Matrices

« **Morpheus :** Unfortunately, no one can be told what The Matrix is.
You'll have to see it for yourself. »
The Matrix

Notation : Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1 Calcul matriciel

A L'ensemble $\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$

Définition 1.1 *(Matrice)*

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
Une **matrice** à n lignes et p colonnes est une famille d'éléments de $\mathbf{K}$ indicée par les couples $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.
On note

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Les $a_{i,j}$ sont appelés les **coefficients** de la matrice A.
On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbf{K}$.

Explications
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ représente l'ensemble des systèmes homogènes à n équations et p inconnues dans $\mathbf{K}$.

Définition 1.2 *(Matrice nulle)*

On appelle **matrice nulle** et on note $0_{n,p}$ ou 0 s'il n'y a pas de risque de confusion, la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Définition 1.3 *(Matrices ligne et colonne)*

- Si $p \geqslant 1$ et $n = 1$, alors A est une matrice **ligne** (ou un *vecteur ligne*) :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_p \end{pmatrix}.$$

En général, on l'identifie au p-uplet

$$A = (a_1\,,\, a_2\,,\, a_3\,,\, \cdots\,,\, a_p).$$

- Si $p = 1$ et $n \geqslant 1$, alors A est une matrice **colonne** (ou un *vecteur colonne*) :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

B Addition matricielle

Définition 1.4 *(Addition matricielle)*

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
On définit alors la matrice somme par $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p}\\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,p}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p}\\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \cdots & a_{2,p}+b_{2,p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1}+b_{n,1} & a_{n,2}+b_{n,2} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p}\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Explications
On fait simplement la somme, coefficient par coefficient.
Bien sûr, cela requiert que les deux matrices aient **la même dimension** $n \times p$.

Définition 1.5 *(Matrice opposée)*

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
On appelle **matrice opposée** de A et on note $-A$ la matrice $(-a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$.

Explications
Ainsi, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $A + (-A) = 0$.

Propriété 1.6

La somme est une opération

- **Interne :** si $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}))^2$ alors $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.
- **Associative :** si $(A, B, C) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}))^3$ alors $(A + B) + C = A + (B + C)$.
(justifie l'absence de parenthèses)
- **Admet $0_{n,p}$ pour élément neutre :**
si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ alors $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$.
- **Tout élément admet un opposé :**
si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, alors $(-A) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $A + (-A) = 0_{n,p}$.
- **Commutative :** si $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}))^2$ alors $A + B = B + A$.

C Multiplication par les scalaires

Définition 1.7

Soient $\lambda \in \mathbf{K}$ (un **scalaire**) et $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
On définit la matrice $\lambda \cdot A$ ou plus simplement λA par $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$.

Explications
On multiplie tous les coefficients de la matrice par λ.
On remarque que cette multiplication *externe* est cohérente avec l'addition :
Si $n \in \mathbf{N}$ alors $nA = A + A + \cdots + A$ (n fois).

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -2\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & -3 & 0 & 6\\ 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 6 & 3 & 3 & 6 & -6\end{pmatrix}$$

Propriété 1.8

La multiplication *externe*[1] « . » vérifie

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $1 \cdot A = A$.
- **Associative :** $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $(\lambda \times \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$
- **Distributive par rapport à + (scalaires) :**
$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $(\lambda + \mu).A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$.
- **Distributive par rapport à + (matrices) :**
$\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\forall(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}))^2$, $\lambda \cdot (A + B) = \lambda.A + \lambda \cdot B$.

D Multiplication entre matrices

La multiplication terme à terme des coefficients des matrices n'est pas l'opération intéressante ici.
il s'agit plutôt de construire une multiplication qui s'accorde avec les méthodes de résolution de systèmes.

1. On dit que la multiplication est externe, parce qu'on multiplie une matrice par un élément qui n'est pas une matrice, mais un scalaire.

Définition 1.9

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$.
On définit la **matrice produit** $A \times B$ ou $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ par

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} \right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}.$$

Méthode

Pour visualiser le calcul, on écrit (au brouillon) :

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,q} \\ b_{2,1} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & & b_{p,q} \end{pmatrix} \\
 & \downarrow \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \rightarrow &
\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{p} a_{1,k}b_{k,1} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{p} a_{1,k}b_{k,q} \\ \vdots & \vdots & \\ \sum\limits_{k=1}^{p} a_{n,k}b_{k,1} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{p} a_{n,k}b_{k,q} \end{pmatrix}.
\end{array}$$

⚠ Les deux matrices ne sont pas de même taille. Il faut multiplier une matrice $n \times p$ avec une matrice $p \times q$ pour obtenir une matrice $n \times q$

Explications
Pour comprendre un intérêt de cette multiplication, il faut revenir aux systèmes linéaires :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc}
a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\cdots & +a_{1,p}x_p & = & b_1 \\
a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\cdots & +a_{2,p}x_p & = & b_2 \\
\vdots & & & & & \vdots \\
a_{n,1}x_1 & +a_{n,2}x_2 & +\cdots & +a_{n,p}x_p & = & b_n
\end{array} \right. .$$

Si on pose les matrices suivantes :

$$A = (a_{i,j})_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$AX = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\cdots & +a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\cdots & +a_{2,p}x_p \\ \vdots & & & \\ a_{n,1}x_1 & +a_{n,2}x_2 & +\cdots & +a_{n,p}x_p \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système, c'est donc résoudre l'équation d'inconnue X : $AX = B$.
On vient de transformer un système de n équations à p inconnues, en un simple système linéaire à une seule inconnue.
Si on travaillait dans $\mathbf{R}$, ou $\mathbf{C}$, il suffirait de diviser l'équation par a (s'il est non nul) pour obtenir x. Malheureusement, ce n'est pas aussi facile avec les matrices car en général on ne peut pas *diviser* par A, c'est-à-dire multiplier par l'inverse A^{-1} car cette matrice n'existe pas en général. Et même quand cette matrice existe, elle est difficile à calculer. Ce sera un des problèmes majeurs de ce chapitre.

Propriété 1.10

La multiplication matricielle est

- **Associative :** $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
- **Linéaire à gauche :** $(A + \lambda A') \times B = A \times B + \lambda A' \times B$.
- **Linéaire à droite :** $A \times (B + \lambda B') = A \times B + \lambda A \times B'$.

avec $(A, A') \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}))^2$, et $(B, B') \in (\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K}))^2$, et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

⚠ Le produit matriciel n'est **pas commutatif**.
D'une part, cela n'a aucun sens en raison des tailles des matrices. Si le produit matriciel AB existe, en général BA n'existe pas car les tailles des matrices ne sont pas compatibles.
Et même pour les matrices carrées où ce problème disparait, le produit n'est en général pas commutatif.

Exemple

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer AB et BA.
Solution :

⚠ On peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$.
La phrase apprise en collège « un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul » est fausse avec les matrices.
Dans une équation avec un produit on ne pourra donc **pas simplifier** par A (sauf si A est inversible, ce qui sera vu plus loin).

Exemple

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$.
Calculer AB et AC.
Solution :

Définition 1.11 *(Rappel) (Rang d'une matrice)*

Par définition, le **rang** d'une matrice est égal au rang de son système linéaire homogène associé.
Il est donc égal au nombre de pivots de la matrice échelonnée.

E Transposée d'une matrice

Dans cette partie, on notera souvent $A_{i,j}$ le coefficient de A d'indice i, j.

Définition 1.12

Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, alors on note ${}^tA$ ou A^{T} la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ telle que

$$\forall (j,i) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}), \qquad \left(A^{\mathrm{T}}\right)_{j,i} = A_{i,j}.$$

⚠ On change d'espace de matrice : si la matrice A est de taille $n \times p$ alors que la matrice A^{T} est de taille $p \times n$.

Méthode

Cela revient à faire une symétrie suivant une diagonale virtuelle de la matrice : on échange les lignes et les colonnes.
Par exemple pour la transposée d'une matrice $2 \times p$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1,p} & a_{2,p} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \end{pmatrix}$$

Exemple

Transposée de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -7 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 8 \\ 3 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Propriété 1.13 *(Propriétés de la transposition)*

Pour $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$,

1. **linéarité :** $(\lambda A + \mu B)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}} + \mu B^{\mathrm{T}}$.
2. **involutivité :** $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = A$.
3. **conservation du rang :** $\operatorname{rg}\left(A^{\mathrm{T}}\right) = \operatorname{rg} A$.

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$,

4. **produit :** $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$.

⚠ La transposition échange l'ordre d'un produit.

Preuve

1. 2. immédiat
3. admis
4. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. D'un côté, $\left({}^t(AB)\right)_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} b_{k,i}$.

   D'un autre côté, $\left({}^tB\,{}^tA\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} ({}^tB)_{i,k} ({}^tA)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,i} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} b_{k,i}$.

   Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $\quad \left({}^t(AB)\right)_{i,j} = \left({}^tB\,{}^tA\right)_{i,j}$. D'où le résultat voulu. ∎

2 Matrices carrées

L'avantage des matrices carrées est que l'on peut faire toutes les opérations matricielles voulues entre-elles (somme, produit, transposition...) et que le résultat est alors une matrice carrée qui a la même taille.

A L'algèbre des matrices carrées

Définition 2.1 *(Matrices carrées)*

On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices carrées **d'ordre** n dans $\mathbf{K}$.
Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, les **coefficients diagonaux** de la matrice sont ceux qui apparaissent sur la diagonale : $a_{i,i}$.

$$A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{1,1}} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \boxed{a_{2,2}} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \boxed{a_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

- Si $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ alors A est une matrice **diagonale**.

$$D = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & (0) \\ & a_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

- Si $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$ alors A est une matrice **triangulaire supérieure**.

$$A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ (0) & & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

- Si $a_{i,j} = 0$ pour $i < j$ alors A est une matrice **triangulaire inférieure**.

$$A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & (0) \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Lorsque les coefficients diagonaux sont aussi nuls, on parle de matrice triangulaire supérieure *stricte* ou triangulaire inférieure *stricte*.

Exemple

Par définition, une matrice carrée échelonnée est triangulaire supérieure.

Définition 2.2

On appelle matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et on note I_n, la matrice ayant des 1 sur la diagonale et tous les autres coefficients nuls.

$$I_n = (\delta_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}.$$

Explications

Le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.
Ainsi, il indique que le coefficient est nul sauf s'il est sur la diagonale ($i = j$), auquel cas, il vaut 1.

Propriété 2.3

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$,

$$A\,I_n = I_n\,A = A.$$

La matrice identité est l'*élément unité* pour la multiplication matricielle.

Propriété 2.4

Sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, le produit matriciel est (en plus des propriétés déjà énoncées)

1. **interne :** si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
2. **admet un élément unité :** I_n.

B Puissance d'une matrice carrée

Définition 2.5

Soit $p \in \mathbf{N}$, on définit **la puissance** p-ième d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ par récurrence avec

- $A^0 = I_n$.
- $\forall p \in \mathbf{N},\ A^{p+1} = A \times A^p$.

Exemple

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{alors } A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple *(À connaître)*

On définit la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, calculer J^p.

Solution :

Propriété 2.6 *(Puissance d'une matrice diagonale)*

Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice diagonale de coefficients diagonaux $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$. On note

$$D = \operatorname{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Pour $p \in \mathbf{N}$, on a alors

$$D^p = \operatorname{diag}\,(\lambda_1^p, \lambda_2^p, \cdots, \lambda_n^p) = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & & (0) \\ & \lambda_2^p & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n^p \end{pmatrix}.$$

Preuve

Par récurrence. ■

Propriété 2.7 *(Formule du binôme de Newton)*

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ **commutent**, alors la formule du binôme de Newton est valable

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k.$$

⚠ Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors en général

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

L'identité remarquable n'est vraie que si A et B commutent, c'est-à-dire si $AB = BA$.

Preuve

C'est exactement la même preuve que sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. ■

Propriété 2.8 *(Égalité de Bernoulli)*

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ **commutent**, alors la l'égalité de Bernoulli est valable

$$A^{p+1} - B^{p+1} = (A-B) \sum_{k=0}^{p} A^k B^{p-k}.$$

Preuve

Comme sur $\mathbf{R}$. ■

Méthode *(Calculer la puissance d'une matrice grâce au binôme)*

On utilise souvent cette formule avec la matrice I_n (qui commute avec toutes les autres matrices) :

$$(A + I_n)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k.$$

En particulier :

$$\begin{aligned} B^p &= (B - I_n + I_n)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (B - I_n)^k \\ &= (B + I_n - I_n)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} (B + I_n)^k. \end{aligned}$$

Exemple

On définit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ & & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice a des 1 partout sauf sur la diagonale où elle a des 0. Calculer A^p pour $p \in \mathbf{N}^*$.

Solution :

Définition 2.9 *(Matrice nilpotente)*

Un matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite **nilpotente** s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ telle que $A^p = 0_n$.
L'indice de nilpotence est le plus petit exposant $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

Explications

L'intérêt d'une matrice nilpotente est qu'il est facile de calculer ses puissances car elles s'annulent toutes à partir d'un certain rang.
Les matrices nilpotentes ne font pas l'objet d'un travail particulier dans le programme, mais elles sont primordiales dans l'étude générale des matrices.

C Matrices triangulaires et diagonales

Propriété 2.10 *(Sous-algèbre des matrices triangulaires supérieures)*

Si on note $T_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors

1. $I_n \in T_n(\mathbf{K})$.
2. T_n est stable par combinaison linéaire :
   Si $(A, B) \in T_n(\mathbf{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ alors $\lambda A + \mu B \in T_n(\mathbf{K})$.
3. T_n est stable par multiplication :
   Si $(A, B) \in T_n(\mathbf{K})$ alors $AB \in T_n(\mathbf{K})$.

La transposée d'un matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure.

Propriété 2.11

Les mêmes propriétés de stabilité s'appliquent aux matrices inférieures (par application de la transposition) et aux matrices diagonales (qui sont à la fois supérieures et inférieures).

D Transposées de matrices carrées

Définition 2.12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

- On dit que A est **symétrique** si $A = A^{\mathrm{T}}$,
  c'est-à-dire pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} = a_{j,i}$.
- On dit que A est **antisymétrique** si $A = -A^{\mathrm{T}}$,
  c'est-à-dire pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} = -a_{j,i}$.

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n.
On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques de taille n.

Remarque : Pour qu'une matrice soit symétrique, ou antisymétrique, il faut qu'elle ait le même nombre de lignes que de colonnes : $n = p$. La matrice est donc nécessairement carrée.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ est symétrique, } B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est antisymétrique.}$$

Propriété 2.13

Une matrice antisymétrique a des 0 sur sa diagonale.

Preuve

$a_{i,i} = -a_{i,i}$ donc $a_{i,i} = 0$ ■

Propriété 2.14

1. La matrice nulle est la seule matrice à la fois symétrique et antisymétrique.
2. Toute matrice peut s'écrire de manière **unique** comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
   Cette décomposition est
   $$A = \frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}}) + \frac{1}{2}(A - A^{\mathrm{T}}).$$

Preuve

1. Si $A \in \mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n$ alors pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\quad a_{i,j} = a_{j,i} = -a_{i,j}$. Donc $a_{i,j} = 0$
   Donc 0_n est la seule matrice à la fois symétrique et antisymétrique.
2. On raisonne par analyse-synthès. Cet exercice doit faire penser à l'exercice de décomposition d'une fonction quelconque en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
   Analyse :
   Si $A = S + T$ avec $S \in \mathcal{S}_n$ et $T \in \mathcal{A}_n$.
   Alors $A^{\mathrm{T}} = S^{\mathrm{T}} + T^{\mathrm{T}} = S - T$.
   On a donc
   $$\begin{cases} A &= S + T \\ A^{\mathrm{T}} &= S - T \end{cases}.$$
   La demi-somme des deux lignes précédentes donne $\frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}}) = S$.
   De même, la demi-différence donne $\frac{1}{2}(A - A^{\mathrm{T}}) = T$.
   Synthèse :
   Si on note $S = \frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}})$ et $T = \frac{1}{2}(A - A^{\mathrm{T}})$, alors
   $$S^{\mathrm{T}} = \left(\frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}})\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}(A^{\mathrm{T}} + A) = \frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}}) = S.$$
   $$T^{\mathrm{T}} = \left(\frac{1}{2}(A - A^{\mathrm{T}})\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}(A^{\mathrm{T}} - A) = -\frac{1}{2}(A - A^{\mathrm{T}}) = -T.$$
   donc $S \in \mathcal{S}_n$ et $T \in \mathcal{A}_n$.
   Et $S + T = \frac{1}{2}\left(A + A^{\mathrm{T}} + A - A^{\mathrm{T}}\right) = A$. Donc S et T conviennent.

■

E Matrices carrées inversibles

Définition 2.15

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite **inversible**, s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = BA = I_n$
L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ se note $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ ou GL_n : c'est le **groupe général linéaire**.

⚠ Puisque l'on multiplie tantôt à droite et tantôt à gauche, la notion d'inverse n'est valable que pour des matrices **carrées.**

Exemple

Étudier l'inversibilité de I_n et de la matrice nulle.
Solution :

Théorème 2.16 *(Propriétés de l'inverse)*

1. **Unicité :** si A est inversible, alors son inverse est unique. On le note A^{-1}.
2. **Involutivité :** pour $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. **Produit :** Si $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, alors $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

⚠ Comme avec la transposition, pour le produit, il faut échanger l'ordre des termes.

Preuve

1. On suppose qu'il y en a deux, et on trouve qu'ils sont égaux.
2. Trivial.
3. Faire le produit $ABB^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1}AB = I_n$.

■

⚠ Le produit de deux matrices inversibles est inversible, par contre, en général leur somme ne l'est pas. (prendre I_n et $-I_n$). L'inverse n'est **PAS linéaire**.

Exemple *(réciproque)*

Soient $(A,\, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que si AB est inversible, alors, A et B le sont.

Solution :

Exemple

Montrer que si A et B sont deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors

$$AB = 0 \Rightarrow A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \text{ et } B \notin \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}).$$

Solution :

Théorème 2.17

Pour qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ soit inversible, il suffit qu'il existe un inverse à gauche, ou un inverse à droite.
C'est-à-dire A inversible $\iff (\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \text{ tel que } AB = I_n)$,
$\iff (\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \text{ tel que } BA = I_n)$.

Preuve

Admis ■

Méthode *(Méthode du polynôme annulateur)*

Objectif : Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et calculer A^{-1}.

Méthode : Calculer A^2, A^3... et rechercher une relation polynomiale simple entre les puissances de A. Par exemple $A^3 + 3A^2 - A + 2I_n = 0$.
Si la relation polynomiale fait intervenir l'**identité**, alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et A^{-1} facile à calculer :

Obtention de A^{-1} (permet de montrer l'inversibilité de A en même temps).

- On met l'identité d'un côté de l'égalité.
- De l'autre, on factorise par A.

Dans l'exemple : $A\left(A^2 + 3A - I_n\right) = -2I_n$.
Si on pose $B = -\frac{1}{2}\left(A^2 + 3A - I_n\right)$, alors on a $AB = BA = I_n$.
Ainsi on a montré que A est inversible, et que $A^{-1} = B$.

Remarque : Si on trouve une relation polynomiale **de degré minimal** qui ne fait pas intervenir I_n, alors A n'est pas inversible.

Preuve de la remarque sur un exemple :
Par exemple si $A^3 + 3A^2 - A = 0$, alors on a $A\left(A^2 + 3A - I_n\right) = 0$.
Si par l'absurde, A était inversible, alors en multipliant par A^{-1}, on obtiendrait $A^2 + 3A - I_n = 0$.
On a donc une relation polynomiale de degré 2 sur les puissances de A.
C'est absurde car on a supposé que la relation trouvée initialement était de degré minimal ! Donc A n'est pas inversible.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A^3 - 4A^2 + 7A - 4I = 0$.
Solution :

Exemple

En s'aidant de la méthode précédente, montrer que la matrice J d'ordre $n \geqslant 2$ (matrice uniquement composée de 1) n'est pas inversible.

Solution :

3 Applications de l'algorithme de Gauss-Jordan

Nous allons maintenant faire le lien entre les manipulations matricielles que nous avions vu pour les systèmes et le calcul matriciel.

A Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

Définition 3.1 *(Opérations élémentaires)*

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, Soient $(i,j) \in (\llbracket 1,n \rrbracket)^2$ et $\lambda \in \mathbf{K}^*$,
On appelle **opération élémentaire sur les lignes** de A, les opérations

- **permutation** (échange) des lignes i et j notée $L_i \leftrightarrow L_j$.
- **dilatation** (multiplication) de la ligne i par λ notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- **transvection** (addition) de la ligne j multipliée par λ à la ligne i notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

On définit de même les opérations élémentaires sur les colonnes :

$$C_i \leftrightarrow C_j,\ C_i \leftarrow \lambda C_i \text{ et } C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j.$$

Remarque : Comme dans le chapitre sur les systèmes linéaires, on impose au scalaire d'être non nul pour éviter les problèmes d'*inversibilité*.

Définition 3.2

Une **matrice de permutation** est une matrice carrée symétrique $P_{i,j}$ de la forme

$$\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{ccccccccccc} & & & i\text{-ème} & & & & j\text{-ème} & & & \end{array} \\
\begin{array}{r} \\ \\ \\ i\text{-ème ligne}\rightarrow \\ \\ \\ \\ j\text{-ème ligne}\rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & | & & & & | & & & \\
 & \ddots & & | & & & & | & & & \\
 & & 1 & | & & & & | & & & \\
- & - & - & 0 & - & - & - & 1 & - & - & - \\
 & & & | & 1 & & & | & & & \\
 & & & | & & \ddots & & | & & & \\
 & & & | & & & 1 & | & & & \\
- & - & - & 1 & - & - & - & 0 & - & - & - \\
 & & & | & & & & | & 1 & & \\
 & & & | & & & & | & & \ddots & \\
 & & & | & & & & | & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

C'est la matrice identité dans laquelle on a permuté les lignes i et j.

Définition 3.3

Une **matrice de dilatation** est une matrice carrée symétrique $D_i(\lambda)$ de la forme

$$\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{ccccccc} & & & i\text{-ème} & & & \end{array} \\
\begin{array}{r} \\ \\ \\ i\text{-ème ligne}\rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & | & & & \\
 & \ddots & & | & & & \\
 & & 1 & | & & & \\
- & - & - & \lambda & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

C'est la matrice identité dans laquelle on a multiplié la ligne i par λ.

Définition 3.4

Une **matrice de transvection** est une matrice carrée $T_{i,j}(\lambda)$ de la forme

$$\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{ccccccc} & & i\text{-ème} & & j\text{-ème} & & \end{array} \\
i\text{-ème ligne}\rightarrow & \begin{pmatrix}
1 & & | & & | & & \\
 & \ddots & | & & | & & \\
- & - & 1 & - & \lambda & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

C'est la matrice identité dans laquelle on a ajouté λ fois la ligne j à la ligne i.

Théorème 3.5 *(Interprétation matricielle des opérations élémentaires)*

Chaque opération élémentaire sur les lignes correspond à la multiplication à gauche par une matrice particulière :

$$\begin{array}{lcl}
L_i \leftrightarrow L_j & \text{“} \iff \text{”} & P_{i,j}. \\
L_i \leftarrow \lambda L_i & \text{“} \iff \text{”} & D_i(\lambda). \\
L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j & \text{“} \iff \text{”} & T_{i,j}(\lambda).
\end{array}$$

Les opérations correspondantes sur les colonnes se font par des opérations à droite (avec la transposée de la matrice élémentaire).

Pour se souvenir :

Multiplication à gauche = Opération sur les lignes

Left = **L**ignes

Remarque : Les matrices pour faire les opérations sont carrées, mais elles peuvent être utilisées pour « opérer » sur des matrices rectangulaires.

Théorème 3.6 *(Inversibilité des matrices des opérations élémentaires)*

On a pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lambda \in \mathbf{K}^*$,

- La matrice de permutation P_{ij} est inversible et son inverse est elle-même,
- La matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ est inversible[2] d'inverse $D_i(\frac{1}{\lambda})$
- La matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda)$ est inversible d'inverse $T_{i,j}(-\lambda)$

Preuve

Il suffit d'écrire les opérations correspondantes sur les lignes : chercher l'inverse correspond à « défaire » le travail. ■

2. C'est ici qu'on a besoin de $\lambda \neq 0$.

Théorème 3.7

Soit un système linéaire représenté sous forme matricielle par $AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, alors

$$AX = B \qquad \text{est équivalent à} \qquad (PA)X = PB.$$

Preuve

Sens direct : il suffit de multiplier par P cela conserve l'égalité.

Sens réciproque : il suffit de multiplier par P^{-1} car $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ ■

Remarque : La matricePA a la même taille que A et PB a la même taille que B

Théorème 3.8 *(Matrices équivalentes en ligne)*

Soit un système $AX = B$,

Lorsque l'on effectue une suite finie d'opérations sur les lignes simultanément sur A et B, on obtient un système équivalent $A'X = B'$.

Deux matrices qui se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opération sur les lignes sont dites **équivalentes en ligne**.

On note

$$A \underset{L}{\sim} A'.$$

Preuve

Faire des opérations sur les lignes, c'est multiplier à gauche par des matrices inversibles $E_1, E_2, \cdots E_n$. On obtient donc le système

$$E_n E_{n-1} \cdots E_2 E_1 AX = E_n E_{n-1} \cdots E_2 E_1 B.$$

Comme les $E_i \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, leur produit $E \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et les systèmes sont bien équivalents. ■

Méthode *(Application au pivot de Gauss)*

On effectue matriciellement l'algorithme du pivot de Gauss comme nous l'avons fait dans le chapitre sur les systèmes linéaires.

Plutôt que de multiplier A et B en même temps comme dans le théorème précédent, on peut aussi multiplier directement la matrice augmentée $A|B$. C'est strictement équivalent.

Exemple

Réaliser cet algorithme sur $M = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Solution :

B Lien entre la recherche d'un inverse et la résolution matricielle

Chercher l'inverse de A c'est chercher une matrice C telle que $AC = I_n$.
Si on écrit C sous la forme de n vecteurs colonne accolés alors $C = (X_1|X_2|\cdots|X_n)$.

De la même façon, on décompose I_n en n vecteurs colonnes. On note e_i le vecteur colonne avec 1 à la ième ligne et 0 ailleurs :
$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $I_n = (e_1|e_2|\cdots|e_n)$ et on peut écrire la recherche d'inverse :

$$AC = I_n \iff A(X_1|X_2|\cdots|X_n) = (e_1|e_2|\cdots|e_n) \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ AX_i = e_i.$$

Trouver C revient à résoudre les n systèmes linéaires :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi, pour trouver C on peut effectuer le pivot de Gauss sur ces matrices augmentées. Cependant, plutôt que de résoudre n systèmes différents dont seule la dernière colonne change, on peut se contenter de résoudre le système en fonction des paramètres $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & x_i \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \end{array}\right)$$

Ensuite, on obtient la i-ème colonne de $C = A^{-1}$ en prenant $x_i = 1$ et $x_j = 0$ pour $j \neq i$. La matrice est inversible à la seule condition que ces systèmes admettent tous une unique solution : c'est-à-dire pour $\mathrm{rg}\,(A) = n$.

Exemple

Appliquer cette méthode à la recherche de l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution :

Méthode *(Calcul de l'inverse d'une matrice)*

Trouver l'inverse de A revient à la mettre sous forme échelonnée. Le produit à gauche par les matrices d'opérations élémentaires donne alors la matrice inverse : $EA = I_n \iff E = A^{-1}$.
Concrètement, en effectuant la mise sous forme réduite de A, je multiplie successivement les matrices des opérations élémentaires pour connaître leur produit.
Autre méthode : On résout le système $AX = B$ qui donne $X = A^{-1}B$

Remarque finale :
Comme nous l'avons vu, il existe de nombreuses façon d'interpréter les résultats et en particulier l'algorithme de Gauss. Ce qui est riche, c'est d'être capable de faire le pont entre ces différentes interprétations, pour être capable de passer facilement de l'une à l'autre.

4 Caractérisation des matrices inversibles

Petit récapitulatif (partiel) sur les matrices inversibles, lien entre la matrice et le système associé.

Théorème 4.1 *(Caractérisation d'une matrice inversible)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes

1. A est inversible,
2. A est de rang n
3. $A \underset{L}{\sim} I_n$
4. Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution,
5. Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.

Preuve

Nous allons faire une preuve « en boucle ».
$(a) \Rightarrow (b)$ d'après l'explication précédente.
$(b) \Rightarrow (c)$ la définition du rang l'affirme avec la matrice échelonnée réduite.
$(c) \Rightarrow (d)$ il n'y a que des inconnues principales, et aucune ligne de la matrice réduite n'est nulle. Donc le système n'admet qu'une solution.
$(d) \Rightarrow (e)$ évident
$(e) \Rightarrow (a)$ c'est ce que nous avons expliqué précédemment :
On peut construire l'inverse en accolant des solutions X_i côte à côte chacune correspondant à une solution de $AX = e_i$ avec e_i le vecteur colonne qui a 1 à la position i et 0 partout ailleurs. ∎

Corollaire 4.2

Toute matrice inversible s'écrit comme produit de permutations, dilatations et transvections.

Remarque : On dit que les matrices des opérations élémentaires *engendrent* $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$

Preuve

En effet, $A \underset{L}{\sim} I_n$, donc il existe un produit de permutations, dilatations et transvections E, tel que $EA = I_n$, c'est-à-dire $E^{-1} = A$. Or nous avons vu que E^{-1} était alors également exprimable comme un produit de matrice d'opérations élémentaires. ■

Propriété 4.3

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, alors le système $AX = B$ admet une unique solution $X = A^{-1}B$.
Dans ce cas, on dit que le système est un **système de Cramer.**

5 Cas des matrices d'ordre 2

Théorème 5.1 *(Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2)*

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbf{K}^4$, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$.
A est inversible si et seulement si $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ et dans ce cas

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} \boldsymbol{d} & -b \\ -c & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}.$$

$\det(A)$ est le **déterminant** de A.

Explications

Retour au collège : le critère $ad - bc \neq 0$ correspond à un produit en croix.
Si le produit en croix « fonctionne », c'est-à-dire si $ad = bc$ alors c'est que les deux lignes sont proportionnelles. La matrice est donc de rang 0 ou 1.
La réciproque est aussi vraie.

Exemple

Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Solution :