Géométrie

« Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre. »
Inscription au fronton de l'Académie de Platon

Comme demandé par le programme, ce chapitre se focalise sur quelques notions élémentaires de la géométrie du plan ou de l'espace. Il s'agit des espaces dans lesquels nous évoluons (l'espace à 3 dimensions) ou qui nous servent de support à la représentation (l'espace à 2 dimensions : tableau, feuille, écran...). Nous ne chercherons donc pas à faire preuve de grande dextérité, ni à développer des concepts théoriques compliqués.
Ce chapitre nous sert simplement de support pour des raisonnements géométriques en physique ou en géologie et doit faciliter la visualisation de notions mathématiques abstraites dans tous les chapitres d'algèbre linéaire (systèmes linéaires, matrices, espaces vectoriels, applications linéaires).

Remarque : N'attendez pas une grande rigueur dans les constructions des objets mathématiques de ce chapitre. Ce n'est pas le but et cela nous emmènerait trop loin.

Notations : Dans le chapitre, on désigne habituellement par $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormal, et par $\mathscr{E}$ l'espace de dimension 3 muni d'un repère orthonormal.

1 Vecteurs et produit scalaire

A Vecteurs

Définition 1.1 *(Vecteur et opérations)*

Dans le plan	**Dans l'espace**
Définition : Un vecteur de $\mathbf{R}^2$ est un couple $(x,y)\in\mathbf{R}^2$	Un vecteur de $\mathbf{R}^3$ est un triplet $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$.
Opérations sur les vecteurs : • Si $\overrightarrow{u}=(x,y)$ et $\overrightarrow{v}=(x',y')$, alors $$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=(x+x',y+y')$$ • Si $\overrightarrow{u}=(x,y)$ et $\lambda\in\mathbf{R}$, alors $$\lambda\overrightarrow{u}=(\lambda x,\lambda y)$$	• Si $\overrightarrow{u}=(x,y,z)$ et $\overrightarrow{v}=(x',y',z')$, alors $$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=(x+x',y+y',z+z')$$ • Si $\overrightarrow{u}=(x,y,z)$ et $\lambda\in\mathbf{R}$, alors $$\lambda\overrightarrow{u}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$$
Le vecteur opposé à $\overrightarrow{u}$ est $$-\overrightarrow{u}=(-x,-y)$$	Le vecteur opposé à $\overrightarrow{u}$ est . $$-\overrightarrow{u}=(-x,-y,-z)$$.

Les opérations se font simplement coordonnée par coordonnée : on ajoute les abscisses entre elles et les ordonnées entre elles.
On pourra généraliser facilement à $\mathbf{R}^n$ dans le cours sur les espaces vectoriels : pour $n\in\mathbf{N}^*$, un vecteur de $\mathbf{R}^n$ est un n-uplet $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$.

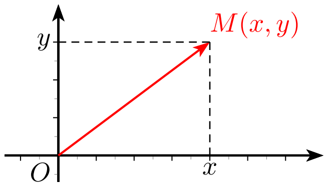
B Représentation euclidienne

Théorème 1.2

Dans le plan	Dans l'espace
• On munit le plan, ou l'espace, d'un repère	
$\mathscr{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ avec $\overrightarrow{i} = (1,0)$ et $\overrightarrow{j} = (0,1)$	$\mathscr{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ avec $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ et $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$
• Tout vecteur se décompose de façon unique en fonction des *vecteurs de base* :	
Si $\overrightarrow{u} = (x,y)$, alors $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$	Si $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$, alors $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$
• À chaque vecteur, on associe un unique point (et réciproquement) :	
$\begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathcal{P} \\ (x,y) & \mapsto M(x,y) \end{cases}$	$\begin{cases} \mathbf{R}^3 & \to \mathscr{E} \\ (x,y,z) & \mapsto M(x,y,z) \end{cases}$

Si M est un point du plan (ou de l'espace), on note $\overrightarrow{OM}$ le vecteur qui lui est associé.

$$\overrightarrow{OM} = (x,y)$$



Explications
On peut identifier chaque vecteur à un unique point du plan (et réciproquement). (x,y) sera tantôt interprété comme un vecteur ou comme un point selon les situations (à condition d'avoir précisé au préalable le repère dans lequel on travaille).

Approfondissement :

De façon plus précise, on établit une bijection entre les vecteurs de $\mathbf{R}^n$ et les points de l'espace correspondant.
Cette bijection dépend du choix du repère. Si on avait choisi un autre repère, par exemple $\overrightarrow{i} = (1,1)$ et $\overrightarrow{j} = (-1,1)$, alors on aurait décomposé les vecteurs différemment en fonction de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ et on aurait abouti à une représentation euclidienne différente. Ainsi, avec les deux vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ donnés ci-dessus, le vecteur (x,y) correspondrait au point $M\left(\frac{x+y}{2}, \frac{-x+y}{2}\right)$ car $(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{-x+y}{2}(-1,1) = \frac{x+y}{2}\overrightarrow{i} + \frac{-x+y}{2}\overrightarrow{j}$.
Cette question du choix des vecteurs de base dans le repère sera une question cruciale dans les chapitres sur les espaces vectoriels.

Définition 1.3

À tout couple de points (A,B), on associe un unique vecteur $\overrightarrow{AB}$:

Dans le plan	Dans l'espace
$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ avec $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$	$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ avec $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$

Lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux **représentants** d'un même vecteur.

Explications
Ces coordonnées correspondent à « la coordonnée du point d'arrivée *moins* la coordonnée du point de départ ». C'est comme si on prenait A comme origine du repère au lieu de O.
On remarque que cette définition est cohérente avec le théorème 1.2 : si on prend $A = O(0,0)$, alors on obtient $\overrightarrow{OB} = (x_B - 0, y_b - 0) = (x_b, y_b)$.

Théorème 1.4

Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ est associé à une unique *translation* $t_{\overrightarrow{u}}$:

Dans le plan	Dans l'espace
Pour $\overrightarrow{u} = (a,b)$, $t_{\overrightarrow{u}} : \begin{cases} \mathcal{P} & \to \mathcal{P} \\ A(x,y) & \mapsto A'(x+a, y+b) \end{cases}$	Pour $\overrightarrow{u} = (a,b,c)$, $t_{\overrightarrow{u}} : \begin{cases} \mathscr{E} & \to \mathscr{E} \\ A(x,y,z) & \mapsto A'(x+a, y+b, z+c) \end{cases}$

Réciproquement, à toute translation, on peut associer un unique vecteur.

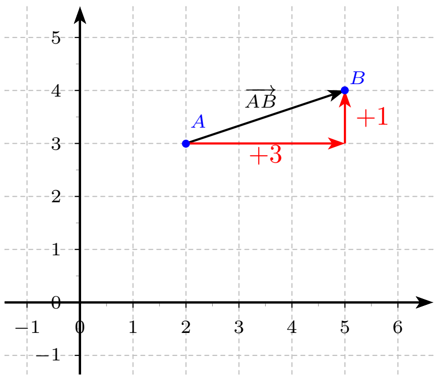
Explications
On peut interpréter la *flèche* du vecteur ainsi : elle translate du point de départ vers le point d'arrivée. Tous les couples de points correspondant à la même translation sont donc identifiés au même vecteur.
Ce théorème définit bijection entre l'ensemble des vecteurs, et l'ensemble des translations.

Exemple

Soient $A(2,3)$ et $B(5,4)$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_B) = (3;1)$

Ces coordonnées traduisent la transformation qui permet de passer du point A au point B.
En effet, si on ajoute ces coordonnées à celles de A, on obtient le point B.

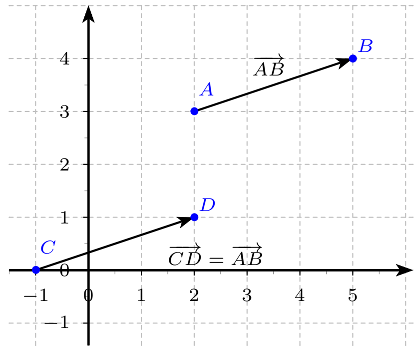
$$x_A + (x_B - x_A) = x_A + x_B - x_A = x_B$$
$$y_A + (y_B - y_A) = y_A + y_B - y_A = y_B$$



Si $C = (-1,0)$, quelles doivent être les coordonnées de $D(x_D, y_D)$ pour que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

Solution :
Il suffit d'ajouter les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ aux coordonnées de C :

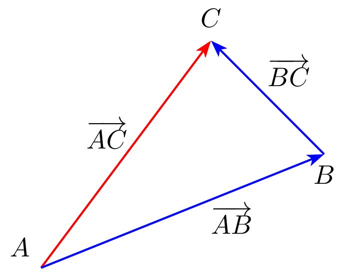
$$x_D = x_C + x_{\overrightarrow{AB}} = -1 + 3 = 2$$
$$y_D = y_C + y_{\overrightarrow{AB}} = 0 + 1 = 1$$



Théorème 1.5 *(Relation de Chasles)*

Si A, B et C sont trois points quelconques, alors

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



En allant de A à C, je peux passer par B et y faire une petite pause... **Preuve**

C'est immédiat avec les coordonnées.
Par exemple, si on travaille dans le plan, alors on peut noter $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$.
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (x_B - x_A, y_B - y_A) + (x_C - x_B, y_C - y_B) = (x_B - x_A + x_C - x_B, y_B - y_A + y_C - y_B) = (x_C - x_A, y_C - y_A) = \overrightarrow{AC}$ ■

C Produit scalaire et orthogonalité

En géométrie, on parle de longueurs, de droites parallèles et perpendiculaires, d'angles... Tout cela demande à être défini.
La notion maîtresse est alors celle de produit scalaire.

Définition 1.6 *(Produit scalaire)*

Dans le plan	Dans l'espace
Soient $\overrightarrow{u} = (x, y)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^2$. On définit le **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$$	Soient $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$. On définit le **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

Remarque : Le produit scalaire est à valeurs dans $\mathbf{R}$, c'est un réel et non un vecteur. On pourrait définir d'autres produits scalaires avec des formules différentes (sous réserve de respecter les propriétés qui suivent), il en découlerait des géométries différentes : les angles droit pour un produit scalaire ne le sont pas nécessairement pour un autre. Mais cela nous emmènerait trop loin...

Propriété 1.7

Le produit scalaire est

- symétrique : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
- linéaire : $(\overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{u'}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \lambda \overrightarrow{u'} \cdot \overrightarrow{v}$
- défini positif : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

pour $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v}$ trois vecteurs quelconques et $\lambda \in \mathbf{R}$.

La linéarité indique en particulier que l'on peut réaliser des développements comme entre le produit et l'addition dans $\mathbf{R}$.

Preuve

- immédiat
- immédiat par distributivité du produit dans $\mathbf{R}$
- la positivité est immédiate.
  Pour le cas d'égalité : $x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$. En effet, si l'une (au moins) des coordonnées n'était pas nulle, alors, son carré serait strictement positif et on lui ajouterait d'autres termes positifs (carrés), ainsi le produit scalaire ne serait pas nul non plus.

■

Définition 1.8 *(Orthogonalité)*

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dit **orthogonaux** si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Exemple

Montrer que le seul vecteur qui soit orthogonal à tous les vecteurs est le vecteur nul.

Solution :

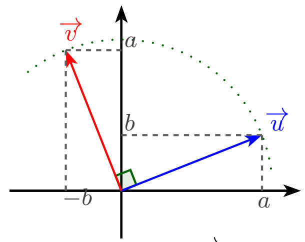
- **Analyse :** soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur orthogonal à tous les vecteurs. En particulier, il est orthogonal à lui-même.

  ☞ **Méthode :** si c'est vrai pour tous, alors on peut **particulariser**.

  Ainsi $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0$, or le produit scalaire est *défini positif*, donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- **Synthèse :** pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$, on a $\overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, donc $\overrightarrow{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

Méthode *(Trouver un vecteur orthogonal dans le plan)*

Soit $\overrightarrow{u} = (a, b)$ un vecteur du plan.
Le vecteur $\overrightarrow{v} = (-b, a)$ lui est orthogonal



Remarque : Tous les vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires à $\overrightarrow{v}$.

Méthode *(Trouver des vecteurs orthogonaux dans l'espace)*

Soit $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ un vecteur de l'espace.
Les vecteurs $\overrightarrow{v} = (-b, a, 0)$ et $\overrightarrow{v'} = (0, -c, b)$ et $\overrightarrow{v''} = (-c, 0, a)$ lui sont orthogonaux.

Preuve

Il suffit de faire le calcul. ■

On remarque que dans l'espace à trois dimensions, si $\overrightarrow{u}$ n'est pas nul, alors les vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{u}$ forment un plan que l'on note $\overrightarrow{u}^{\perp}$.
Ainsi, les trois vecteurs $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v'}$ et $\overrightarrow{v''}$ sont coplanaires : on peut en prendre 2 non colinéaires pour définir un repère de ce plan $\overrightarrow{u}^{\perp}$ et le troisième vecteur s'écrit alors en fonction des deux autres.
Par exemple, lorsque $b \neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ ne sont pas colinéaires et peuvent donc former un repère du plan $\overrightarrow{u}^{\perp}$. $\overrightarrow{v''}$ peut se décomposer suivant $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$:

$$\overrightarrow{v''} = \frac{c}{b} \cdot \overrightarrow{v} + \frac{a}{b} \cdot \overrightarrow{v'}$$

(si $b = 0$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont colinéaires et ne forment donc pas une base du plan $\overrightarrow{u}^{\perp}$. Mais on peut alors prendre $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v''}$ ou $\overrightarrow{v'}$ et $\overrightarrow{v''}$, selon les valeurs de a et c, comme repère

du plan.)
Conclusion : si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, alors tous les vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{u}$ peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de ces trois là.

D Norme et distance

Définition 1.9 *(Norme d'un vecteur)*

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, la **norme** ou la **longueur** de $\overrightarrow{u}$ est définie par

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}$$

Un vecteur de norme 1 est dit **unitaire**.

Pour deux points A et B, on définit la distance entre A et B, ou la longueur du segment $[AB]$ par $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Remarque : Cette définition a un sens en raison de la positivité du produit scalaire : la racine carrée existe bien.
On remarque également qu'une norme est une grandeur positive (heureusement pour parler de longueur !) et que seul le vecteur nul est de norme nulle (grâce au caractère *défini* du produit scalaire).

Propriété 1.10 *(Expression de la norme en fonction des coordonnées)*

Dans le plan	Dans l'espace
Si $\overrightarrow{u} = (x, y)$, alors $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$	Si $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$, alors $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Exemple
Dans le plan, la distance entre $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ est donnée par

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Cette formule peut être interprétée comme l'application du théorème de Pythagore dans un repère orthonormé, mais en toute rigueur, on définit *d'abord* la norme avant de pouvoir parler de repère orthonormé et de Pythagore. En effet, pour qu'un repère soit orthonormé, il faut déjà être capable de définir un angle droit et de mesurer une longueur 1 sur un axe : la définition de la longueur est donc un préalable au théorème.

Propriété 1.11

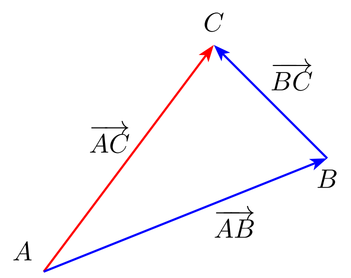
- La norme est toujours positive : pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, $\|\overrightarrow{u}\| \geqslant 0$.
- Le vecteur nul est le seul vecteur de norme nulle : $\|\overrightarrow{u}\| = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- La norme est *homogène :* pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\|\lambda\overrightarrow{u}\| = |\lambda|\,\|\overrightarrow{u}\|$. (*ne pas oublier la valeur absolue*)
- La norme vérifie l'inégalité triangulaire : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$.

On remarque que ce sont exactement les propriétés du module vues sur $\mathbf{C}$: le module correspond d'ailleurs à la norme sur $\mathbf{R}^2$.

Explications
L'inégalité *triangulaire* porte ce nom, car elle stipule que pour aller d'un point A à un point C suivre le segment AC que de passer par un troisième point B.
(cependant, on aurait égalité des distances si $B \in [AC]$)

Si on note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$, alors l'inégalité triangulaire donne bien

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right\| \leqslant \left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|$$



Preuve
Nous faisons la preuve pour un vecteur du plan (à deux coordonnées). C'est la même preuve pour un vecteur de l'espace $\mathscr{E}$.

- $x^2 + y^2 \geqslant 0$, donc par passage à la racine carrée, $\|\overrightarrow{u}\| \geqslant 0$.
- $\|\overrightarrow{u}\| = \overrightarrow{0} \iff \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \iff x^2 + y^2 = 0 \overset{*}{\iff} x = y = 0 \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
  $*$: une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chacun des termes est nulle. En effet, si l'un n'était pas nul, comme on ne lui ajoute que des termes positifs, alors la somme ne pourrait pas être nulle. C'est un argument à retenir.

- $\sqrt{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2}=\sqrt{\lambda^2\left(x^2+y^2\right)}=|\lambda|\sqrt{x^2+y^2}$
- Les deux termes étant positifs, les comparer revient à comparer leur carré :

$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2&=\sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2}^2\\&=(x+x')^2+(y+y')^2\\&=x^2+y^2+x'^2+y'^2+2\left(xx'+yy'\right)\\&=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\left(xx'+yy'\right)\end{aligned}$$

et

$$(\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|)^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$$

En comparant ces deux expressions, on remarque que démontrer l'inégalité triangulaire revient à montrer que $xx'+yy'\leqslant\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$.
C'est ce que l'on appelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz (que vous verrez dans un autre cadre l'an prochain).
Pour éviter la racine, étudions le carré :

$$\begin{aligned}(\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|)^2&=\left(x^2+y^2\right)\left(x'^2+y'^2\right)\\&=(xx')^2+(yy')^2+(xy')^2+(x'y)^2\\&=(xx')^2+(yy')^2+(xy')^2+(x'y)^2\\&=(xx'+yy')^2-2\left(xx'yy'\right)+(xy'-x'y)^2+2\left(xx'y'\right)\\&\qquad\text{(l'idée est de faire apparaître des carrés tout en annulant les doubles produits)}\\&=(xx'+yy')^2+(xy'-x'y)^2\\&\geqslant(xx'+yy')^2\end{aligned}$$

Donc par passage à la racine carrée :

$$\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\geqslant\left|xx'+yy'\right|\geqslant xx'+yy'$$

Ce qui achève la preuve. ■

Exemple

A et B sont confondus, si et seulement si $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=0$.

E Repère orthonormal

Définition 1.12 *(Repère orthonormal)*

Un repère est orthonormal si les vecteurs qui le composent sont unitaires (de norme 1), et deux à deux orthogonaux.

Propriété 1.13

Si on note $\vec{i}=(1,0)$ et $\vec{j}=(0,1)$, alors le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est **orthonormal** $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$ $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1$	Si on note $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$ et $\vec{k}=(0,0,1)$, alors le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est **orthonormal** $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$ $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=\left\|\vec{k}\right\|=1$

Preuve

Les calculs sont immédiats avec les formules du produit scalaire et de la norme en fonction des coordonnées. ■

De cette façon, le repère « naturel » que nous avions utilisé pour associer chaque vecteur à un point au théorème 1.2 devient orthonormal !
Ceci permet de retrouver, a posteriori, la formule du produit scalaire qui avait été donnée dans la définition 1.6 :

si $\vec{u}=(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}$, et $\vec{v}=(x',y')=x'\vec{i}+y'\vec{j}$, alors

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\cdot\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right)\\&=xx'\vec{i}\cdot\vec{i}+yy'\vec{j}\cdot\vec{j}+(xy'+yx')\vec{i}\cdot\vec{j}\quad\text{(par linéarité et symétrie)}\\&=xx'\left\|\vec{i}\right\|^2+yy'\left\|\vec{j}\right\|^2\\&=xx'+yy'\end{aligned}$$

Ce calcul est valable pour tout repère orthonormé. Il en découle la propriété suivante :

Propriété 1.14

L'expression du produit scalaire et de la norme est la même dans tout repère orthonormé.

L'intérêt de cette propriété apparaît clairement en physique où il faut choisir le repère le mieux adapté au problème. Si on change de repère, dès lors que le nouveau repère est encore orthonormé, alors l'expression de la norme et du produit scalaire restent identiques : on n'a pas besoin de changer de formule.

Exemple *(Théorème de Pythagore)*

Montrer que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}\qquad\text{(identité de polarisation)}$$

En déduire le théorème de Pythagore.

Solution :

La première relation s'obtient directement avec la propriété 1.9. Nous l'avions déjà rencontré dans la preuve de l'inégalité triangulaire 1.11.

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}+2\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

Soit ABC un triangle, montrons que $AB^2+AC^2 = BC^2$ si et seulement si $(AB)\perp(AC)$. D'un point de vue vectoriel, l'égalité s'écrit :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right\|^2$$

Or $\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right\|^2 = \|BA\|^2+\|AC\|^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = \|AB\|^2+\|AC\|^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$.

L'égalité est donc vérifiée si et seulement si $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, c'est-à-dire pour $(AB)\perp(AC)$.

2 Figures géométriques

A Cercles du plan

Définition 2.1 *(Cercle du plan)*

Soit $\Omega\in\mathcal{P}$ et $R>0$.
Le cercle de centre Ω et de rayon R est constitué de l'ensemble des points M situés à une distance R de Ω.

$$\mathscr{C}(\Omega,R) = \{M\in\mathcal{P},\ \text{tel que } \Omega M = R\}$$

Propriété 2.2 *(Équation implicite d'un cercle)*

Si $\Omega(x_0,y_0)\in\mathcal{P}$, alors

$$M(x,y)\in\mathscr{C}(\Omega,R) \iff (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$$

c'est-à-dire

$$\mathscr{C}(\Omega,R) = \left\{M(x,y)\in\mathcal{P},\ \text{tel que } (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2\right\}$$

Réciproquement, toute équation de type

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

décrit un cercle si $a^2+b^2\geqslant 4c$ (sinon l'ensemble est vide).

Preuve

$\Omega M = R \iff \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\| = R \iff \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2 = R^2$ car la norme est positive. Donc,

$$\Omega M = R \iff (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2 \iff x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-R^2 = 0$$

Pour l'écrire sous la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$, on pose alors $a=-2x_0,\ b=-2y_0$ et $c = x_0^2+y_0^2-R^2 = \frac{a^2+b^2-4R^2}{4}$.
Le cercle existe si et seulement si $R^2\geqslant 0$, c'est-à-dire pour $a^2+b^2\geqslant 4c$. ■

Dans l'équation de cercle, il ne faut pas avoir de coefficient multiplicatif devant de x^2 et le y^2 (ou bien le même pour que l'on puisse se ramener à 1 en divisant). De même, on n'a pas de termes en xy.
Les équations du type $\alpha x^2+\beta y^2+ax+by+c=0$ correspondent aux ellipses (si α et β sont de même signe) qui ne sont pas au programme. Cela revient à dilater le cercle suivant une direction.

Remarque : Si on considère le plan complexe $\mathbf{C}$ au lieu de $\mathbf{R}^2$, l'équation du cercle s'écrit alors très simplement à partir de l'exponentielle complexe : $z - z_0 = R\,\mathrm{e}^{i\theta}$:

$$\mathscr{C}(\Omega,R) = \left\{z_0+R\,\mathrm{e}^{i\theta},\quad \theta\in]-\pi,\pi]\right\}$$

Cette formulation a l'avantage d'être explicite : en faisant varier θ, on obtient directement les points du cercle. On dit qu'il s'agit d'une *équation paramétrique* car x et y dépendent d'un paramètre θ.
Au contraire, l'équation implicite de la propriété 2.2 nous laisse devant à une équation à deux inconnues (x,y) qu'il faut résoudre.

Propriété 2.3 *(Représentation paramétrique d'un cercle)*

Si $\Omega(x_0,y_0)\in\mathcal{P}$, alors

$$\mathscr{C}(\Omega,R) = \{M(x_0+R\cos\theta\,,\ y_0+R\sin\theta),\quad \theta\in]-\pi,\pi]\}$$

Preuve

C'est le cercle trigonométrique dilaté de R puis translaté de $\overrightarrow{O\Omega}$. ■

Méthode *(équation cartésienne → équation paramétrique)*

On utilise les formes canoniques pour x et y, puis on rassemble les constantes.
Cela donne le centre et le rayon

Exemple

Donner la forme paramétrique du cercle d'équation

$$(\mathscr{C})\ :\ 2x^2+2y^2+4x-12y=8$$

Solution :

On cherche le centre Ω et le rayon. Pour cela on met l'équation sous forme canonique.

$$\begin{aligned} 2x^2+2y^2+4x-12y=8 &\iff x^2+y^2+2x-6y=4 \\ &\iff (x+1)^2-1+(y-3)^2-9=4 \\ &\iff (x+1)^2+(y-3)^2=14 \end{aligned}$$

Le centre du cercle est $\Omega\,(-1,3)$ et le rayon est $\sqrt{14}$.

Un paramétrage du cercle est donc

$$\begin{cases} x &= -1+\sqrt{14}\cos\theta \\ y &= 3+\sqrt{14}\sin\theta \end{cases} \qquad \text{pour } \theta \in]-\pi,\pi]$$

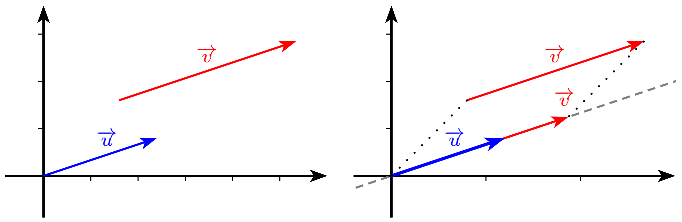
B Droites dans le plan et l'espace

Définition 2.4 *(Colinéarité)*

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** s'ils sont proportionnels,
c'est-à-dire, s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$

Explications

Les deux vecteurs placés à l'origine sont sur la même ligne, ou leur représentants sont parallèles.



Exemple

Si $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, alors les vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{u}$ sont exactement tous les vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{v}$. Nous verrons plus loin que c'est une façon de décrire une droite (propriété 2.8).

Définition 2.5 *(Droites du plan ou de l'espace)*

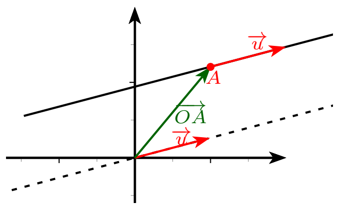
Une droite (d) est définie à partir d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A par lequel elle passe.

La droite est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{u}$ avec $t \in \mathbf{R}$.

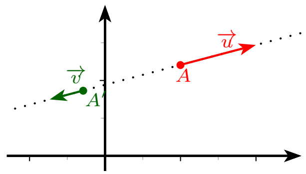
On note souvent (AB) : la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ passant par A.

Explications

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ donne la direction de la droite et le point A sert à la translater par rapport à l'origine.



On voit que l'écriture n'est pas unique : on peut prendre différents vecteurs, et différents points pour décrire une même droite. En effet, on peut remplacer A par n'importe quel autre point de la droite. Et $\overrightarrow{u}$ peut être remplacé par tout vecteur non nul qui lui est colinéaire (qui donne la même direction).



Définition 2.6 *(Segments du plan ou de l'espace)*

Pour deux points (A,B) du plan ou de l'espace.
Le segment $[AB]$ est défini par l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$ avec $t \in [0,1]$.

Explications

Ce sont l'ensemble des points situés entre A et B.
Intuitivement : on écrit un point M du segment comme le point A auquel on rajoute une portion de $\overrightarrow{AB}$:

Propriété 2.7 *(Représentation paramétrique d'une droite du plan)*

Une droite (d) de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (\alpha,\beta)$ et passant par le point $A(x_A, y_A)$ a pour équation :

$$(d)\ \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases} \qquad \text{pour } t \in \mathbf{R}$$

Si on restreint t au segment $[0,1]$, alors on obtient uniquement le segment $[A, t_{\overrightarrow{u}}(A)]$
.

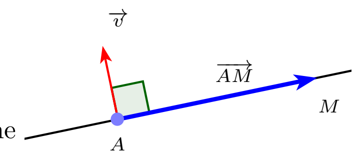
Remarque : Cette représentation n'est pas unique.

Propriété 2.8 *(Représentation cartésienne d'une droite du plan)*

Une droite (d) du plan est parfaitement décrite par un point $A(x_A, y_A)$ par lequel elle passe et un vecteur orthogonal $\overrightarrow{v} = (a,b)$.
L'équation de cette droite est

$$a(x-x_A) + b(y-y_A) = 0$$

Réciproquement, toute équation du plan de la forme $ax+by+c=0$ désigne une droite.



Remarque : On remarque que les expressions $-x_A$ et $-y_A$ correspondent à un changement d'origine du repère : au lieu de passer par $O(0,0)$, la droite passe par $A(x_A, y_A)$. La représentation cartésienne de la droit correspond à son équation implicite. On utilisera indifféremment les deux formulations.

Preuve

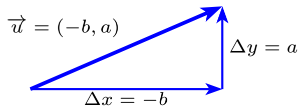
Ce sont simplement l'ensemble des points M tels que $(AM) \perp \overrightarrow{v}$,
c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{v} = 0$. ■

Propriété 2.9 *(Pente de la droite)*

Si $b = 0$ la droite est verticale,
Sinon, la pente de la droite est donnée par $-\frac{a}{b}$.
C'est la pente du vecteur directeur $\vec{u} = (-b, a)$.

Preuve
Le vecteur directeur $\vec{u} = (-b, a)$ donne la pente :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a}{-b}$$



■

Les trois exemples qui suivent sont absolument à savoir refaire. Il s'agit de passer d'un type de représentation à un autre.

Exemple *(implicite → paramétrique)*
Soit l'équation d'une droite dans le plan : (d) : $5x + 3y = 4$

1. Trouver un vecteur orthogonal à la droite (d) et un point par lequel passe (d).
2. En déduire une équation paramétrique de (d).

Solution :

1. *Vecteur normal :* $(5, 3)$
Point sur la droite : si on prend $x = 0$, alors $y = \frac{4}{3}$.
Donc la droite passe par le point $A\left(0, \frac{4}{3}\right)$.
2. Un vecteur directeur est orthogonal au vecteur normal.
Donc $(-3, 5)$ est un vecteur directeur de la droite.
Une équation paramétrique de (d) est alors

$$(d) : \begin{cases} x = -3t \\ y = \frac{4}{3} + 5t \end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}$$

Remarque méthodologique : On peut aussi trouver plus rapidement une équation paramétrique, en remplaçant une des variables par le paramètre. Par exemple, si on pose $x = t$, alors en remplaçant dans la deuxième équation, on trouve $y = \frac{4}{3} - \frac{5}{3}t$ et l'équation de la droite est

$$(d) : \begin{cases} x &= t \\ y &= \frac{4}{3} - \frac{5}{3}t \end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}$$

Les deux équations de droite sont équivalentes à un changement de paramètre t près (si on remplace t par $-3t$, cela ne change pas la droite : le changement est bijectif. Intuitivement, l'utilisation de $x = -3t$ au lieu de $x = t$ nous fait simplement parcourir la droite « trois fois plus vite » et dans l'autre sens.
En effet, dans le premier cas, lorsque t est incrémenté de 1, x est incrémenté de -3, alors que dans le second cas, il est seulement incrémenté de 1.)

Exemple *(paramétrique → implicite)*
Soit l'équation paramétrique d'une droite dans le plan :

$$(d) : \begin{cases} x &= 7t + 5 \\ y &= -t + 1 \end{cases}$$

1. Trouver un vecteur directeur à la droite (d) et un point par lequel passe (d).
2. En déduire une équation cartésienne de (d).

Solution :

1. Un vecteur directeur de (d) est $(7, -1)$.
Pour $t = 0$, la droite passe par le point $(5, 1)$.
2. Un vecteur normal à (d) est donc $(1, 7)$.
On en déduit une équation cartésienne de (d) : $x + 7y + c = 0$
Pour trouver c, on remplace x par 5 et y par 1 et on trouve : $5 + 7 + c = 0$, donc $c = -12$.

$$(d) : \quad x + 7y - 12 = 0$$

Remarque méthodologique : On peut aussi supprimer t des deux équations pour obtenir l'équation cartésienne. Par exemple, ici, $t = 1 - y$, que l'on remplace dans la première équation et on retrouve : $x = 7(1 - y) + 5$ c'est-à-dire $x + 7y - 12 = 0$

Exemple *(« géométrique » → implicite)*
Donner une équation cartésienne de la droite passant par $A(2, 0)$ et $B(-4, 3)$.
Solution :
La droite passe par $A(2, 0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB} = (-4, 3) - (2, 0) = (-6, 3)$.
On peut lui substituer un vecteur colinéaire plus simple (en divisant par 3) : $(-2, 1)$
Un vecteur normal est donc $(1, 2)$. Une équation cartésienne est du type :

$$(d) : \quad x + 2y + c = 0$$

On sait que la droite passe par A et on peut remplacer x par 2 et y par 0. On obtient ainsi $c = -2$ pour que l'équation soit vérifiée.
La droite a donc pour équation cartésienne

$$(d) : \quad x + 2y - 2 = 0$$

Remarque méthodologique : On peut aussi obtenir la constante en raisonnant par translation par rapport à l'origine :

$$(d) : \quad (x - 2) + 2(y - 0) = 0$$

Propriété 2.10 *(Représentation paramétrique d'une droite de l'espace)*

Une droite (d) de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et passant par le point $A\,(x_A, y_A, z_A)$ a pour équation :

$$(d)\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases} \qquad \text{pour } t \in \mathbf{R}$$

Si on restreint t au segment $[0, 1]$, alors on obtient uniquement le segment $[A, t_{\overrightarrow{u}}(A)]$

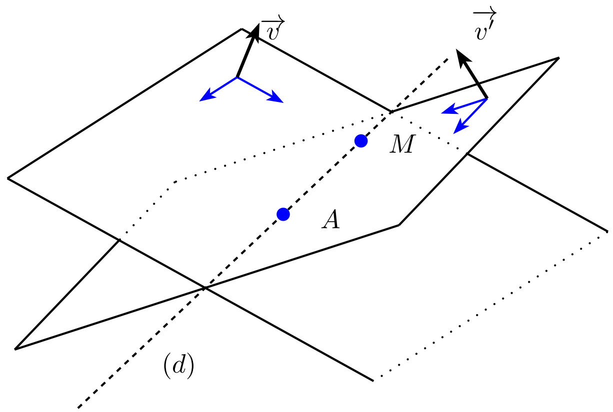
Propriété 2.11 *(Représentation cartésienne d'une droite de l'espace)*

L'équation d'une droite de l'espace est donnée par deux vecteurs non colinéaires qui lui sont orthogonaux.

$$\begin{cases} a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) &= 0 \\ a'(x - x_A) + b'(y - y_A) + c'(z - z_A) &= 0 \end{cases}$$

Explications

Cette explication prend un peu d'avance sur le cours, puisqu'elle utilise la description des plans. Mais si vous avez suivi jusque là, alors vous allez voir que c'est simple.
On peut décrire une droite par l'intersection de deux plans non confondus ni parallèles (les plans ne sont ni confondus, ni parallèles, si leurs vecteurs orthogonaux respectifs ne sont pas colinéaires).



On note $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ un vecteur normal (non nul) au premier plan et $\overrightarrow{v'} = (a', b', c')$ un vecteur normal (non nul) au second.
On suppose que l'on connaît un point A qui appartient à la droite.
Alors M appartient à la droite si et seulement si $[AM]$ est inclus dans les deux plans : $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{v'}$. En écrivant la nullité des deux produits scalaires, on retrouve l'équation de la droite :

$$\begin{cases} a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) + c\,(z - z_A) &= 0 \\ a'(x - x_A) + b'(y - y_A) + c'(z - z_A) &= 0 \end{cases}$$

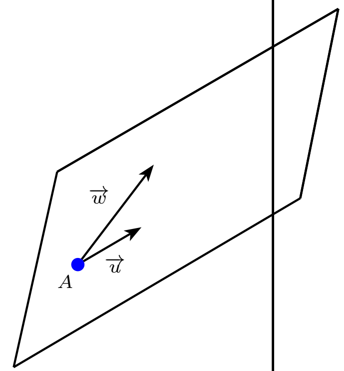
Ainsi, les points appartiennent à la droite si et seulement s'ils appartiennent aux deux plans à la fois : c'est-à-dire s'ils sont orthogonaux à ces deux vecteurs.

C Plans dans l'espace

Définition 2.12 *(Plans dans l'espace)*

Un plan $\mathcal{P}$ de l'espace $\mathscr{E}$ est défini à partir de deux vecteurs $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $\overrightarrow{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$ non colinéaires qui donnent sa direction et d'un point $A(x_0, y_0, z_0)$ qu'il contient.

Le plan est l'ensemble des points $M \in \mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{u} + t'\overrightarrow{v}$ avec $(t, t') \in \mathbf{R}^2$.



Remarque : Le choix de A et du vecteur $\overrightarrow{u}$ n'est pas unique. On peut remplacer A par n'importe quel autre point de la droite, et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par deux autres vecteurs non colinéaires du plans.

Explications

A et les extrémités des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment trois points non alignés de l'espace : on retrouve la définition « classique » d'un plan défini par trois points non alignés.
$\mathscr{R}'$: $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ définit alors un repère (en général non orthonormé) pour le plan. Chaque point du plan est décrit de manière unique par la valeur des deux paramètres $(t, t') \in \mathbf{R}^2$ qui peuvent être interprétés comme les coordonnées du point (par rapport au repère $\mathscr{R}'$).
Les deux vecteurs donnent la *direction* du plan, et le point A sa translation par rapport à l'origine. C'est exactement la même logique que pour la droite que nous avions déjà vu.

Propriété 2.13 *(Représentation paramétrique d'un plan)*

Un plan $\mathcal{P}$ de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}=(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\overrightarrow{v}=(\alpha',\beta',\gamma')$ et passant par le point $A(x_A,y_A,z_A)$ a pour équation :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases} \quad \text{pour } (t,t')\in\mathbf{R}^2$$

Remarque : Cette représentation n'est pas unique. **Preuve**

C'est l'écriture de la définition avec les coordonnées. ■

Propriété 2.14 *(Représentation cartésienne d'un plan)*

Un plan $(\mathcal{P})$ du plan est parfaitement décrit par un point $A(x_A,y_A,z_A)$ par lequel il passe et un vecteur orthogonal $\overrightarrow{w}=(a,b,c)$.
L'équation de ce plan est

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

Réciproquement, toute équation de l'espace de la forme $ax+by+cz+d=0$ désigne une plan.

Preuve

Ce sont simplement l'ensemble des points M tels que $(AM)\perp\overrightarrow{w}$.
Ainsi, $M\in\mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{w}=0$, ce qui donne l'équation de la propriété. ■

Exemple

Soit l'équation d'un plan : $\mathcal{P}\ :\ x+3y+2z=4$

1. Trouver un vecteur orthogonal au plan $\mathcal{P}$ et un point par lequel passe $\mathcal{P}$.
2. En déduire une équation paramétrique de $\mathcal{P}$.

Solution :

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}=(1,3,2)$ est normal au plan.
   Pour $x=y=0$, on a $z=2$, donc le plan passe par le point $A(0,0,2)$.
2. Il faut trouver deux vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{w}$ et non colinéaire entre eux.
   On peut prendre $\overrightarrow{u}=(-3,1,0)$ et $\overrightarrow{v}=(0,-2,3)$ par exemple.
   Ainsi un paramétrage du plan est

$$\begin{cases} x=-3t \\ y=t-2t' \\ z=2+3t' \end{cases} \quad \text{pour } (t,t')\in\mathbf{R}^2$$

Remarque méthodologique : On pourrait aussi trouver une équation du plan en résolvant le système : on exprime t et t' en fonction de x, y et z puis on les remplace dans l'équation.

Ici, on peut poser donc $y=t$ et $z=t'$. Alors $x=4-3t-2t'$ et un paramétrage du plan est simplement

$$\begin{cases} x=4-3t-2t' \\ y=t \\ z=t' \end{cases} \quad \text{pour } (t,t')\in\mathbf{R}^2$$

Ces deux paramétrages désignent le même plan : comme pour les droites, le paramétrage n'est pas unique.

Exemple

Soit l'équation paramétrique d'une droite dans le plan :

$$\mathcal{P}\ :\ \begin{cases} x &= 2t+3t'-5 \\ y &= 4t-t'+1 \\ z &= t-1 \end{cases}$$

1. Trouver deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$ et un point par lequel il passe.
2. Donner une équation cartésienne de (d).
3. En déduire un vecteur orthogonal à $\mathcal{P}$

Solution :

1. $\overrightarrow{u}=(2,4,1)$ et $\overrightarrow{v}=(3,-1,0)$ sont deux vecteur non colinéaires du plan.
   Le plan passe par le point $A\,(-5,1,-1)$.
2. Pour obtenir une équation cartésienne du plan, soit on cherche un vecteur qui est à la fois orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$, soit on cherche directement l'équation en résolvant le système linéaire d'inconnues t et en t' en fonction des paramètres y et z. On en déduira ensuite la valeur de x en fonction de t et t'.
   Nous allons utiliser cette deuxième méthode :

$$\begin{cases} 4t-t'+1 &= y \\ t-1 &= z \end{cases} \iff \begin{cases} 4t-t'+1 &= y \\ t &= z+1 \end{cases} \iff \begin{cases} 4(z+1)-t'+1 &= y \\ t &= z+1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -t'+4z+5 &= y \\ t &= z+1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} t' &= -y+4z+5 \\ t &= z+1 \end{cases}$$

   Donc $x=2(z+1)+3(-y+4z+5)-5=-3y+14z+12$.
   Ainsi, une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est

$$x+3y-14z+16=0$$

3. À partir de l'équation cartésienne précédente, on sait que $\overrightarrow{w}=(1,3,-14)$ est un vecteur orthogonal à la fois à $\overrightarrow{u}$ est $\overrightarrow{v}$. On peut vérifier que

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}=2\cdot1+4\cdot3+1\cdot(-14)=0 \quad\text{et}\quad \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}=3\cdot1-1\cdot3+0\cdot(-14)=0$$

Exemple

Donner une équation paramétrique du plan qui passe par les points $A(1,1,2)$, $B(0,1,-1)$ et $C(1,-1,-1)$.

Solution :

Les trois points ne sont pas alignés, donc ils définissent bien un plan.

Cela se traduit par le fait que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et peuvent servir pour paramétrer le plan.

$\overrightarrow{AB} = -(1,0,3)$ et $\overrightarrow{AC} = (1,-2,0)$

On peut prendre $-\overrightarrow{AB}$ au lieu de $\overrightarrow{AB}$ pour trouver un paramétrage plus simple, et on obtient

$$\begin{cases} x = 1 + t + t' \\ y = 1 - 2t' \\ y = 2 + 3t \end{cases} \qquad \text{pour } (t,t') \in \mathbf{R}^2$$

Exemple

Donner une équation cartésienne du plan qui passe par les points $A(0,2,-1)$, $B(0,1,0)$ et $C(1,1,1)$.

Solution :

Les trois points ne sont pas alignés et désignent donc un plan.

On peut chercher un vecteur orthogonal à la fois à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} = (0,-1,1)$ et $\overrightarrow{AC} = (1,0,1)$

On cherche $\overrightarrow{w} = (a,b,c)$ tel que $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

On doit donc avoir

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{w} & = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{w} & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -b + c & = 0 \\ a + c & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b & = c \\ a & = -c \end{cases}$$

Si on prend $c = 1$, alors $\overrightarrow{w} = (-1,1,1)$ convient comme vecteur normal à $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{P} : \quad -(x-0) + (y-2) + (z+1) = 0$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{P} : \quad -x + y + z - 1 = 0$$

3 Projection orthogonale

A Projection orthogonale sur une droite

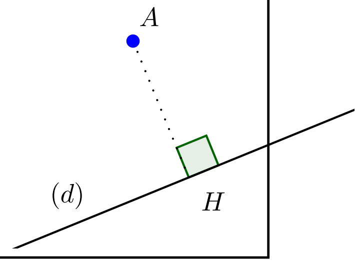
Définition 3.1 *(Droites orthogonales)*

On dit que deux droites sont orthogonales ou perpendiculaires, lorsque leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Définition 3.2 *(Projeté orthogonal)*

Soit un point A et une droite (d), le **projeté orthogonal** de A sur (d) est donné par l'unique point H tel que

- $H \in (d)$
- $(AH) \perp (d)$



Exemple

Si $A \in (d)$, alors $H = A$

Propriété 3.3 *(Caractérisation du projeté orthogonal)*

Le projeté orthogonal de A sur (d) est le point H de (d) qui est le plus proche de A. C'est-à-dire que H est l'unique point tel que

- $H \in (d)$
- $AH = \min_{M \in (d)} AM$

Preuve

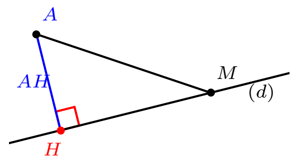
Soit $H \in (d)$ le projeté orthogonal de A sur (d) et M un point quelconque de (d).

Alors d'après le théorème de Pythagore,

$$AH^2 + HM^2 = AM^2$$

Donc pour $M \neq H$, $AH < AM$.

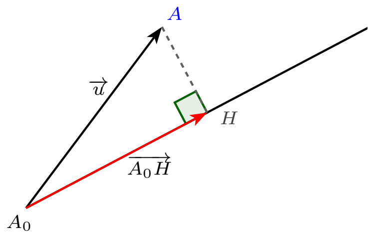
AH est donc la distance minimale entre A et un point de (d), et cette distance n'est atteinte que pour $M = H$.



■

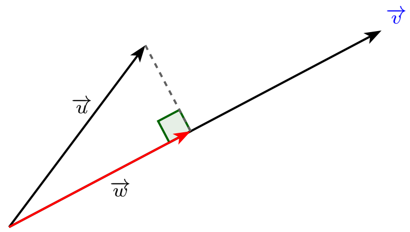
Définition 3.4 *(Projection orthogonale d'un vecteur sur une droite)*

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et (d) une droite passant par un point A_0.
On note A l'unique point tel que $\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{u}$.
Le projeté orthogonal de $\overrightarrow{u}$ sur (d) est le vecteur $\overrightarrow{A_0H}$
où H est le projeté orthogonal de A sur (d).

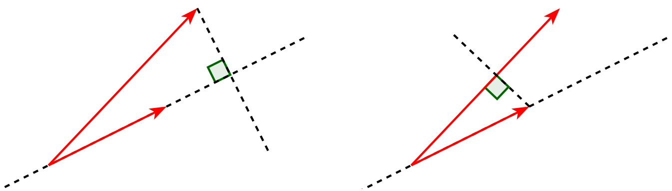


Définition 3.5 *(Projection orthogonale entre deux vecteurs)*

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, avec $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.
Le projeté orthogonal de $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{v}$ est l'unique vecteur $\overrightarrow{w}$ colinéaire à $\overrightarrow{v}$ tel que $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$ est orthogonal à $\overrightarrow{v}$.



Le projeté orthogonal de $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{v}$ n'est pas le même que le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$.



Projection orthogonale d'un vecteur sur un autre

Le projeté orthogonal est un vecteur.

Preuve

Pour justifier que la définition a un sens, montrons l'existence et l'unicité du projeté orthogonal.
Pour cela nous raisonnons par analyse-synthèse, ce qui donnera en même temps, une expression explicite du projeté orthogonal.
Analyse : On cherche $\overrightarrow{w}$ colinéaire à $\overrightarrow{v}$ tel que $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{v}$.
C'est-à-dire $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{v} = 0$.
Si $\overrightarrow{w}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$ non nul, alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que : $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{v}$. Ainsi $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} - \lambda \|\overrightarrow{v}\|^2 = 0$.

Donc $\lambda = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|^2}$, ce qui permet d'obtenir l'expression du projeté orthogonal.

$$\overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\overrightarrow{v}$$

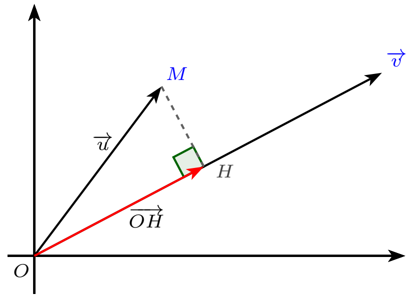
Synthèse : si on choisit l'expression de $\overrightarrow{w}$ ci-dessus, alors il est immédiat que $\overrightarrow{w}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$ et que $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Ainsi, le projeté orthogonal existe bien et est unique.

■

La définition de la projection orthogonale d'un vecteur sur un autre est cohérente avec celle d
projection d'un point sur une droite.
En effet, si on considère les représentants de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ d'origine O, alors on peut poser M tel q
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$, et (d) la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ passant O.
Si H est le projeté orthogonal de M sur (d), alors

le projeté orthogonal de $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{v}$ est $\overrightarrow{OH}$.



Propriété 3.6 *(Produit scalaire et projection orthogonale)*

Avec les notations précédentes,

$$|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| = \|\overrightarrow{w}\| . \|\overrightarrow{v}\|$$

Remarque : le signe du produit scalaire indique si l'angle entre les vecteurs est aigu (positif) ou obtus (négatif).

Explications
$|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|$ est égal à la longueur de $\overrightarrow{v}$ multiplié par la longueur du projeté orthogonal de $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{v}$.
Les rôles de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont symétriques : on peut interpréter que l'on projette $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{v}$ ou le contraire et on obtient le même résultat (voir la figure ci-dessus).

Preuve

Avec l'expression du projeté orthogonal trouvé dans la preuve précédente :

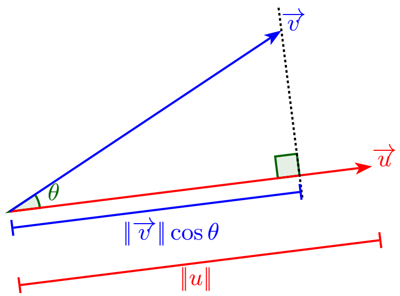
$$\|\overrightarrow{w}\| . \|\overrightarrow{v}\| = \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|}{\|\overrightarrow{v}\|^2} \|\overrightarrow{v}\| . \|\overrightarrow{v}\| = |\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|$$

■

Propriété 3.7 *(Produit scalaire et cosinus)*

Soit θ l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

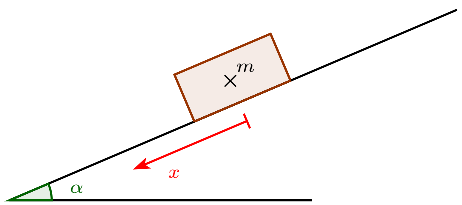
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, \cos\theta$$



Remarque : En fait, on pourrait plutôt utiliser cette propriété comme définition de l'angle θ entre les deux vecteurs. Il faudrait encore savoir quel signe affecter à θ (car le cosinus est pair) et parler d'orientation du repère. Mais tout ceci est un peu compliqué et nous prendrait trop de temps à développer. Nous considérons donc ici, que l'on *sait* ce qu'est un angle.

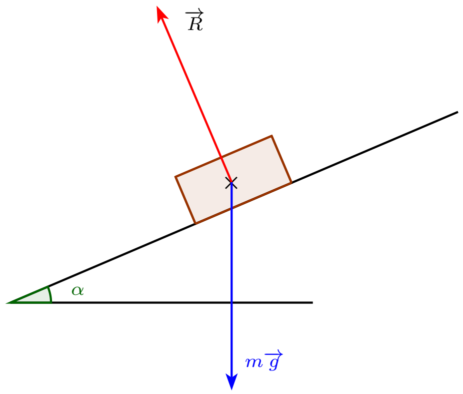
Exemple *(Mécanique)*

On s'intéresse à un bloc (assimilé à une masse ponctuelle m), qui glisse sur un plan incliné (angle α avec l'horizontale).
On suppose qu'il n'y a aucun frottement entre le bloc et son support. L'abscisse $x(t)$ du bloc est comptée le long de la pente dans la direction descendante.
Le bloc est lâché au temps $t = 0$, sans vitesse initiale au point d'abscisse $x = 0$.
Le but est de déterminer la position du bloc au cours du temps.



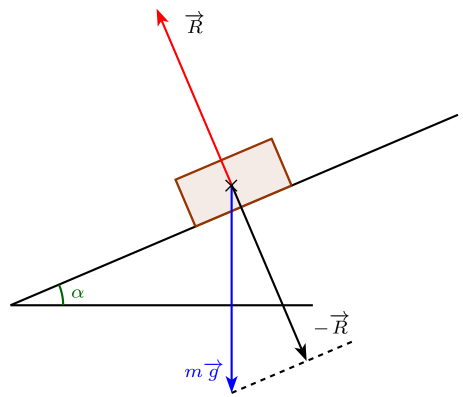
Solution :

- **Bilan des forces :**
  Il y a deux forces qui s'appliquent sur le mobile : le poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ et la réaction du support $\overrightarrow{R}$ (on néglige les forces de frottement).

  Le poids s'exerce au centre de gravité et la réaction du support au niveau du contact entre le support et la masse.
  Cependant, comme nous ne nous intéressons pas aux mouvements « solide-rigide » du mobile (on ne regarde pas s'il tourne sur lui-même), mais qu'on l'assimile à une masse ponctuelle, on peut appliquer toutes les forces au même point.

- **Calcul de la réaction :**
  Le calcul de la réaction n'est pas utile à l'exercice car cette force est perpendiculaire au mouvement.
  Dans d'autres modélisations, son calcul pourrait s'avérer utile pour évaluer des forces de frottement avec le support (qui dépendent en général de la vitesse du mobile et de la force de réaction). Il peut aussi servir pour vérifier la résistance du support et son éventuel écrasement sous le poids du mobile.
  Ici, nous allons calculer $\left\|\overrightarrow{R}\right\|$ à titre d'exercice.
  La réaction du support équilibre parfaitement la composante du poids normale au support (car il n'y a ni enfoncement, ni décollement : la seconde loi de Newton projetée sur l'axe normal au support indique que la somme des forces projetées suivant cet axe est nulle).

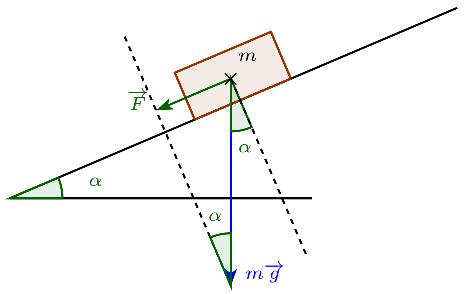
  

  Comme $\overrightarrow{R}$ est perpendiculaire au support et que $\overrightarrow{g}$ est perpendiculaire à l'horizontale, alors d'après le théorème des droites perpendiculaires deux à deux,

l'angle entre l'horizontale et le support est le même que l'angle entre la verticale $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{R}$.
Par conséquent,

$$\left\|\overrightarrow{R}\right\| = mg\cos\alpha$$

- **Calcul de la force motrice :**
On note $\overrightarrow{F}$ la force motrice. Elle correspond à la résultante des forces suivant la direction de la pente.
D'après la propriété sur les angles alternes-internes, on retrouve l'angle α sur le nouveau triangle entre $m\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{F}$.



$$\overrightarrow{F} = mg\sin\alpha$$

- **Loi de Newton :**
La seconde loi de Newton projetée suivant $\overrightarrow{x}$ donne alors l'équation différentielle :

$$m\ddot{x}(t) = mg\sin\alpha$$

On résout cette équation qui donne avec $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = 0$:

$$\forall t \geqslant 0, \quad x(t) = g\sin\alpha\frac{t^2}{2}$$

C'est l'équation de la chute libre, pour laquelle la pesanteur est multipliée d'un coefficient $\sin\alpha$.

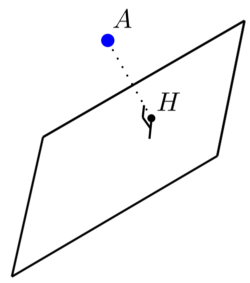
B Projection orthogonale sur un plan

La projection orthogonale sur un plan relève de la même philosophie que celle sur une droite. Elle revient à trouver la distance minimale entre un point A et un plan $(\mathcal{P})$. Cette distance est atteinte pour H le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{P})$, c'est-à-dire H, l'unique point de $(\mathcal{P})$ tel que (AH) soit orthogonal à $(\mathcal{P})$ (c'est-à-dire à toutes ses droites).

Définition 3.8 *(Projeté orthogonal d'un point sur un plan)*

Soit un point A et un plan $(\mathcal{P})$, le **projeté orthogonal** de A sur $(\mathcal{P})$ est donné par l'unique point H tel que

- $H \in (\mathcal{P})$
- $(AH) \perp (\mathcal{P})$



Remarque : Ce point est bien unique car l'intersection d'un plan avec une droite perpendiculaire est unique.

Exemple
Si $A \in (\mathcal{P})$, alors $H = A$

Propriété 3.9 *(Caractérisation du projeté orthogonal)*

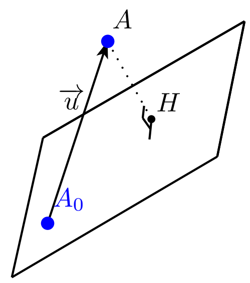
Le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{P})$ est le point H de $(\mathcal{P})$ qui est le plus proche de A.
c'est-à-dire que H est l'unique point tel que

- $H \in (\mathcal{P})$
- $AH = \min\limits_{M\in(\mathcal{P})} AM$

Preuve
Pythagore ■

Définition 3.10 *(Projection orthogonale d'un vecteur sur un plan)*

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et $\mathcal{P}$ un plan passant par un point A_0.
On note A l'unique point tel que $\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{u}$.
Le projeté orthogonal de $\overrightarrow{u}$ sur $\mathcal{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{A_0H}$ où H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.



4 Barycentres

Définition 4.1 *(Points pondérés)*

Un **point pondéré** est un point du plan ou de l'espace auquel on affecte un réel appelé **masse** : (A, α).
A est le point, et $\alpha \in \mathbf{R}$ est la masse.

Un **système de points pondérés** est un ensemble de points pondérés $\Big\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \cdots, (A_n, \alpha_n)\Big\}$.
La **masse totale du système** est définie par $m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

Explications
Les points peuvent désigner des positions de l'espace (ou du plan). Les masses désignent l'attraction ou la répulsion (en fonction du signe) exercées par chacune de ces positions.
Par exemple, les masses peuvent désigner la masse physique d'objets situés sur ces points, ou bien les charges électriques...
Un point de masse nulle n'aura aucune influence.
En statistiques, les masses indiquent l'importance associée à chaque valeur. Par exemple, ce sont les coefficients que l'on associe aux notes pour calculer la moyenne.

Définition 4.2 *(Barycentre d'un système)*

Soit $\Big\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \cdots, (A_n, \alpha_n)\Big\}$, un système de points pondérés dont la **masse totale n'est pas nulle**.
Il existe un unique point G appelé **barycentre** du système, tel que

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$$

Dans la suite, on notera ce barycentre $\mathrm{Bar}\Big\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \cdots, (A_n, \alpha_n)\Big\}$

Explications
L'équation de la définition peut s'interpréter facilement comme la position d'équilibre d'un mobile mécanique soumis à différentes forces attractives ou répulsives depuis les points A_i.
Par exemple, les A_i correspondent aux points d'accroche de n ressorts tels que le ressort fixé au point A_i ait pour raideur α_i.
Un objet est fixé à ces différents ressorts et on cherche sa position d'équilibre.
Cette position d'équilibre est atteinte lorsque les forces des ressorts se compensent exactement (voir la figure 1).

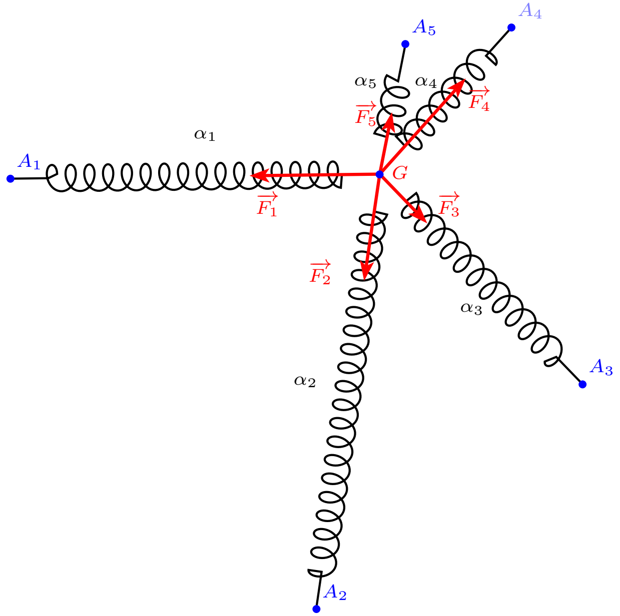


Figure 1: Interprétation mécanique du barycentre

Propriété 4.3

Soit $\Big\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \cdots, (A_n, \alpha_n)\Big\}$, un système de points pondérés dont la **masse totale n'est pas nulle**.
Si G est son barycentre, alors pour tout point M,

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$$

Explications
C'est la formule *traditionnelle* du centre de gravité.
Vous la voyiez habituellement dans le cas où M est l'origine du repère.
Il s'agit alors de la « moyenne » des positions pondérées par les masses.

Preuve
Il faut prouver que ce point existe et qu'il est unique. On va donc utiliser un raisonnement par analyse-synthèse.

- (**Analyse**)
Supposons que G vérifie l'équation de la définition.
Soit M un point quelconque,
D'après la relation de Chasles, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA_i}$.

Alors d'après l'équation qui définit le barycentre :

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0} \\
\Rightarrow &\alpha_1(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA_1}) + \alpha_2\left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA_2}\right) + \cdots + \alpha_n\left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA_n}\right) = \overrightarrow{0} \\
\Rightarrow &(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\overrightarrow{GM} + \alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = \overrightarrow{0} \\
\Rightarrow &\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \qquad \text{(car la masse totale est non nulle)}
\end{aligned}$$

Avec $M = O$, l'origine du repère, on obtient

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$$

Ce qui définit bien G de manière unique.
Conclusion : si le barycentre existe, alors il est unique.

- (**Synthèse**)
  Avec l'expression obtenue précédemment et $M = O$,
  on obtient bien l'existence d'un point G, dont on doit s'assurer qu'il vérifie l'équation de la définition.
  Pour cela on réutilise la relation de Chasles écrite en analyse avec $M = O$ et on trouve :

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n} = (\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\overrightarrow{GO}+\alpha_1\overrightarrow{OA_1}+\alpha_2\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{OA_n}$$

Or, par hypothèse

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$$

Donc $\overrightarrow{GO} = -\dfrac{\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$

Donc

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$$

Donc G est le barycentre du système.

■

Propriété 4.4 *(Coordonnées du barycentre)*

Les coordonnées du barycentre sont les barycentres des coordonnées.

Exemple

Soient trois points $A(2,0)$, $B(-3,5)$ et $C(1,1)$ affectés des masses respectives $3, 1$ et -2. Calculer les coordonnées du barycentre.

Solution :
$x_G = \frac{3\cdot2+1\cdot(-3)+(-2)\cdot1}{3+1-2} = \frac{1}{2}$ et $y_G = \frac{3\cdot0+1\cdot5+(-2)\cdot1}{3+1-2} = \frac{3}{2}$, donc $G\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Définition 4.5 *(Isobarycentre)*

Lorsque tous les points sont affectés de la même masse non nulle, on parle d'**isobarycentre**. Cela revient à affecter la masse 1 à chacun des points.

Exemple

L'isobarycentre de deux points est le milieu du segment.
L'isobarycentre de trois points est le centre de gravité du triangle.

Propriété 4.6 *(Invariance du barycentre par changement d'échelle des masses)*

Soit $\Big\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\cdots,(A_n,\alpha_n)\Big\}$ un système de points pondérés admettant un barycentre.
Soit $\lambda \neq 0$,

$$\mathrm{Bar}\Big\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\cdots,(A_n,\alpha_n)\Big\} = \mathrm{Bar}\Big\{(A_1,\lambda\alpha_1),(A_2,\lambda\alpha_2),\cdots,(A_n,\lambda\alpha_n)\Big\}$$

Explications

Si on change tous les ressorts par des ressorts trois fois plus raides, cela ne change pas le point d'équilibre. C'est seulement le rapport des raideurs qui est importants pour trouver la position, pas la raideur elle-même.

Preuve

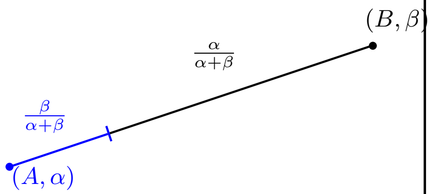
$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0} \iff \lambda\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \lambda\alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + \lambda\alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$$

L'équivalence nécessite $\lambda \neq 0$ ■

Propriété 4.7 *(Position sur le segment)*

Soient (A,α) et (B,β) deux points affectés de masses positives, non toutes nulles.
Si G est leur barycentre, alors

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$$



Explications

Le point d'équilibre est d'autant plus proche du point, que sa masse est importante par rapport aux autres.

Preuve

On remplace M par A ou B dans l'expression. ■

Propriété 4.8 *(Description barycentrique du segment et de la droite)*

$[AB]$ est constitué de l'ensemble des barycentres des points A, B affectés des coefficients positifs (non tous nuls). (AB) est constitué de l'ensemble des barycentres des points A, B affectés de coefficients quelconques (de somme non nulle).

Preuve

On utilise l'expression précédente et on fait varier α en fixant β à 1 par exemple.
Puis on rajoute le dernier point en fixant avec $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. ∎

Explications

À partir de la description géométrique du segment :
On écrit un point G du segment comme le point A auquel on rajoute une portion de $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned} G \in [AB] &\iff \exists t \in [0,1], \text{ tel que } \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \\ &\iff \exists t \in [0,1], \text{ tel que } \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{A0} + t\overrightarrow{0B} \\ &\iff \exists t \in [0,1], \text{ tel que } \overrightarrow{OG} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{0B} \end{aligned}$$

G est donc le barycentre de $\Big\{(A, 1-t), (B, t)\Big\}$.

À partir de la description barycentrique du segment (propriété 4.8) :
On considère les masses α et β pour A et B. Par invariance du barycentre par changement d'échelle des masses (propriété 4.6), on peut remplacer α par la proportion $s = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ et β par $t = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$. Alors

$$G = \text{Bar}\left\{\left(A, \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right), \left(B, \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\right\}$$

On observe que

$$s + t = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta} = 1$$

Donc $s = 1 - t$ et on retrouve l'expression

$$G = \text{Bar}\Big\{\,(A, 1-t)\,,\,(B, t)\Big\}$$

Ce qui permet de se ramener à $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$

Propriété 4.9 *(Associativité du barycentre)*

Soit $\Big\{(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)\Big\}$ un système de trois points pondérés, on a (sous reserve d'existence des barycentres)

$$\text{Bar}\Big\{(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)\Big\} = \text{Bar}\Big\{\underline{\left(\text{Bar}\big\{(A,\alpha),(B,\beta)\big\}, \alpha+\beta\right)}, (C,\gamma)\Big\}$$

Remarque : On peut bien sûr généraliser cette propriété à un système de n points dont on en met p ensemble. **Explications**

Le point d'équilibre de trois points A, B et C de masses respectives α, β et γ ne change pas de position si je rassemble les masses A et B sur leur point d'équilibre $\text{Bar}\big\{(A,\alpha),(B,\beta)\big\}$.

Preuve

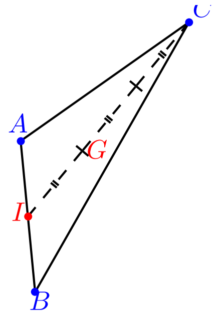
On note G le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ) et on note G' le barycentre de (A,α) et (B,β).
On suppose $\alpha+\beta \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} G = \text{Bar}\Big\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\Big\} &\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{O} \\ &\iff (\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}}{\alpha+\beta}\right) + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{O} \\ &\iff (\alpha+\beta)\overrightarrow{GG'} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{O} \\ &\iff G = \text{Bar}\Big\{\,(G', \alpha+\beta)\,,(C,\gamma)\,\Big\} \end{aligned}$$

∎

Exemple

C'est la raison pour laquelle, le centre de gravité d'un triangle est aux deux-tiers de la médiane.
En effet, le milieu I de $[AB]$ est l'isobarycentre de A et de B.
Si on lui affecte une masse de $2 = 1+1$, quand C a une masse de 1, le barycentre G est aux deux-tiers du segment.



Propriété 4.10 *(Description barycentrique du triangle et du plan)*

Le triangle ABC est constitué de l'ensemble des barycentres des points A, B, C affectés des coefficients positifs (non tous nuls).
Le plan contenant les trois points non alignés ABC est constitué de l'ensemble des barycentres des points A, B, C affectés de coefficients quelconques (de somme non nulle).

Explications

Lorsque les points sont alignés, on retrouve la description du segment ou de la droite.

Preuve

Pour le triangle, on peut « remplir » le triangle à partir des segments de type $[AI]$ avec I un point de $[BC]$.

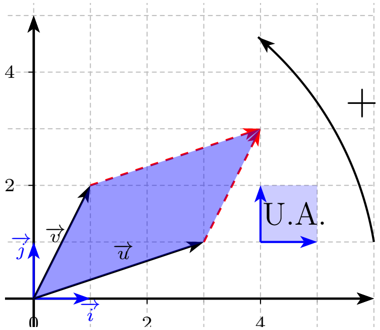
Ainsi, pour décrire tout le triangle, je fait varier I sur $[BC]$ avec un premier barycentre, puis je prends un point sur $[AI]$ grâce à un nouveau barycentre. L'associativité des barycentres donne le résultat.
Pour avoir le plan complet, je prolonge simplement les segments en des droites. ■

5 Surfaces algébriques

Définition 5.1 *(Déterminant d'un couple de vecteurs en dimension 2)*

Soit $\overrightarrow{u} = (x, y)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y')$, des vecteurs de $\mathbf{R}^2$.

Le déterminant du couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est égal à l'aire algébrique de la surface du parallélogramme formé par $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.



L'aire est algébrique, c'est-à-dire que l'échange les vecteurs donne l'opposé. On dit que le déterminant est *antisymétrique*

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$$

Nous voyons ici que c'est le repère qui donne l'unité d'aire. En toute rigueur, il faudrait indiquer que nous calculons le déterminant dans une certaines base. Si nous changeons de base, le déterminant est également changé.

Exemple

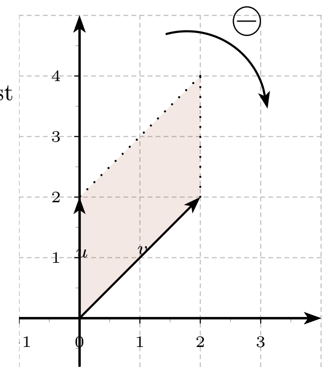
Dans $\mathbf{R}^2$, on pose $\overrightarrow{u} = (0, 2)$ et $\overrightarrow{v} = (2, 2)$. Calculer $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Solution :

Comme le montre la figure ci-contre, l'aire est négative.
On la calcule facilement avec la formule

$$\mathscr{A} = \text{"bas"} \times \text{"hauteur"} = 4$$

Donc $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -4$.



Propriété 5.2

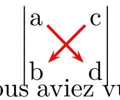
Si $\overrightarrow{u} = (x, y)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y')$, alors

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Explications

On écrit les vecteurs sous forme de colonne et on réalise une forme de « produit en croix ».

$$\rightarrow \quad a \times d - b \times c$$



On retrouve ce que vous aviez vu au collège : si les lignes (ou les colonnes) du tableau sont proportionnelles, alors on peut appliquer la règle du produit en croix : $ad = bc$, c'est-à-dire $ad - bc = 0$. Dans ce cas, les vecteurs sont colinéaires (proportionnels) et l'aire qu'ils délimitent est nulle.
Le déterminant permet donc de savoir si des vecteurs sont colinéaires ou non.

Méthode *(Déterminer si deux vecteurs sont colinéaires)*

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Preuve

On introduit $\overrightarrow{w} = (-y, x)$ qui est orthogonal à $\overrightarrow{u}$.

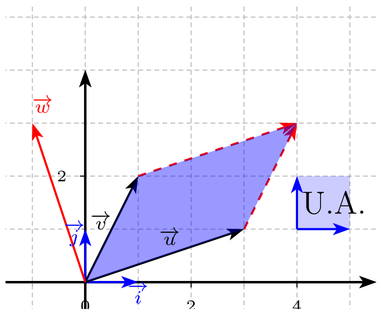
L'aire d'un parallélogramme est égale à la longueur d'un côté multiplié par la hauteur.

- longueur d'un côté : $\|\overrightarrow{u}\|$.
- pour calculer la longueur, on projette $\overrightarrow{v}$ sur le vecteur $\overrightarrow{w}$, et on obtient le vecteur :

$$\frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}^2\|}\overrightarrow{w}$$

La longueur est donc égale à la norme :

$$\frac{|\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}|}{\|\overrightarrow{w}\|}$$



Or, le signe de l'aire algébrique est donné par le signe du produit scalaire : l'aire est positive si $\overrightarrow{v}$ est du « même côté » que $\overrightarrow{w}$ par rapport à $\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire si l'angle entre les deux est aigu : le produit scalaire est positif.

A contrario, l'aire est négative lorsque le produit scalaire est négatif.

Ainsi, on enlève les valeurs absolues dans le calcul du produit scalaire et on trouve

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\| \frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}$$

Or $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{w}\|$, donc

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w} = x'w_1 + y'w_2 = xy' - x'y$$

■

Exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\times 3 - 5\times 2 = -7$$

Propriété 5.3

Le déterminant de deux vecteurs est nul si et seulement s'ils sont colinéaires.
On dit qu'ils forment une famille **liée**.
Lorsqu'une famille n'est pas liée, on dit qu'elle est **libre**.

Explications

L'aire du parallélogramme est nulle lorsque le parallélogramme est *aplati*.

Propriété 5.4

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}$ quatre vecteurs de $\mathbf{R}^2$, et $\lambda \in \mathbf{R}$.
Le déterminant est

1. antisymétrique : $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$
2. linéaire à gauche : $\det(\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v}) = \lambda\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \det(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v})$,
3. linéaire à droite : $\det(\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v'}) = \lambda\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v'})$.

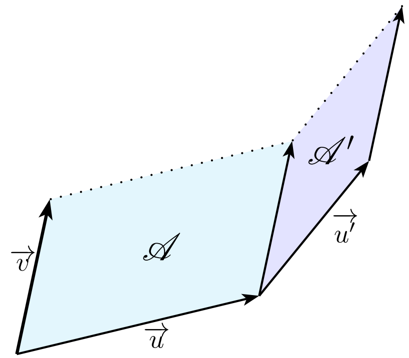
Preuve

Par le calcul. ■

Explications

La linéarité correspond à la notion d'additivité des aires que vous avez appris au collège.

$$\det\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v}\right) = \underbrace{\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}_{\mathscr{A}} + \underbrace{\det\left(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v}\right)}_{\mathscr{A}'}$$



Index

6 Complément hors programme : géométrie alternative

Ceci est un complément hors programme et ne pourra donc pas être utilisé au moment des concours. Il constitue néanmoins une ouverture naturelle qui prolonge le travail plus classique de ce chapitre. Seules les définitions et propriétés élémentaires vous sont données. À vous de reconstruire le reste...

Définition 6.1 *(Le point)*

Le point est la plus courte distance possible entre deux lignes.

Définition 6.2 *(Les points parallèles)*

On dit qu'un point est parallèle à deux autres points, lorsque, ce point étant convenablement disposé, si on le déplace d'un côté ou de l'autre, il n'est plus parallèle.

Théorème 6.3 *(Condition suffisante de parallélisme)*

La condition suffisante pour qu'un point reste bien parallèle à deux autres points est qu'il reste où il est et qu'il ne bouge pas.

Définition 6.4 *(La ligne)*

On appelle **lignes de première catégorie**, les lignes qui ne passent que par des points parallèles.
On appelle **lignes de deuxième catégorie**, les lignes qui ne passent que par un seul point.

Propriété 6.5

Toute ligne prise hors d'un point ne passe pas par ce point, ou alors, si elle y passe, c'est vraiment par hasard.

Ces éléments de géométrie sont issus de la pensée Shadok par Jacques Rouxel.