Limites et continuité

Qui franchit une ligne continue, risque de perdre l'adhérence.

Avertissement :
Ce chapitre contient beaucoup de définitions abstraites, mais dans la pratique, il n'y a que quelques théorèmes d'usage courant qui sont déjà connus.

Notations : Dans ce chapitre I et J désignent des intervalles de $\mathbf{R}$ (ou réunion de deux intervalles), non réduits à un point. f désigne une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$.

1 Limites

Remarque : Les définitions avec ε énoncées dans cette partie seront très rarement utilisées en exercice (sauf pour des exercices assez théoriques).
En revanche, les **propriétés séquentielles** seront d'usage courant.

A Notion d'adhérence

La notion d'adhérence est hors programme, elle n'est donc pas développée ici.
On se limite à introduire la notation $\overline{I}$ pour faciliter certaines écritures dans ce chapitre.

Définition 1.1 *(Valeur d'adhérence, voisinage)*

Pour un intervalle I donné, on notera $\overline{I}$ l'intervalle fermé correspondant.
Par exemple pour $I = [3, 7[$, on a $\overline{I} = [3, 7]$.

Lorsque l'intervalle I est de la forme $I =]-\infty, b]$, alors $\overline{I} =]-\infty, b] \cup \{-\infty\}$.
On procède de même lorsque l'intervalle n'est pas borné à droite.

$\overline{I}$ s'appelle **l'adhérence** de I ; lorsque $a \in \overline{I}$, on dit que a est **adhérent** à I.

Dans ce cours, l'expression **au voisinage de** a désigne

- si $a \in \mathbf{R}$, un intervalle ouvert contenant a.
  Par exemple $\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ est un voisinage de 0.
- Si $a = +\infty$, un intervalle ouvert non majoré.
  Par exemple, $]1, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.
- Si $a = -\infty$, un intervalle ouvert non minoré.
  Par exemple, $]-\infty, 0[$ est un voisinage de $-\infty$.

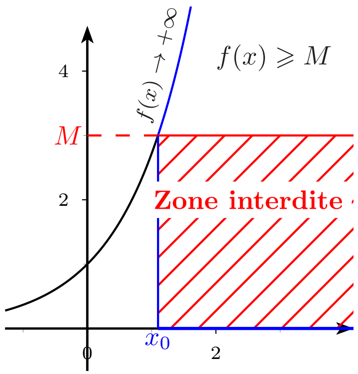
B Limites à l'infini

Définition 1.2 *(Limite infinie à l'infini)*

Soit f définie sur I, un intervalle non majoré,
On dit que f admet $+\infty$ comme **limite** en $+\infty$ si

$$\forall M > 0,\ \exists x_0 > 0,\ \forall x \in I,\ x \geqslant x_0 \Rightarrow f(x) \geqslant M.$$

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



Propriété 1.3 *(Propriété séquentielle)*

Soit f définie sur I non majoré, telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in I^{\mathbf{N}}$ est une suite qui tend vers $+\infty$, alors $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

Remarque hors programme : Il existe aussi une réciproque :
Si, pour **toute** suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in I^{\mathbf{N}}$ qui tend vers $+\infty$, $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
La propriété séquentielle et sa réciproque forment « la caractérisation séquentielle » de la limite infinie.
Pour utiliser cette réciproque, il ne suffit pas de montrer que c'est vrai pour une seule suite, mais pour *toutes* les suites. Cela rend cette réciproque difficile à utiliser sauf dans le cadre d'exercices « théoriques ». Sans doute est-ce la raison pour laquelle elle n'est pas au programme !

Preuve

Soit $M > 0$,
f tendant vers $+\infty$ en $+\infty$, on peut affirmer qu'il existe $x_0 > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ x \geqslant x_0 \Rightarrow f(x) \geqslant M.$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, donc $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant x_0 \Rightarrow f(u_n) \geqslant M$.
Ainsi, on a montré que

$$\forall M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow f(u_n) \geqslant M.$$

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = +\infty$. ■

Méthode *(Utilisation de la propriété séquentielle)*

En général, on utilise la propriété séquentielle :

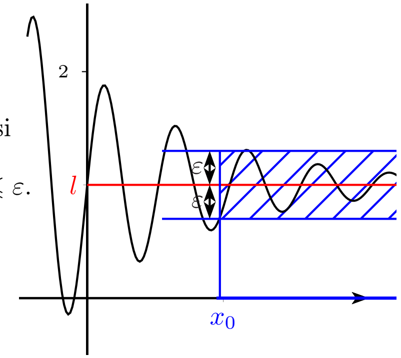
- soit pour montrer qu'une suite $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$:
  on sait que f tend vers $+\infty$, alors si $u_n \to +\infty$, $f(u_n) \to +\infty$.
- soit avec la contraposée pour montrer qu'une fonction f ne tend pas vers $+\infty$:
  on trouve une suite (u_n) qui tend vers $+\infty$ telle que $f(u_n) \not\to +\infty$.

Définition 1.4 *(Limite finie à l'infini)*

Soit f définie sur I un intervalle non majoré.
On dit que f admet une **limite finie** ℓ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 > 0,\ \forall x \in I,\ x \geqslant x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.



Propriété 1.5 *(Propriété séquentielle)*

Soit f définie sur I non majoré, telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
Si $(u_n) \in I^{\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ.

Preuve

Soit $\epsilon > 0$,
f tendant vers ℓ en $+\infty$, on peut affirmer qu'il existe $x_0 > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ x \geqslant x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \epsilon.$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, donc $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant x_0 \Rightarrow |f(u_n) - \ell| \leqslant \epsilon$.
Ainsi, on a montré que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |f(u_n) - \ell| \leqslant \epsilon.$$

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$. ■

Exercice

Énoncer les autres définitions en $\pm\infty$ et leurs propriétés séquentielles.

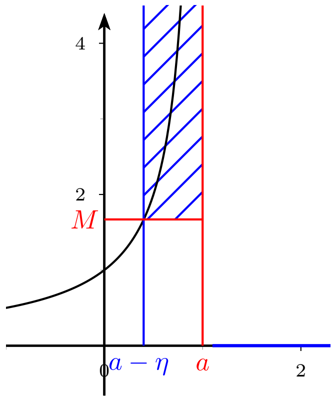
C Limites en un point

Définition 1.6

Soit $a \in \overline{I}$, $a \notin I$.
On dit que f admet $+\infty$ comme **limite** en a si

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \geqslant M.$$

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.



Remarque : L'hypothèse $a \notin I$ n'est pas indispensable à écrire car elle est nécessairement vérifiée.
En effet, si $a \in I$, alors en posant $M = f(a) + 1$, pour tout $\eta > 0$, avec $x = a$, on a toujours $|x - a| = 0 \leqslant \eta$ et pourtant $f(x) < M$.
Ceci montre donc bien que si $a \in \mathbf{N}$, alors f ne peut pas tendre vers $+\infty$ en a.

Propriété 1.7 *(Propriété séquentielle)*

Soit $a \in \overline{I}, a \notin I$, tel que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
Si $(u_n) \in I^{\mathbf{N}}$ tend vers a alors la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

Preuve

Soit $M > 0$,
f tendant vers $+\infty$ en a, on peut affirmer qu'il existe $\eta > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \geqslant M.$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, donc $\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - a| \leqslant \eta \Rightarrow f(u_n) \geqslant M$.
Ainsi, on a montré que

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow f(u_n) \geqslant M.$$

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = +\infty$. ■

On définit de même pour $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Définition 1.8 *(Limite finie en un point)*

Soit f définie sur I, et a un nombre réel fini dans $\overline{I}$.
On dit que f admet $\ell \in \mathbf{R}$ pour **limite** en a si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ \forall x \in I,\ |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Propriété 1.9 *(Unicité de la limite)*

La limite d'une fonction en un point est unique.

Preuve

C'est la même preuve que celle de l'unicité de la limite pour les suites :
On suppose qu'il y a deux limites distinctes : ℓ et ℓ' et on considère $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{3}$.
Ainsi les valeurs de $f(x)$ ne peuvent être à la fois proche de ℓ et de ℓ' à ε près. ■

Propriété 1.10 *(Propriété séquentielle de la limite)*

Soit f définie sur I et $a \in \overline{I}$, telle que f admette ℓ pour limite en a.
Si $(u_n) \in I^{\mathbf{N}}$ converge vers a, alors la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers ℓ.

Preuve

Soit $\epsilon > 0$,
f tendant vers ℓ en a, on peut affirmer qu'il existe $\eta > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \epsilon.$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, donc $\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(u_n) - \ell| \leqslant \epsilon$.
Ainsi, on a montré que

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |f(u_n) - \ell| \leqslant \epsilon.$$

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$. ■

Méthode

Pour montrer que f n'admet pas de limite en a, il suffit de trouver deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent vers a telles que $f(u_n)$ et $f(v_n)$ ne convergent pas vers la même limite.

Exemple

Montrer que $f : x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite en 0.
Solution :
La suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{2\pi n}$ converge vers 0 et la suite $(f(u_n))_{n \geqslant 1}$ est constante à 0.
Par contre, la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par $v_n = \frac{2}{\pi(1+4n)}$, converge aussi vers 0, mais la suite $(f(v_n))_{n \geqslant 1}$ est constante égale à 1.
Donc f n'admet pas de limite en 0.

2 Continuité

A Continuité en un point

Définition 2.1 *(Continuité en un point)*

Soit f une fonction définie sur I, et $a \in I$ (pas l'adhérence).
On dit que f est **continue** en a
si et seulement si $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$,
si et seulement si f admet une limite en a. C'est-à-dire si et seulement si

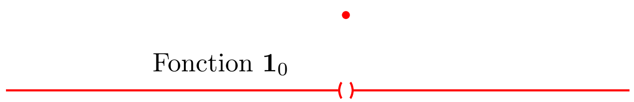
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque : Si la limite existe, alors elle ne peut pas être différente de $f(a)$ car $a \in I$. En effet, s'il y avait une limite ℓ différente de $f(a)$, alors on pourrait poser $\epsilon = \frac{|f(a)-\ell|}{2}$. Mais pour n'importe quel $\eta > 0$, si on pose $x = a$, alors $|x-a| = 0 \leqslant \eta$ et pourtant $|f(x) - \ell| = |f(a) - \ell| > \epsilon$. C'est absurde par définition de la limite ℓ. Donc nécessairement $\ell = f(a)$.

Explications

C'est exactement la définition de la limite, mais on impose que le point appartienne à I et non à l'adhérence. Une fonction qui est continue en a est simplement une fonction dont on peut « prévoir » la valeur $f(a)$ quand on s'approche infiniment de a. Cela suppose qu'il n'y ait aucun « saut » en arrivant sur a. C'est l'idée donnée en terminale selon laquelle, on n'a pas besoin de lever le crayon pour tracer la fonction.

Exemple



La fonction $\mathbf{1}_0$ (qui vaut 1 en 0, et qui est nulle partout ailleurs) est continue en tout point sauf en 0.

Propriété 2.2 *(Propriété séquentielle de la continuité)*

Soit f continue en $a \in I$.
Si $(u_n) \in I^{\mathbf{N}}$ tend vers a, alors la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $f(a)$:

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right).$$

Preuve

C'est la même preuve que pour la limite. ■

En pratique, cette propriété séquentielle veut dire que l'on peut « entrer » et « sortir » la limite d'une fonction continue.

Exemple

Calculer la limite de $\mathrm{e}^{\frac{n^2-3n+1}{2n^2-1}}$ quand $n \to +\infty$.
Solution :
On remarque d'abord que $\forall n \in \mathbf{N}$, $2n^2 - 1 \neq 0$, et la fonction exponentielle est définie sur $\mathbf{R}$ donc la suite est bien définie pour tout $n \in \mathbf{N}$.
$\forall n \geqslant 1$, $\dfrac{n^2-3n+1}{2n^2-1} = \dfrac{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}$, donc par quotient, $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{n^2-3n+1}{2n^2-1} = \dfrac{1}{2}$.
Et par continuité de la fonction exponentielle en $\dfrac{1}{2}$, $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{n^2-3n+1}{2n^2-1}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Exemple

Calculer la limite de $\left\lfloor -\frac{1}{n} \right\rfloor$ quand $n \to +\infty$.
Solution :
La suite est bien définie pour $n \geqslant 1$.
⚠ On a $\lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} = 0$, mais la suite ne tend pas vers $\lfloor 0 \rfloor = 0$. En effet, la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en 0 et on ne peut donc pas passer à la limite en composant.
Ainsi, $\forall n \geqslant 1$, $-\frac{1}{n} \in [-1, 0[$, donc $\left\lfloor -\frac{1}{n} \right\rfloor = -1$.
La suite est donc constante égale à -1 : elle tend vers -1.

Définition 2.3 *(Continuité sur un intervalle)*

Une fonction f est **continue sur un intervalle** I si elle est continue en tout point de I.

Explications *(Notion locale, locale partout, globale)*

La notion de continuité reste locale. C'est en chaque point que la fonction est continue, et indépendamment de ce qui se passe ailleurs. Parler de continuité nécessite des œillères : on est tellement myope que l'on ne peut voir les choses que localement, à proximité immédiate du point considéré.
La continuité sur un intervalle est donc une notion de type « local partout ». Elle ne doit pas être confondue avec une notion globale qui dépendrait de toute la fonction « d'un coup ». Par exemple, le caractère borné d'une fonction est une notion globale : elle dépend de tous les points à la fois.

Lorsqu'une fonction admet une limite finie en un point (**sans être définie en ce point**), on peut la prolonger par continuité par sa limite. Cela revient à dire que notre crayon va *jusqu'au point* au lieu de s'en approcher infiniment sans l'atteindre. On rajoute le point qui prolonge *naturellement* la fonction.

Propriété 2.4 *(Prolongement par continuité)*

- Si f est définie et continue sur I et a un point adhérent à I mais qui n'appartient pas à I.
- Et si la limite $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ existe (et est finie).

Alors on peut prolonger f par continuité en une fonction $\widetilde{f}$ telle que $\widetilde{f}(a) = \ell$.

⚠ Bien sûr, $a \notin I$: la fonction ne doit pas avoir été déjà définie en a car on ne peut pas définir deux images à un point.

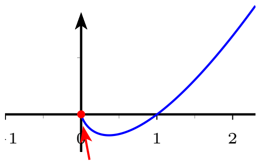
Remarque : On peut définir d'autres prolongements que celui par continuité. En effet, n'importe quelle valeur réelle pour $f(a)$ donne un prolongement, mais en général, c'est peu intéressant.

Exemple

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x \ln x$ peut être prolongée par continuité en 0.

Solution :

La fonction $f : x \mapsto x \ln x$ n'est pas définie en 0, $\lim\limits_{X\to 0} f(x) = 0$ par croissances comparées. Donc f peut être prolongée par continuité par la valeur $f(0) = 0$.

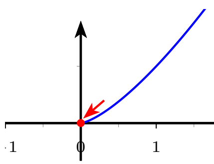


Exemple

Soit $\alpha > 0$, montrer que la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ peut être prolongée par continuité en 0.

Solution :

Pour $\alpha > 0$, les fonctions $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ ne sont pas définies 0.
$\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{\alpha \ln x} = 0$ par composition (car $\alpha > 0$).
On peut donc prolonger f_α par continuité avec la valeur $f_\alpha(0) = 0$.



3 Limite et continuité à gauche ou à droite

On reprend les notions précédentes, mais à présent, on ne considère qu'un seul côté de la fonction : on ne s'autorise à s'approcher de a que par par la gauche ou par la droite.

⚠ Les notions présentées sont difficiles lorsqu'on les écrit avec des quantificateurs. Il est donc primordial d'avoir en tête des exemples graphiques pour comprendre et être capable de retrouver les définitions quantifiées.

Définition 3.1 *(Limite finie à gauche)*

Soit $a \in \overline{I}$, un réel fini.
On dit que $f : I \to \mathbf{R}$ admet une **limite finie** ℓ **à gauche** de a, si

1. f est définie sur un voisinage à gauche de a : $\forall \eta > 0, [a-\eta; a[\cap I \neq \emptyset$.
2. et si la restriction de f à un tel voisinage, privé de a, admet la limite ℓ :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \text{tel que } \forall x \in [a-\eta; a[\cap I, |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note habituellement

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell.$$

On définit de la même façon la limite à droite de a.

Explications

Intuitivement, la limite à gauche de a consiste à s'approcher infiniment de a par la gauche, sans jamais l'atteindre. Cela suppose évidement que la fonction soit définie sur un voisinage à gauche de a (c'est la première condition de la définition).

⚠ a est exclu des valeurs possibles pour x, même si f est définie en a. Ainsi, l'intervalle est ouvert en a et la valeur de la limite peut être différente de $f(a)$.

Explications *(Différence entre limite et limite à gauche)*

Si f n'est définie qu'à gauche de a, on peut noter ▷ la limite à gauche $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$,

▷ la limite $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \leqslant a}} f(x)$.

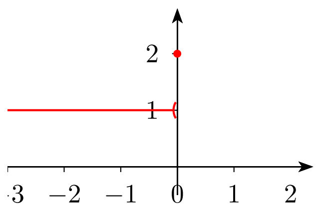
Donc

- Si f est définie sur $]-\infty, a[$ (ouvert en a), alors la définition de la limite de f en a et celle de la limite à gauche en a coïncident.
  En effet, l'inégalité stricte et l'inégalité large reviennent au même car $a \notin I$.
- Par contre, si f est définie sur $]-\infty, a]$ (fermé en a), alors les définitions sont différentes.

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f admet une limite à gauche de 0 : $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$.
Par contre, f n'admet pas de limite en 0 (car il y a un « saut »).



Définition 3.2 *(Limite à droite)*

Soit $a \in \overline{I}$.
On dit que $f : I \to \mathbf{R}$ admet une **limite finie** ℓ **à droite** de a, si

1. f est définie sur un voisinage à droite de a : $\forall \eta > 0,\ ]a; a+\eta] \cap I \neq \emptyset$.
2. et si la restriction de f à un tel voisinage, privé de a, admet la limite ℓ en a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \text{tel que } \forall x \in]a; a+\eta] \cap I, |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note habituellement

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell.$$

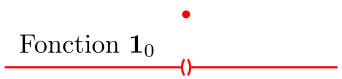
Propriété 3.3

Soit $a \in \overline{I}$ tel que f soit définie au voisinage de a à gauche et à droite.
Si f admet une limite finie en a alors f admet une limite finie à gauche et à droite en a et ces limites sont égales.

⚠ La réciproque est vraie si $a \notin I$, mais elle est fausse si $a \in I$.
En effet, il existe des fonctions qui admettent des limites à gauches et à droite de a sans admettre de limite en $a \in I$ (c'est à dire sans être continues en a) : il ne suffit pas que de montrer que les limites à gauche et à droite existent et sont égales pour justifier de la continuité.

Exemple

Pour la fonction $\mathbf{1}_0$. $\lim_{x \to 0^-} \mathbf{1}_0(x) = \lim_{x \to 0^+} \mathbf{1}_0(x) = 0$ mais $f(0) = 1$.



Propriété 3.4

Soit $a \in I$, tel que $\exists \varepsilon > 0,\ [a-\varepsilon; a+\varepsilon] \subset I$.
f est continue en a si et seulement si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Définition 3.5 *(Continuité à gauche)*

Soit $a \in I$.
On dit que $f : I \to \mathbf{R}$ est **continue à gauche** de a si

1. f est définie sur un voisinage à gauche de a : $\forall \eta > 0,\ ]a-\eta; a[\cap I \neq \emptyset$.
2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \text{tel que } \forall x \in [a-\eta; a] \cap I,\ |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$.

Formulation équivalente : f est continue à gauche de a si f admet une limite à gauche en a et $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Remarque : Ici, contrairement à la limite à gauche, a fait partie de l'intervalle dans la définition : l'intervalle est fermé en a. La notion de continuité n'a de sens que lorsque a fait partie de l'intervalle de définition : il faut atteindre le point.

Définition 3.6 *(Continuité à droite)*

Soit $a \in I$.
On dit que $f : I \to \mathbf{R}$ est **continue à droite** de a si

1. f est définie sur un voisinage à droite de a : $\forall \eta > 0,\ ]a; a+\eta[\cap I \neq \emptyset$.
2. et si la restriction de f à un tel voisinage, a compris, est continue en a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \text{tel que } \forall x \in [a; a+\eta] \cap I,\ |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Formulation équivalente : f est continue à droite de a si f admet une limite à droite en a et $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

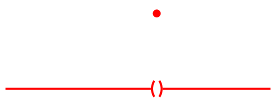
Propriété 3.7

Soit $a \in I$, tel que $\exists \eta > 0,\ ]a-\eta; a+\eta[\subset I$.
f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a.

Explications
C'est un énoncé très proche de celui de la propriété 3.4. La seule différence est que la notion de continuité à gauche ou à droite contient déjà l'idée que la limite est égale à la valeur au point. La formulation de la propriété s'en trouve donc allégée.

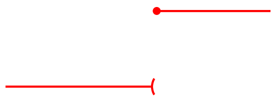
Exemple

Pour la fonction $\mathbf{1}_0$:
$\lim_{x\to 0^-} \mathbf{1}_0(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathbf{1}_0(x) = 0$.
Par contre la fonction n'admet pas de limite en 0.
La fonction n'est continue, ni à gauche, ni à droite de 0.



Exemple

Si on considère la fonction de Heavside : $H = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}$:
$\lim_{x\to 0^-} H(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} H(x) = 1$.
avec $H(0) = 0$
La fonction n'admet donc pas de limite en 0.
La fonction est continue à droite en 0, mais n'est pas continue à gauche (et n'est pas continue en 0).



Explications

Pour reprendre l'image donnée au lycée : quand on trace une fonction continue à gauche de a, on n'a pas besoin de lever le crayon pour arriver sur $f(a)$ depuis la gauche. Il suffit que le crayon suive la trajectoire donnée par la limite jusqu'au point.
Avec les exemples précédents :
Pour la fonction $\mathbf{1}_0$: que on s'approche par la gauche, ou par la droite, on est dans tous les cas obligé de faire un saut pour rejoindre le point $\mathbf{1}_0(0) = 1$. La fonction n'est donc continue, ni à gauche, ni à droite, et n'est donc pas continue en 0.
En revanche, la fonction admet une limite à gauche, car je peux m'approcher infiniment de $x = 0$ en suivant la courbe et sans lever le crayon tant que $x < 0$. De même à droite.
Pour la fonction de Heavside : la situation à gauche est identique à celle de $\mathbf{1}_0$. Par contre H est continue à droite. En effet, on peut atteindre le point $H(0)$ en suivant la courbe et sans lever le crayon depuis la droite.

4 Propriétés sur les limites

On arrive sur les théorèmes « importants ».

On qualifie abusivement ces théorèmes d'« importants » car ce seront les théorèmes d'usage courant.

A Opérations sur les limites

Théorème 4.1

Les opérations sur les limites vues avec les suites sont valables pour les applications (multiplication, quotient, combinaison linéaire).
En particulier si $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$, telle que g ne s'annule pas sur I,
alors $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$

Corollaire 4.2

$\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ est stable par somme, produit, et multiplication par un réel.

Théorème 4.3 *(Composition des limites)*

Soit u définie sur I, à valeurs dans J, et f définie sur J à valeurs dans $\mathbf{R}$.
Soit $a \in \overline{I}$.

- si $\lim_{x\to a} u(x) = b$, alors $b \in \overline{J}$,
- et si de plus $\lim_{u\to b} f(u) = \ell$,

alors
$$\lim_{x\to a} f(u(x)) = \ell.$$

Preuve

$b \in \overline{J}$ en exercice (par l'absurde).
Pour la deuxième partie de la preuve, l'idée est qu'il faut partir de l'arrivée et remonter la composition.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{u\to b} f(u) = \ell$, $\exists \eta > 0, \forall u \in J, |u - b| \leqslant \eta \Rightarrow |f(u) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Or $\lim_{x\to a} u(x) = b$, donc $\exists \eta_2 > 0, \forall x \in I, |x - a| \leqslant \eta_2 \Rightarrow |u(x) - b| \leqslant \eta$.
Donc en remontant : $\forall x \in I, |x - a| \leqslant \eta_2 \Rightarrow |u(x) - b| \leqslant \eta \Rightarrow |f(u(x)) - \ell| \leqslant \varepsilon$. ■

Corollaire 4.4

La composée de deux applications continues est continue :
Si $f \in \mathcal{C}^0(I, J)$ et $g \in \mathcal{C}^0(J, \mathbf{R})$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$.

⚠ L'espace d'arrivée de f doit être inclus dans l'espace de définition de g pour que l'on puisse composer.

Théorème 4.5 *(Fonctions usuelles)*

Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition.

B Limites et relations d'ordre

Les preuves de cette partie sont similaires à leur homologues sur les suites. Essayer de faire ces preuves est un bon exercice pour voir si on a compris celles avec les suites (mais cela dépasse le niveau d'exigence requis par le programme).

Propriété 4.6

Soit $a \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$

1. Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.
2. Si f admet une limite finie non nulle en a alors f est du même signe que sa limite au voisinage de a.

Théorème 4.7 *(Stabilité des inégalités larges)*

Soient f, g deux applications définies sur I et $a \in \overline{I}$.
On suppose que $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$.
Si f et g admettent des limites en a, alors

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x).$$

Explications
On dit que « les inégalités **larges** passent aux limites ».
⚠ Si au départ on a $f(x) < g(x)$, alors, on a quand même des inégalités larges sur les limites. Les inégalités strictes ne sont pas préservées.
On peut alléger les hypothèses en supposant que l'inégalité n'est valable que sur un voisinage de a.

Preuve
Par l'absurde. Si la limite de f est strictement supérieure à celle de g, alors on pose $\varepsilon = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) > 0$. Et on aboutit à une contradiction dès que l'on s'approche de a à η près (en choisissant bien η d'après ε). ■

Corollaire 4.8 *(Théorème d'encadrement ou des gendarmes)*

Soient φ, ψ et f trois fonctions définies sur I, et $a \in \overline{I}$. Si on suppose que

- $\forall x \in I, \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$,
- φ et ψ admettent une limite finie commune ℓ en a,

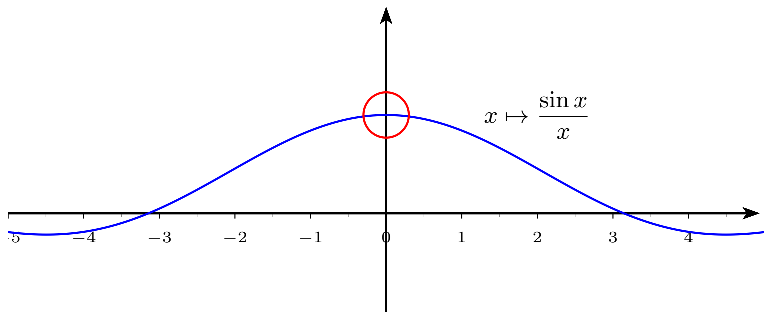
alors f admet une limite en a et $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Exemple

1. Montrer que $\forall x \geqslant 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.
2. En déduire $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

Solution :

1. Soit $f : x \mapsto \sin x - x + \frac{x^2}{2}$.
f est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$, donc en particulier sur $[0, +\infty[$.
$\forall x \geqslant 0,\ f'(x) = \cos x - 1 + x$ et $f''(x) = -\sin x + 1$.
Or $\forall x \in \mathbf{R}$, $\sin x \leqslant 1$, donc $f''(x) \geqslant 0$. Ainsi f' est croissante sur $\mathbf{R}_+$.
Or $f'(0) = 0$, donc f' est positive sur $\mathbf{R}_+$.
Ainsi f est croissante sur $\mathbf{R}_+$, et $f(0) = 0$, donc f est positive sur $\mathbf{R}_+$, donc $\forall x \geqslant 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leqslant \sin x$.
Par un raisonnement similaire (plus simple), on montre que $\sin(x) \leqslant x$ sur $\mathbf{R}_+$.
2. D'après les inégalités précédentes, en divisant par $x > 0$, on obtient $1 - \frac{x}{2} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant 1$.
Or $\lim_{x \to 0^+} 1 - \frac{x^2}{2} = 1$, donc par encadrement, $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
La fonction étant paire (immédiat), $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
Donc $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.



Corollaire 4.9 *(Théorème de majoration/minoration)*

Soient φ, f deux fonctions définies sur I, et $a \in \overline{I}$. Si on suppose que

- $\forall x \in I, \varphi(x) \leqslant f(x)$,
- $\lim_{x \to a} \varphi(x) = +\infty$,

alors f admet une limite en a et $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.
On a une propriété similaire pour $-\infty$ en remplaçant la minoration par une majoration.

Théorème 4.10 *(Théorème de la limite monotone – simplifié)*

Si $I =]\alpha;\beta[$ un intervalle **ouvert**, et f une fonction **croissante** sur I, alors f admet une limite en α et une limite en β (éventuellement infinies).

Preuve

Il suffit d'adapter le théorème de la limite monotone vu pour les suites. On considère $J = I \cap]-\infty; a[\neq \emptyset$ car I ouvert. Donc $f(J)$ est une partie non vide de $\mathbf{R}$. Comme f est croissante, elle est majorée par $f(a)$. Elle admet donc une borne supérieure.

Il suffit ensuite de montrer avec les quantificateurs que cette borne est la limite (c'est le plus petit des majorants).

On fait de même à droite et aux bornes de l'intervalle (mais ici ce n'est pas majoré ou minoré). ■

Remarque : On a un énoncé analogue pour f décroissante, il suffit de prendre $-f$ croissante pour le démontrer.

5 Fonctions continues sur un intervalle

Théorème 5.1 *(Théorème des valeurs intermédiaires)*

Si f est continue sur un intervalle I contenant $[a, b]$, alors f prend toutes les valeurs situées entre $f(a)$ et $f(b)$.
Autre formulation : L'image d'un intervalle par une application continue (à valeurs réelles) est un intervalle.

Corollaire 5.2 *(Utilisation du théorème des valeurs intermédiaires)*

Si f est continue sur un intervalle I telle qu'il existe $(a, b) \in I$, avec $f(a)f(b) \leqslant 0$ (de signes contraire). Alors f s'annule entre a et b.

Preuve

On suppose f continue sur I un intervalle de $\mathbf{R}$. On cherche à démontrer que $f(I)$ est également un intervalle. C'est-à-dire que si $y_1 < y_2$ dans $f(I)$, et $y \in [y_1, y_2]$, alors $y \in f(I)$. (Lorsque l'on a deux points quelconques de l'image, tous les points situés entre eux sont également dans l'image).

$y_1 \in f(I)$ donc $\exists a \in I$ tel que $f(a) = y_1$. De même $\exists b \in I$ tel que $f(b) = y_2$. On suppose par exemple que $a < b$ (ne nuit pas à la généralité de la preuve).

Alors on cherche $c \in I$ tel que $f(c) = y$.

On crée deux suites (a_n) et (b_n), avec $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Pour construire les autres termes, on pose à chaque fois $\frac{a_n+b_n}{2} = a_{n+1}$ si son image par f est inférieure à y et b_{n+1} sinon.

La suite (a_n) est croissante, et la suite (b_n) est décroissante. De plus leur différence tend vers 0 par construction (la distance est inférieure à $\frac{|b-a|}{2^n}$). Donc elles sont adjacentes.

D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent toutes les deux vers $c \in [a, b]$.

Par continuité de f, puis passage des inégalités à la limites, on a $f(c) = f(\lim_{n\to+\infty} a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \leqslant y$. De même avec (b_n), on obtient $f(c) \geqslant y$, donc $f(c) = y$.

Preuve 2 (plus abstraite) :

On note
$$A = \{x \in I | f(x) \leqslant y\}$$
A est un ensemble non vide de I (car $a \in A$) et il est majoré (par b). Il admet donc une borne supérieure que l'on note c.

f étant continue sur I, on a $f(c) \leqslant y$ (il suffit de créer une suite d'éléments de I qui convergent vers c avec la caractérisation de la borne supérieure, puis d'utiliser le passage à la limite des inégalités).

1. si $c = b$ alors $f(c) \geqslant y$ donc par double inégalité, $f(c) = y$
2. sinon, $c < b$, alors $]c, b]$ et tous les éléments de cet intervalle vérifient $f(x) \geqslant y$. Donc par passage à la limite, $f(c) \geqslant y$. D'où le résultat voulu.

■

Théorème 5.3 *(Théorème des bornes atteintes)*

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes : elle possède un maximum et un minimum.
Autre formulation : L'image d'un segment par une application continue est un segment.

Preuve

Admis. ■

Théorème 5.4 *(Théorème de la bijection continue)*

Si f est une application continue et strictement monotone sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{R}$,
alors f est un bijective de I sur $f(I)$ qui est un intervalle, et f^{-1} est également bijective, continue et de même monotonie que f.

Preuve

• Si f est continue, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(I)$ est un intervalle. De plus, f est strictement monotone, donc injective. Ainsi, elle est à la fois injective et surjective de I sur $f(I)$, donc f est bijective de I sur $f(I)$.
• Son application réciproque f^{-1} est donc elle-même bijective, d'application réciproque f.
• Montrons que f^{-1} est elle-même strictement monotone et de même monotonie que f.
Traitons par exemple le cas où f est strictement croissante.
Soient $(y_1, y_2) \in (f(I))^2$, avec par exemple $y_1 < y_2$.
On note $x_1 = f^{-1}(y_1) \in I$ et $x_2 = f^{-1}(y_2) \in I$.
Si par l'absurde $x_1 \geqslant x_2$, alors par croissance de f, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, c'est-à-dire $y_1 \geqslant y_2$.
C'est absurde d'après notre hypothèse.
Donc $f^{-1}(y_1) \leqslant f^{-1}(y_2)$ ce qui montre bien que f^{-1} est strictement croissante.
• Il reste enfin à montrer que f^{-1} est elle-même continue. Pour cela démontrons un lemme qui donne directement le résultat :
Lemme : Si φ est une fonction **monotone** sur un intervalle J, alors $\varphi(J)$ est un intervalle si et seulement si φ est continue sur J.
Preuve du lemme : sens réciproque : théorème des valeurs intermédiaires.
sens direct : dans le cas où φ est croissante.

Supposons par l'absurde que φ n'est pas continue en au moins un point $a \in J$.
D'après le théorème de la limite monotone, φ admet une limite à gauche et une limite à droite de a (sauf si a est un bord de J auquel cas, il n'y a qu'une seule limite, mais ceci ne change pas la preuve), et ces limites vérifient :

$$\lim_{x\to a^-} \varphi(x) \leqslant \varphi(a) \leqslant \lim_{x\to a^+} \varphi(x).$$

Au moins l'une de ces deux inégalités est stricte (sinon, φ serait continue en a).
Supposons par exemple que $\lim\limits_{x\to a^-} \varphi(x) < \varphi(a)$ et notons $y = \dfrac{1}{2}\left(\varphi(a) + \lim\limits_{x\to a^-} \varphi(x)\right)$.
Par croissance de φ, $\forall x < a$, $\varphi(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a^-} \varphi(x) < y$, et $\forall x \geqslant a$, $\varphi(x) \geqslant \varphi(a) > y$.
Ainsi, y n'admet aucun antécédent par φ dans J, ce qui est absurde.
Donc φ est continue. ■

Remarque : Une fonction dérivable peut être *strictement* monotone même si sa dérivée s'annule.
Par exemple $x \mapsto x^3$ est strictement monotone et pourtant sa dérivée s'annule en 0. Pour vérifier la stricte monotonie, il suffit de revenir à la définition : l'application conserve l'ordre strict.

$$\forall (x,y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Définition 5.5 *(Fonction racine)*

Pour $n \in \mathbf{N}$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ désigne l'application réciproque de $x \mapsto x^n$ sur son domaine de bijectivité.

Propriété 5.6 *(Domaine de défintion des racines)*

$x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie et continue sur $\mathbf{R}$ pour $n \in \mathbf{N}$ impair.
$x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie et continue sur $\mathbf{R}_+$ pour $n \in \mathbf{N}$ pair.

Exemple

tan est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.
D'après le théorème de la bijection réciproque, elle admet une fonction réciproque définie sur $\mathbf{R}$ que l'on note arctan elle-même continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

6 Comparaisons de fonctions

Rappels : revoir les croissances comparées du chapitre sur les fonctions usuelles.

A Fonctions équivalentes en un point ou à l'infini

Définition 6.1 *(Fonctions équivalentes)*

Soit f, g définies sur I et $a \in \overline{I}$ tel que g ne s'annule pas au voisinage de a.
Les fonctions f et g sont **équivalentes** en a, si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
On note $f \underset{a}{\sim} g$.

Théorème 6.2 *(Propriétés conservées par la relation d'équivalence)*

1. Deux fonctions équivalentes en a sont de même signe sur un voisinage de a.
2. Deux fonctions équivalentes en a ont le même comportement asymptotique : si l'une admet une limite, alors l'autre possède la même limite.

⚠ Ces propriétés sont des *conséquences* de l'équivalence des fonctions.
Ce n'est pas parce que deux fonctions ont la même limite en un point qu'elles sont équivalentes au voisinage de ce point (ce sont les mêmes contre-exemples qu'avec les suites).

Propriété 6.3 *(Opérations sur les fonctions équivalentes)*

1. On peut multiplier les équivalents :
$$\text{si} \quad f_1(x) \underset{a}{\sim} g_1(x) \text{ et } f_2(x) \underset{a}{\sim} g_2(x) \quad \text{alors,} \quad f_1(x)f_2(x) \underset{a}{\sim} g_1(x)g_2(x).$$
$$\text{si} \quad f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \text{ et } \lambda \in \mathbf{R}^* \quad \text{alors,} \quad \lambda f(x) \underset{a}{\sim} \lambda g(x).$$
$$\text{si} \quad f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \text{ et } \alpha \in \mathbf{R} \quad \text{alors,} \quad (f(x))^\alpha \underset{a}{\sim} (g(x))^\alpha.$$
2. Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, et $u(x) \underset{b}{\sim} a$ alors, $(f \circ u)(x) \underset{b}{\sim} (g \circ u)(x)$.
3. On ne peut **pas additionner** des équivalents.
4. On ne peut **pas composer les équivalents avec une fonction à gauche**.

Remarque : Pour les puissances, α est quelconque. En particulier les équivalents passent à l'inverse avec $\alpha = -1$.
La composition par une fonction u à droite revient à faire un changement de variable en posant $X = u(x)$. Par exemple, si $x \to 0$, alors $u(x) = \sqrt{x+1} \to 1$, et on peut poser $X = u(x) = \sqrt{x+1}$ et trouver l'équivalent pour $X \to 1$.

Théorème 6.4 *(Approximation affine)*

Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que $f'(x_0) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(x_0) \underset{x \to x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0).$$

Preuve

C'est une reformulation de la définition de la dérivabilité lorsque la dérivée est non nulle : $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \neq 0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f'(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$ ■

$$\iff f(x) - f(x_0) \underset{x \to x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$$

⚠ En général, l'équivalent est **faux** si $f'(x_0) = 0$.

Théorème 6.5 *(Équivalents usuels en 0)*

$$e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$$

$$\ln(1 + x) \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \cos x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\sqrt{1 + x} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{2} \qquad \tan x \underset{x \to 0}{\sim} x$$

$$(1 + x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x \qquad \arctan x \underset{x \to 0}{\sim} x$$

$$\frac{1}{1 + x} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -x$$

avec $\alpha \neq 0$.

Preuve

Sauf pour le cosinus, ces formules résultent de l'application directe du théorème 6.4.
La formule pour le cosinus s'obtient comme pour les équivalents de suites en utilisant le théorème de Pythagore. ■