

# MATRICES

« **Morpheus** : Unfortunately, no one can be told what The Matrix is.  
You'll have to see it for yourself. »  
The Matrix

**Notation** : Dans ce chapitre,  $\mathbf{K}$  désigne  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .

## 1 CALCUL MATRICIEL

### A L'ensemble $\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$

#### — Définition 1.1 (Matrice) —

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls.

Une **matrice** à  $n$  lignes et  $p$  colonnes est une famille d'éléments de  $\mathbf{K}$  indicée par les couples  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ .

On note

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Les  $a_{i,j}$  sont appelés les **coefficients** de la matrice  $A$ .

On note  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  l'ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes et à coefficients dans  $\mathbf{K}$ .

#### Explications

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  représente l'ensemble des systèmes homogènes à  $n$  équations et  $p$  inconnues dans  $\mathbf{K}$ .

#### — Définition 1.2 (Matrice nulle) —

On appelle **matrice nulle** et on note  $0_{n,p}$  ou  $0$  s'il n'y a pas de risque de confusion, la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

#### — Définition 1.3 (Matrices ligne et colonne) —

- Si  $p \geq 1$  et  $n = 1$ , alors  $A$  est une matrice **ligne** (ou un *vecteur ligne*) :

$$A = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ \cdots \ a_p).$$

En général, on l'identifie au  $p$ -uplet

$$A = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_p).$$

- Si  $p = 1$  et  $n \geq 1$ , alors  $A$  est une matrice **colonne** (ou un *vecteur colonne*) :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

## B Addition matricielle

### Définition 1.4 (Addition matricielle)

Soient  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  et  $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ .

On définit alors la matrice somme par  $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  :

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \cdots & a_{1,p} + b_{1,p} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \cdots & a_{2,p} + b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & a_{n,2} + b_{n,2} & \cdots & a_{n,p} + b_{n,p} \end{pmatrix}.$$

### Explications

On fait simplement la somme, coefficient par coefficient.

Bien sûr, cela requiert que les deux matrices aient **la même dimension**  $n \times p$ .

### Définition 1.5 (Matrice opposée)

Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ .

On appelle **matrice opposée** de  $A$  et on note  $-A$  la matrice  $(-a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ .

### Explications

Ainsi, pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ ,  $A + (-A) = 0$ .

### Propriété 1.6

La somme est une opération

- **Interne** : si  $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}))^2$  alors  $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ .
- **Associative** : si  $(A, B, C) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}))^3$  alors  $(A + B) + C = A + (B + C)$ .  
(justifie l'absence de parenthèses)
- **Admet  $0_{n,p}$  pour élément neutre** :  
si  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  alors  $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$ .
- **Tout élément admet un opposé** :  
si  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ , alors  $(-A) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  et  $A + (-A) = 0_{n,p}$ .
- **Commutative** : si  $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}))^2$  alors  $A + B = B + A$ .

## C Multiplication par les scalaires

### Définition 1.7

Soient  $\lambda \in \mathbf{K}$  (un **scalaire**) et  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ .

On définit la matrice  $\lambda \cdot A$  ou plus simplement  $\lambda A$  par  $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ .

### Explications

On multiplie tous les coefficients de la matrice par  $\lambda$ .

On remarque que cette multiplication *externe* est cohérente avec l'addition :

Si  $n \in \mathbf{N}$  alors  $nA = A + A + \cdots + A$  ( $n$  fois).

### Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 3 & 3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

### Propriété 1.8

La multiplication *externe*<sup>1</sup> «  $\cdot$  » vérifie

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), 1 \cdot A = A$ .
- **Associative** :  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), (\lambda \times \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$
- **Distributive par rapport à + (scalaires)** :  
 $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), (\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ .
- **Distributive par rapport à + (matrices)** :  
 $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}))^2, \lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ .

## D Multiplication entre matrices

La multiplication terme à terme des coefficients des matrices n'est pas l'opération intéressante ici.

il s'agit plutôt de construire une multiplication qui s'accorde avec les méthodes de résolution de systèmes.

1. On dit que la multiplication est externe, parce qu'on multiplie une matrice par un élément qui n'est pas une matrice, mais un scalaire.

**Définition 1.9**

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ .

On définit la **matrice produit**  $A \times B$  ou  $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$  par

$$AB = \left( \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}.$$

**Méthode**

Pour visualiser le calcul, on écrit (au brouillon) :

⚠ Les deux matrices ne sont pas de même taille. Il faut multiplier une matrice  $n \times p$  avec une matrice  $p \times q$  pour obtenir une matrice  $n \times q$

**Explications**

Pour comprendre un intérêt de cette multiplication, il faut revenir aux systèmes linéaires :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Si on pose les matrices suivantes :

$$A = (a_{i,j})_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$AX = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système, c'est donc résoudre l'équation d'inconnue  $X : AX = B$ .

On vient de transformer un système de  $n$  équations à  $p$  inconnues, en un simple système linéaire à une seule inconnue.

Si on travaillait dans  $\mathbf{R}$ , ou  $\mathbf{C}$ , il suffirait de diviser l'équation par  $a$  (s'il est non nul) pour obtenir  $x$ . Malheureusement, ce n'est pas aussi facile avec les matrices car en général on ne peut pas *diviser* par  $A$ , c'est-à-dire multiplier par l'inverse  $A^{-1}$  car cette matrice n'existe pas en général. Et même quand cette matrice existe, elle est difficile à calculer. Ce sera un des problèmes majeurs de ce chapitre.

**Propriété 1.10**

La multiplication matricielle est

- **Associative** :  $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ .
- **Linéaire à gauche** :  $(A + \lambda A') \times B = A \times B + \lambda A' \times B$ .
- **Linéaire à droite** :  $A \times (B + \lambda B') = A \times B + \lambda A \times B'$ .

avec  $(A, A') \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}))^2$ , et  $(B, B') \in (\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K}))^2$ , et  $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbf{K})$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ .

⚠ Le produit matriciel n'est **pas commutatif**.

D'une part, cela n'a aucun sens en raison des tailles des matrices. Si le produit matriciel  $AB$  existe, en général  $BA$  n'existe pas car les tailles des matrices ne sont pas compatibles.

Et même pour les matrices carrées où ce problème disparaît, le produit n'est en général pas commutatif.

**Exemple**

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $AB$  et  $BA$ .

**Solution :**

⚠ On peut avoir  $AB = 0$  avec  $A \neq 0$  et  $B \neq 0$ .

La phrase apprise en collège « un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul » est fautive avec les matrices.

Dans une équation avec un produit on ne pourra donc **pas simplifier** par  $A$  (sauf si  $A$  est inversible, ce qui sera vu plus loin).

**Exemple**

On note  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $AB$  et  $AC$ .

**Solution :**

**Définition 1.11** (*Rappel*) (*Rang d'une matrice*)

Par définition, le **rang** d'une matrice est égal au rang de son système linéaire homogène associé.

Il est donc égal au nombre de pivots de la matrice échelonnée.

**E Transposée d'une matrice**

Dans cette partie, on notera souvent  $A_{i,j}$  le coefficient de  $A$  d'indice  $i, j$ .

**Définition 1.12**

Soit la matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ , alors on note  ${}^tA$  ou  $A^T$  la matrice de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$  telle que

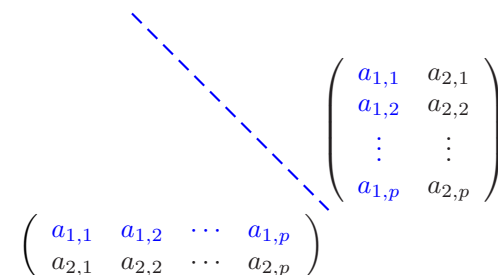
$$\forall (j,i) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}), \quad (A^T)_{j,i} = A_{i,j}.$$

⚠ On change d'espace de matrice : si la matrice  $A$  est de taille  $n \times p$  alors que la matrice  $A^T$  est de taille  $p \times n$ .

**Méthode**

Cela revient à faire une symétrie suivant une diagonale virtuelle de la matrice : on échange les lignes et les colonnes.

Par exemple pour la transposée d'une matrice  $2 \times p$



**Exemple**

Transposée de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -7 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 8 \\ 3 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

**Propriété 1.13** (*Propriétés de la transposition*)

Pour  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  et  $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ ,

1. **linéarité** :  $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$ .
2. **involutivité** :  $(A^T)^T = A$ .
3. **conservation du rang** :  $\text{rg}(A^T) = \text{rg} A$ .

Pour  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ ,

4. **produit** :  $(AB)^T = B^T A^T$ .

⚠ La transposition échange l'ordre d'un produit.

**Preuve**

1. 2. immédiat
3. admis

4. Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ . D'un côté,  $(({}^tAB))_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_{k=1}^n a_{j,k} b_{k,i}$ .

D'un autre côté,  $({}^tB{}^tA)_{i,j} = \sum_{k=1}^n ({}^tB)_{i,k} ({}^tA)_{k,j} = \sum_{k=1}^n b_{k,i} a_{j,k} = \sum_{k=1}^n a_{j,k} b_{k,i}$ .

Donc  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $(({}^tAB))_{i,j} = ({}^tB{}^tA)_{i,j}$ . D'où le résultat voulu. ■

## 2 MATRICES CARRÉES

L'avantage des matrices carrées est que l'on peut faire toutes les opérations matricielles voulues entre-elles (somme, produit, transposition... ) et que le résultat est alors une matrice carrée qui a la même taille.

### A L'algèbre des matrices carrées

#### Définition 2.1 (Matrices carrées)

On note  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{K})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  dans  $\mathbf{K}$ . Pour  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , les **coefficients diagonaux** de la matrice sont ceux qui apparaissent sur la diagonale :  $a_{i,i}$ .

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{1,1}} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \boxed{a_{2,2}} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \boxed{a_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

- Si  $a_{i,j} = 0$  pour  $i \neq j$  alors  $A$  est une matrice **diagonale**.

$$D = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & (0) \\ & a_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

- Si  $a_{i,j} = 0$  pour  $i > j$  alors  $A$  est une matrice **triangulaire supérieure**.

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ (0) & & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

- Si  $a_{i,j} = 0$  pour  $i < j$  alors  $A$  est une matrice **triangulaire inférieure**.

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & (0) \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Lorsque les coefficients diagonaux sont aussi nuls, on parle de matrice triangulaire supérieure *stricte* ou triangulaire inférieure *stricte*.

#### Exemple

Par définition, une matrice carrée échelonnée est triangulaire supérieure.

#### Définition 2.2

On appelle matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  et on note  $I_n$ , la matrice ayant des 1 sur la diagonale et tous les autres coefficients nuls.

$$I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}.$$

#### Explications

Le symbole de Kronecker  $\delta_{i,j}$  vaut 1 si  $i = j$  et 0 sinon.

Ainsi, il indique que le coefficient est nul sauf s'il est sur la diagonale ( $i = j$ ), auquel cas, il vaut 1.

#### Propriété 2.3

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ,

$$A I_n = I_n A = A.$$

La matrice identité est l'*élément unité* pour la multiplication matricielle.

#### Propriété 2.4

Sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , le produit matriciel est (en plus des propriétés déjà énoncées)

1. **interne** : si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , alors  $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .
2. **admet un élément unité** :  $I_n$ .

### B Puissance d'une matrice carrée

#### Définition 2.5

Soit  $p \in \mathbf{N}$ , on définit la **puissance**  $p$ -ième d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  par récurrence avec

- $A^0 = I_n$ .
- $\forall p \in \mathbf{N}, A^{p+1} = A \times A^p$ .

#### Exemple

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ alors } A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exemple** (*À connaître*)

On définit la matrice  $J \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout  $p \in \mathbf{N}$ , calculer  $J^p$ .

**Solution :**

**Propriété 2.6** (*Puissance d'une matrice diagonale*)

Soit  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  une matrice diagonale de coefficients diagonaux  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ . On note

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Pour  $p \in \mathbf{N}$ , on a alors

$$D^p = \text{diag}(\lambda_1^p, \lambda_2^p, \dots, \lambda_n^p) = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & (0) \\ & \lambda_2^p & \\ & & \ddots \\ (0) & & & \lambda_n^p \end{pmatrix}.$$

**Preuve**

Par récurrence. ■

**Propriété 2.7** (*Formule du binôme de Newton*)

Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  **commutent**, alors la formule du binôme de Newton est valable

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^{p-k} B^k.$$

⚠ Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , alors en général

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

L'identité remarquable n'est vraie que si  $A$  et  $B$  commutent, c'est-à-dire si  $AB = BA$ .

**Preuve**

C'est exactement la même preuve que sur  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . ■

**Propriété 2.8** (*Égalité de Bernoulli*)

Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  **commutent**, alors la l'égalité de Bernoulli est valable

$$A^{p+1} - B^{p+1} = (A - B) \sum_{k=0}^p A^k B^{p-k}.$$

**Preuve**

Comme sur  $\mathbf{R}$ . ■

**Méthode** (*Calculer la puissance d'une matrice grâce au binôme*)

On utilise souvent cette formule avec la matrice  $I_n$  (qui commute avec toutes les autres matrices) :

$$(A + I_n)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k.$$

En particulier :

$$\begin{aligned} B^p &= (B - I_n + I_n)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (B - I_n)^k \\ &= (B + I_n - I_n)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} (B + I_n)^k. \end{aligned}$$

**Exemple**

On définit la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & (1) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (1) & & & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice a des 1 partout sauf sur la diagonale où elle a des 0. Calculer  $A^p$  pour  $p \in \mathbf{N}^*$ .

**Solution :**

**C Matrices triangulaires et diagonales**

**Propriété 2.10** (*Sous-algèbre des matrices triangulaires supérieures*)

Si on note  $T_n(\mathbf{K})$  l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , alors

1.  $I_n \in T_n(\mathbf{K})$ .
2.  $T_n$  est stable par combinaison linéaire :  
Si  $(A, B) \in T_n(\mathbf{K})$  et  $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$  alors  $\lambda A + \mu B \in T_n(\mathbf{K})$ .
3.  $T_n$  est stable par multiplication :  
Si  $(A, B) \in T_n(\mathbf{K})$  alors  $AB \in T_n(\mathbf{K})$ .

La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure.

**Propriété 2.11**

Les mêmes propriétés de stabilité s'appliquent aux matrices inférieures (par application de la transposition) et aux matrices diagonales (qui sont à la fois supérieures et inférieures).

**D Transposées de matrices carrées**

**Définition 2.12**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

- On dit que  $A$  est **symétrique** si  $A = A^T$ ,  
c'est-à-dire pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{i,j} = a_{j,i}$ .
- On dit que  $A$  est **antisymétrique** si  $A = -A^T$ ,  
c'est-à-dire pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{i,j} = -a_{j,i}$ .

On note  $\mathcal{S}_n$  l'ensemble des matrices symétriques de taille  $n$ .

On note  $\mathcal{A}_n$  l'ensemble des matrices antisymétriques de taille  $n$ .

*Remarque :* Pour qu'une matrice soit symétrique, ou antisymétrique, il faut qu'elle ait le même nombre de lignes que de colonnes :  $n = p$ . La matrice est donc nécessairement carrée.

**Exemple**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ est symétrique, } B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est antisymétrique.}$$

**Définition 2.9** (*Matrice nilpotente*)

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  est dite **nilpotente** s'il existe  $p \in \mathbf{N}^*$  telle que  $A^p = 0_n$ . L'indice de nilpotence est le plus petit exposant  $p \in \mathbf{N}^*$  tel que  $A^p = 0$ .

**Explications**

L'intérêt d'une matrice nilpotente est qu'il est facile de calculer ses puissances car elles s'annulent toutes à partir d'un certain rang.

Les matrices nilpotentes ne font pas l'objet d'un travail particulier dans le programme, mais elles sont primordiales dans l'étude générale des matrices.

**Propriété 2.13**

Une matrice antisymétrique a des 0 sur sa diagonale.

**Preuve**

$$a_{i,i} = -a_{i,i} \text{ donc } a_{i,i} = 0$$

**Propriété 2.14**

1. La matrice nulle est la seule matrice à la fois symétrique et antisymétrique.
2. Toute matrice peut s'écrire de manière **unique** comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.  
Cette décomposition est

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

**Preuve**

1. Si  $A \in \mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n$  alors pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{i,j} = a_{j,i} = -a_{i,j}$ . Donc  $a_{i,j} = 0$   
Donc  $0_n$  est la seule matrice à la fois symétrique et antisymétrique.
2. On raisonne par analyse-synthèse. Cet exercice doit faire penser à l'exercice de décomposition d'une fonction quelconque en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

*Analyse :*

Si  $A = S + T$  avec  $S \in \mathcal{S}_n$  et  $T \in \mathcal{A}_n$ .

Alors  $A^T = S^T + T^T = S - T$ .

On a donc

$$\begin{cases} A &= S + T \\ A^T &= S - T \end{cases}$$

La demi-somme des deux lignes précédentes donne  $\frac{1}{2}(A + A^T) = S$ .

De même, la demi-différence donne  $\frac{1}{2}(A - A^T) = T$ .

*Synthèse :*

Si on note  $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$  et  $T = \frac{1}{2}(A - A^T)$ , alors

$$S^T = \left(\frac{1}{2}(A + A^T)\right)^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = \frac{1}{2}(A + A^T) = S.$$

$$T^T = \left(\frac{1}{2}(A - A^T)\right)^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -T.$$

donc  $S \in \mathcal{S}_n$  et  $T \in \mathcal{A}_n$ .

Et  $S + T = \frac{1}{2}(A + A^T + A - A^T) = A$ . Donc  $S$  et  $T$  conviennent.

**E Trace d'une matrice**

La notion de trace est introduite ici, mais elle sera surtout utile plus tard dans l'année quand interviendront les changements de base et matrices semblables.

**Définition 2.15**

Soit  $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , on appelle **trace** de  $A$ , le scalaire :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

**Explications**

C'est simplement la somme des coefficients diagonaux.

**Exemple**

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \text{ tr}(A) = 1 + 5 - 2 = 4.$$

**Exemple**

$$\text{tr}(I_n) = n.$$

**Propriété 2.16**

Soient  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2$ , et  $\lambda \in \mathbf{K}$ ,

1. la trace est linéaire :  $\text{tr}(A + \lambda B) = \text{tr}(A) + \lambda \text{tr}(B)$ .
2.  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .  
(et ce, même si les matrices ne commutent pas !)

**Preuve**

$$1. \text{tr}(A + \lambda B) = \sum_{i=1}^n (a_{i,i} + \lambda b_{i,i}) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} + \lambda \sum_{i=1}^n b_{i,i} = \text{tr}(A) + \lambda \text{tr}(B).$$

$$\begin{aligned} 2. \text{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{k,i} a_{i,k} \\ &= \sum_{k=1}^n (BA)_{k,k} \\ &= \text{tr}(BA). \end{aligned}$$

**Exemple**

Montrer qu'il n'existe pas de matrices  $A, B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  telles que  $AB - BA = I_n$ .  
 $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(AB) = 0$ .

Or  $\text{tr}(I_n) = n \geq 1$ , donc on ne peut avoir l'égalité.



**F Matrices carrées inversibles**

**Définition 2.17**

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  est dite **inversible**, s'il existe une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  telle que  $AB = BA = I_n$   
 L'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  se note  $GL_n(\mathbf{K})$  ou  $GL_n$  : c'est le **groupe général linéaire**.

⚠ Puisque l'on multiplie tantôt à droite et tantôt à gauche, la notion d'inverse n'est valable que pour des matrices **carrées**.

**Exemple**

Étudier l'inversibilité de  $I_n$  et de la matrice nulle.

**Solution :**

**Théorème 2.18** (*Propriétés de l'inverse*)

1. **Unicité :** si  $A$  est inversible, alors son inverse est unique. On le note  $A^{-1}$ .
2. **Involutivité :** pour  $A \in GL_n(\mathbf{K})$ ,  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
3. **Produit :** Si  $(A, B) \in GL_n(\mathbf{K})$ , alors  $AB \in GL_n(\mathbf{K})$  et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

⚠ Comme avec la transposition, pour le produit, il faut échanger l'ordre des termes.

**Preuve**

1. On suppose qu'il y en a deux, et on trouve qu'ils sont égaux.
2. Trivial.
3. Faire le produit  $ABB^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1}AB = I_n$ .

⚠ Le produit de deux matrices inversibles est inversible, par contre, en général leur somme ne l'est pas. (prendre  $I_n$  et  $-I_n$ ). L'inverse n'est **PAS linéaire**.

**Théorème 2.19**

Pour qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  soit inversible, il suffit qu'il existe un inverse à gauche, ou un inverse à droite.  
 C'est-à-dire  $A$  inversible  $\iff (\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \text{ tel que } AB = I_n)$ ,  
 $\iff (\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \text{ tel que } BA = I_n)$ .

**Preuve**

Admis

**Exemple** (*réciproque pour le produit*)

Soient  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . Montrer que si  $AB$  est inversible, alors,  $A$  et  $B$  le sont.

**Solution :**

**Exemple**

Montrer que si  $A$  et  $B$  sont deux matrices non nulles de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , alors

$$AB = 0 \implies A \notin GL_n(\mathbf{K}) \text{ et } B \notin GL_n(\mathbf{K}).$$

**Solution :**

**Exemple**

Montrer que si  $A \in GL_n(\mathbf{K})$ , alors

$$A \in GL_n(\mathbf{K}) \iff A^T \in GL_n(\mathbf{K}).$$

Et que, dans le cas où  $A \in GL_n(\mathbf{K})$ , on a  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ . (sens direct)  
 Si  $A \in GL_n(\mathbf{K})$ , alors il existe une matrice inverse  $A^{-1}$  telle que  $AA^{-1} = I_n$ , donc, en passant à la transposée,  $(A^{-1})^T A^T = (\forall^{-1})^T = I_n^T = I_n$ . donc  $A^T$  est inversible, d'inverse,  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .  
 le sens réciproque est immédiat par symétrie (car la transposition est involutive).

**Méthode** (*Méthode du polynôme annulateur*)

**Objectif :** Montrer que  $A \in GL_n(\mathbf{K})$  et calculer  $A^{-1}$ .

**Méthode :** Calculer  $A^2, A^3 \dots$  et rechercher une relation polynomiale simple entre les puissances de  $A$ . Par exemple  $A^3 + 3A^2 - A + 2I_n = 0$ .  
 Si la relation polynomiale fait intervenir l'**identité**, alors  $A \in GL_n(\mathbf{K})$  et  $A^{-1}$  facile à calculer :

**Obtention de  $A^{-1}$**  (permet de montrer l'inversibilité de  $A$  en même temps).

- On met l'identité d'un côté de l'égalité.
- De l'autre, on factorise par  $A$ .

Dans l'exemple :  $A(A^2 + 3A - I_n) = -2I_n$ .  
 Si on pose  $B = -\frac{1}{2}(A^2 + 3A - I_n)$ , alors on a  $AB = BA = I_n$ .  
 Ainsi on a montré que  $A$  est inversible, et que  $A^{-1} = B$ .

*Remarque* : Si on trouve une relation polynomiale de **degré minimal** qui ne fait pas intervenir  $I_n$ , alors  $A$  n'est pas inversible.

*Preuve de la remarque sur un exemple* :

Par exemple si  $A^3 + 3A^2 - A = 0$ , alors on a  $A(A^2 + 3A - I_n) = 0$ .

Si par l'absurde,  $A$  était inversible, alors en multipliant par  $A^{-1}$ , on obtiendrait  $A^2 + 3A - I_n = 0$ .

On a donc une relation polynomiale de degré 2 sur les puissances de  $A$ .

C'est absurde car on a supposé que la relation trouvée initialement était de degré minimal ! Donc  $A$  n'est pas inversible.

### Exemple

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $A^3 - 4A^2 + 7A - 4I = 0$ .

**Solution** :

### Exemple

En s'aidant de la méthode précédente, montrer que la matrice  $J$  d'ordre  $n \geq 2$  (matrice uniquement composée de 1) n'est pas inversible.

**Solution** :

## 3 APPLICATIONS DE L'ALGORITHME DE GAUSS-JORDAN

Nous allons maintenant faire le lien entre les manipulations matricielles que nous avons vu pour les systèmes et le calcul matriciel.

### A Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

**Définition 3.1** (*Opérations élémentaires*)

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ , Soient  $(i, j) \in ([1, n])^2$  et  $\lambda \in \mathbf{K}^*$ ,

On appelle **opération élémentaire sur les lignes** de  $A$ , les opérations

- **permutation** (échange) des lignes  $i$  et  $j$  notée  $L_i \leftrightarrow L_j$ .
- **dilatation** (multiplication) de la ligne  $i$  par  $\lambda$  notée  $L_i \leftarrow \lambda L_i$ .
- **transvection** (addition) de la ligne  $j$  multipliée par  $\lambda$  à la ligne  $i$  notée  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ .

On définit de même les opérations élémentaires sur les colonnes :

$$C_i \leftrightarrow C_j, C_i \leftarrow \lambda C_i \text{ et } C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j.$$

*Remarque* : Comme dans le chapitre sur les systèmes linéaires, on impose au scalaire d'être non nul pour éviter les problèmes d'*inversibilité*.



**Théorème 3.7**

Soit un système linéaire représenté sous forme matricielle par  $AX = B$  où  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ ,  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ .

Si  $P \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ , alors

$$AX = B \quad \text{est équivalent à} \quad (PA)X = PB.$$

**Preuve**

Sens direct : il suffit de multiplier par  $P$  cela conserve l'égalité.

Sens réciproque : il suffit de multiplier par  $P^{-1}$  car  $P \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$  ■

*Remarque* : La matrice  $PA$  a la même taille que  $A$  et  $PB$  a la même taille que  $B$

**Théorème 3.8** (*Matrices équivalentes en ligne*)

Soit un système  $AX = B$ ,

Lorsque l'on effectue une suite finie d'opérations sur les lignes simultanément sur  $A$  et  $B$ , on obtient un système équivalent  $A'X = B'$ .

Deux matrices qui se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opération sur les lignes sont dites **équivalentes en ligne**.

On note

$$A \underset{L}{\sim} A'.$$

**Preuve**

Faire des opérations sur les lignes, c'est multiplier à gauche par des matrices inversibles  $E_1, E_2, \dots, E_n$ . On obtient donc le système

$$E_n E_{n-1} \cdots E_2 E_1 A X = E_n E_{n-1} \cdots E_2 E_1 B.$$

Comme les  $E_i \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ , leur produit  $E \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$  et les systèmes sont bien équivalents. ■

**Méthode** (*Application au pivot de Gauss*)

On effectue matriciellement l'algorithme du pivot de Gauss comme nous l'avons fait dans le chapitre sur les systèmes linéaires.

Plutôt que de multiplier  $A$  et  $B$  en même temps comme dans le théorème précédent, on peut aussi multiplier directement la matrice augmentée  $A|B$ . C'est strictement équivalent.

**Exemple**

Réaliser cet algorithme sur  $M = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ .

**Solution :**

## B Lien entre la recherche d'un inverse et la résolution matricielle

Chercher l'inverse de  $A$  c'est chercher une matrice  $C$  telle que  $AC = I_n$ .

Si on écrit  $C$  sous la forme de  $n$  vecteurs colonne accolés alors  $C = (X_1|X_2|\cdots|X_n)$ .

De la même façon, on décompose  $I_n$  en  $n$  vecteurs colonnes. On note  $e_i$  le vecteur colonne avec 1 à la  $i$ ème ligne et 0 ailleurs :

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc  $I_n = (e_1|e_2|\cdots|e_n)$  et on peut écrire la recherche d'inverse :

$$AC = I_n \iff A(X_1|X_2|\cdots|X_n) = (e_1|e_2|\cdots|e_n) \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, AX_i = e_i.$$

Trouver  $C$  revient à résoudre les  $n$  systèmes linéaires :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{array} \right)$$

Ainsi, pour trouver  $C$  on peut effectuer le pivot de Gauss sur ces matrices augmentées. Cependant, plutôt que de résoudre  $n$  systèmes différents dont seule la dernière colonne change, on peut se contenter de résoudre le système en fonction des paramètres  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & x_i \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \end{array} \right)$$

Ensuite, on obtient la  $i$ -ème colonne de  $C = A^{-1}$  en prenant  $x_i = 1$  et  $x_j = 0$  pour  $j \neq i$ . La matrice est inversible à la seule condition que ces systèmes admettent tous une unique solution : c'est-à-dire pour  $\text{rg}(A) = n$ .

### Exemple

Appliquer cette méthode à la recherche de l'inverse de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ .

### Solution :

**Méthode** (*Calcul de l'inverse d'une matrice*)

Trouver l'inverse de  $A$  revient à la mettre sous forme échelonnée. Le produit à gauche par les matrices d'opérations élémentaires donne alors la matrice inverse :  $EA = I_n \iff E = A^{-1}$ .

Concrètement, en effectuant la mise sous forme réduite de  $A$ , je multiplie successivement les matrices des opérations élémentaires pour connaître leur produit.

**Autre méthode** : On résout le système  $AX = B$  qui donne  $X = A^{-1}B$

*Remarque finale* :

Comme nous l'avons vu, il existe de nombreuses façon d'interpréter les résultats et en particulier l'algorithme de Gauss. Ce qui est riche, c'est d'être capable de faire le pont entre ces différentes interprétations, pour être capable de passer facilement de l'une à l'autre.

**4 CARACTÉRISATION DES MATRICES INVERSIBLES**

Petit récapitulatif (partiel) sur les matrices inversibles, lien entre la matrice et le système associé.

**Théorème 4.1** (*Caractérisation d'une matrice inversible*)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , les propriétés suivantes sont équivalentes

1.  $A$  est inversible,
2.  $A$  est de rang  $n$
3.  $A \underset{L}{\sim} I_n$
4. Pour toute matrice  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ , le système  $AX = B$  admet une unique solution,
5. Pour toute matrice  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ , le système  $AX = B$  admet au moins une solution.

**Preuve**

Nous allons faire une preuve « en boucle ».

(a)  $\Rightarrow$  (b) d'après l'explication précédente.

(b)  $\Rightarrow$  (c) la définition du rang l'affirme avec la matrice échelonnée réduite.

(c)  $\Rightarrow$  (d) il n'y a que des inconnues principales, et aucune ligne de la matrice réduite n'est nulle. Donc le système n'admet qu'une solution.

(d)  $\Rightarrow$  (e) évident

(e)  $\Rightarrow$  (a) c'est ce que nous avons expliqué précédemment :

On peut construire l'inverse en accolant des solutions  $X_i$  côte à côte chacune correspondant à une solution de  $AX = e_i$  avec  $e_i$  le vecteur colonne qui a 1 à la position  $i$  et 0 partout ailleurs. ■

**Corollaire 4.2**

Toute matrice inversible s'écrit comme produit de permutations, dilatations et transvections.

*Remarque* : On dit que les matrices des opérations élémentaires engendrent  $GL_n(\mathbf{K})$

**Preuve**

En effet,  $A \underset{L}{\sim} I_n$ , donc il existe un produit de permutations, dilatations et transvections  $E$ , tel que  $EA = I_n$ , c'est-à-dire  $E^{-1} = A$ . Or nous avons vu que  $E^{-1}$  était alors également exprimable comme un produit de matrice d'opérations élémentaires. ■

**Propriété 4.3**

Soit  $A \in GL_n(\mathbf{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ , alors le système  $AX = B$  admet une unique solution  $X = A^{-1}B$ .

Dans ce cas, on dit que le système est un **système de Cramer**.

**5 CAS DES MATRICES D'ORDRE 2****Théorème 5.1** (*Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2*)

Soient  $(a, b, c, d) \in \mathbf{K}^4$ , et  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ .

$A$  est inversible si et seulement si  $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$  et dans ce cas

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

$\det(A)$  est le **déterminant** de  $A$ .

**Explications**

**Retour au collège** : le critère  $ad - bc \neq 0$  correspond à un produit en croix.

Si le produit en croix « fonctionne », c'est-à-dire si  $ad = bc$  alors c'est que les deux lignes sont proportionnelles. La matrice est donc de rang 0 ou 1.

La réciproque est aussi vraie.

**Exemple**

Calculer l'inverse de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Solution** :