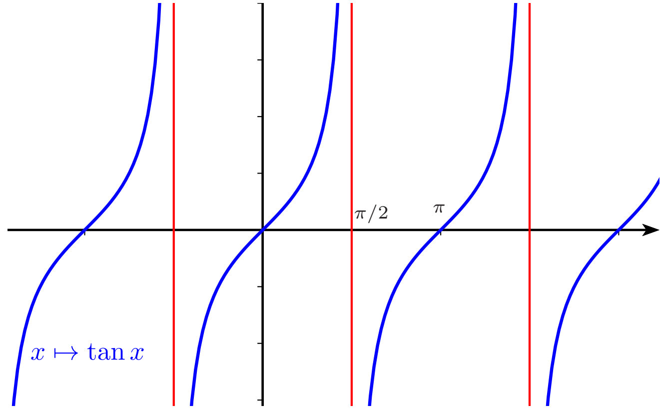
Fonction sinus :



Fonction cosinus :



Fonction tangente :



Fonction arctangente :