

NOMBRES COMPLEXES

« Les mathématiques consistent à prouver des choses évidentes par des moyens complexes. »
G. Polya (1887-1985)

Ce chapitre est avant tout géométrique.

Même si la tendance actuelle tend à insister davantage sur les aspects calculatoires des objets mathématiques, il ne faudra pas oublier le caractère intrinsèquement géométrique des nombres complexes tel que cela sera développé dans tout le chapitre : les nombres complexes sont d'abord des points (ou vecteurs) du plan et la multiplication ou l'addition par un nombre complexe traduisent des transformations géométriques du plan.

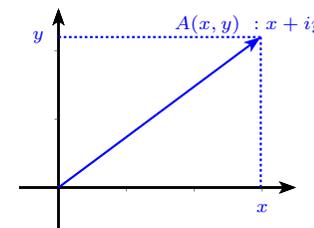
Tous les opérateurs et toutes les règles de calcul découlent de ces considérations géométriques.

Ainsi, on ne peut pas comprendre les nombres complexes sans faire un peu de géométrie, et réciproquement, beaucoup de problèmes de géométrie se trouvent simplifiés par l'usage des complexes.

1 LA FORME CARTÉSIENNE

A Description de la forme cartésienne

Si les réels représentent l'ensemble de la droite *réelle*, alors les nombres complexes correspondent au plan. On peut considérer les nombres complexes comme une façon synthétique d'écrire l'abscisse et l'ordonnée de chaque point du plan. Au lieu de travailler avec un couple de réels (x, y) , on utilise la notation $x + iy$. Le nombre imaginaire i sert à identifier l'ordonnée. L'avantage d'une telle notation est qu'elle va simplifier les manipulations géométriques car elle combine deux informations (abscisse et ordonnée) en un seul nombre.



Définition 1.1 (Nombre complexe)

L'ensemble \mathbf{C} des nombres complexes est composé des nombres écrits sous la forme $x + iy$ avec x, y deux réels :

$$\mathbf{C} = \{x + iy, (x, y) \in \mathbf{R}^2\}$$

Cette notation s'appelle la **forme cartésienne** ou **algébrique**.

Si $z = x + iy \in \mathbf{C}$, avec $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, alors x s'appelle la **partie réelle** de z et y la **partie imaginaire**.

On note

$$x = \Re(z) \quad \text{et} \quad y = \Im(z)$$

- Lorsque $\Im(z) = 0$, z est un nombre **réel**.
- Lorsque $\Re(z) = 0$, z est un **imaginaire pur**.

L'ensemble des imaginaires purs est $i\mathbf{R} = \{0 + iy, y \in \mathbf{R}\}$

Définition 1.2 (Affixe d'un point ou d'un vecteur)

Tout point A du plan \mathbf{R}^2 peut être désigné par son abscisse x_A et son ordonnée y_A dans un repère orthonormé.

L'**affixe** du point A est alors le nombre complexe $z_A = x + iy$.

À tout vecteur $\vec{u}(x, y)$ du plan correspond un unique point $A(x, y)$ tel que $\vec{u} = \vec{OA}$.

L'**affixe** de \vec{u} est alors $z = x + iy$.

Explications

Il y a une correspondance parfaite (on parle de bijection, ce sera vu dans le chapitre sur les applications) entre les vecteurs du plan et les points du plan : à chaque point du plan correspond un unique vecteur, et réciproquement.

Ainsi, dans ce cours, nous identifierons les deux objets : on considère que le vecteur ou le point associé forment un seul et même objet mathématique.

Propriété 1.3 (*Indentification*)

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Explications

La partie réelle et la partie imaginaire définissent de manière *unique* le nombre complexe. Un point dont on connaît à la fois l'abscisse et l'ordonnée est défini de manière unique.

Définition 1.4 (*Opérations sur les complexes*)

On définit l'addition « + » sur les nombres complexes par

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$

On définit la multiplication « × » sur les nombres complexes par

$$(x + iy) \times (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Propriété 1.5

$$i^2 = -1$$

Preuve

On utilise la définition de la multiplication avec $x = x' = 0$ et $y = y' = 1$. ■

⚠ La formule du produit n'est pas à apprendre en l'état. Il suffit de faire un produit normal et de remplacer i^2 par -1 .

Pour l'histoire...

C'est cette idée (propriété 1.5) qui constitua la première intuition des nombres complexes (avant leur construction rigoureuse).

Au XVI^e siècle, Cardan eut besoin de passer par la racine carrée d'un nombre négatif pour donner une méthode de résolution des équations de degré 3. Il appelle ces nombres des quantités *sophistiquées*. Elles sont interprétés comme des artifices calculatoires plutôt que comme des « vrais nombres ». C'est la raison pour laquelle, Bombelli les nommera *nombres imaginaires*.

En fait la méthode de résolution des équations de degré 3 aurait été trouvée en premier par Scipione Del Ferro. Le secret passa de bouche à oreille jusqu'à son disciple Anton Maria Del Fiore qui s'en servit pour lancer des défis aux mathématiciens de son temps.

Tartaglia releva le défi et 30 problèmes furent déposés chez un notaire par chacun des deux adversaires. Celui qui aurait résolu le plus de problèmes au bout de 40 jours gagnerait.

Tartaglia découvrit alors la méthode de résolution des équations de degré 3 et résolu ainsi la totalité des problèmes énoncés par Del Fiore. Il remporta le prix mais garda secrète sa méthode, source de son prestige.

Il finit par la confier à Cardan en lui faisant promettre le secret, mais celui-ci la divulgua sous son propre nom pour s'en attribuer l'honneur.

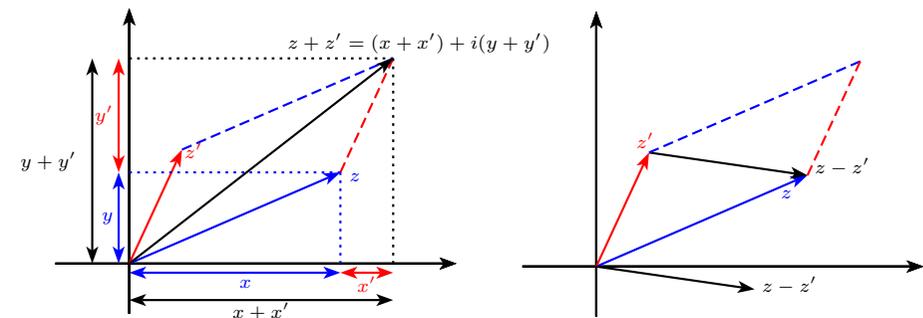
Explications (*Interprétation géométrique*)

Comme énoncé plus haut, tout nombre complexe correspond à un unique point du plan (dit *plan complexe*) dont l'abscisse est la partie réelle et l'ordonnée est la partie imaginaire. Chaque point correspond également à un unique vecteur d'origine $(0, 0)$ dont il est représenté « l'arrivée ».

La **somme** de deux complexes correspond à la somme des vecteurs correspondants : on ajoute les parties réelles entre elles et les parties imaginaires entre elles.

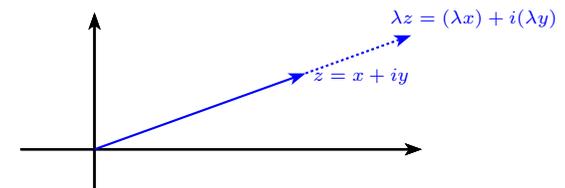
La **multiplication** d'un complexe par un **réel** revient à appliquer à son vecteur l'homothétie de même rapport.

La **multiplication** entre deux complexes a une forme assez compliquée en notation cartésienne. Nous comprendrons l'interprétation géométrique de cette formule un peu plus loin avec la forme exponentielle.



Somme

Différence



Multiplication par un réel

Propriété 1.6 (*Linéarité des parties réelles et imaginaires*)

\Re et \Im sont des applications \mathbf{R} -linéaires de \mathbf{C} dans \mathbf{R} .

Ainsi, $\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2, \forall \lambda \in \mathbf{R}$,

$$\Re(z + z') = \Re(z) + \Re(z') \quad \text{et} \quad \Re(\lambda z) = \lambda \Re(z)$$

$$\Im(z + z') = \Im(z) + \Im(z') \quad \text{et} \quad \Im(\lambda z) = \lambda \Im(z)$$

Explications

Additionner deux vecteurs revient à additionner leurs abscisses et leurs ordonnées. De même si on effectue une homothétie.

⚠ En général $\Re(zz') \neq \Re(z)\Re(z')$ et $\Im(zz') \neq \Im(z)\Re(z')$.

B Structure de l'ensemble des complexes

Cette partie est un complément qui peut être sautée sans grands risques pour le concours.

Propriété 1.7 (Propriétés sur les opérations - structure de corps)

1. $+$ est une loi interne : $\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2, z + z' \in \mathbf{C}$,
2. $+$ est associative : $\forall (z, z', w) \in \mathbf{C}^3, (z + z') + w = z + (z' + w)$,
3. $+$ est commutative : $\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2, z + z' = z' + z$,
4. $+$ admet 0 comme élément neutre : $\forall z \in \mathbf{C}, z + 0 = z$,
5. tout élément de \mathbf{C} admet un symétrique pour la loi $+$:

$$\forall z \in \mathbf{C}, \exists z' = (-z) \in \mathbf{C}, z + (-z) = 0,$$

$(-z)$ est appelé l'opposé de z .

→ $(\mathbf{C}, +)$ est un **groupe commutatif** (ou abélien),

6. \times est une loi interne : $\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2, z \times z' \in \mathbf{C}$,
7. \times est associative : $\forall (z, z', w) \in \mathbf{C}^3, (z \times z') \times w = z \times (z' \times w)$,
8. \times est commutative : $\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2, z \times z' = z' \times z$,
9. \times est distributive par rapport à $+$:

$$\forall (z, z', w) \in \mathbf{C}^3, (z + z') \times w = z \times w + z' \times w.$$

10. \times admet 1 comme élément neutre : $\forall z \in \mathbf{C}, z \times 1 = z$,

→ $(\mathbf{C}, +, \times)$ est un **anneau commutatif**,

11. tout élément de $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ admet un symétrique pour la loi \times :

$$\forall z \in \mathbf{C}^*, \exists z' = \frac{1}{z} \in \mathbf{C}, z \times \left(\frac{1}{z}\right) = 1,$$

$\frac{1}{z}$ est appelé l'inverse de z .

→ $(\mathbf{C}, +, \times)$ est un **corps** (commutatif).

Explications

Le vocabulaire de groupe, anneau ou corps n'est pas à connaître. Il est indiqué ici à titre de culture mathématique pour vous montrer qu'en algèbre, il existe différentes structures qui ont été classifiées en fonction de leurs propriétés. Ces structures peuvent faire l'objet d'études à part entière, mais ce n'est pas le but de ce cours.

⚠ Les propriétés précédentes ne suffisent pas à caractériser \mathbf{C} (\mathbf{R} et \mathbf{Q} vérifient aussi ces propriétés).

Donnons quelques explications sur l'intérêt structurel des propriétés énoncées :

Elles avaient déjà été évoquées dans le chapitre sur les nombres réels

1. La caractéristique interne d'une loi est essentiel pour « ne pas sortir de l'ensemble » avec une opération.
2. L'associativité permet de s'affranchir des parenthèses : il n'y a pas d'ordre de priorité au sein de l'addition. Ainsi, on peut commencer par ajouter z et z' puis w à droite ou au contraire, commencer à ajouter z' et w puis ensuite z à gauche.
3. La commutativité ne doit pas être confondue avec l'associativité. L'associativité permet de ne pas utiliser les parenthèses, mais l'ordre d'écriture importe, c'est la raison pour laquelle nous précisons au point précédent si on ajoutait à droite ou à gauche. Avec la commutativité nous pouvons mélanger les termes : additionner à droite ou à gauche revient au même. La commutativité n'est pas indispensable pour avoir un groupe, mais en général, lorsque l'on utilise la notation $+$ pour une opération, c'est qu'elle est commutative.
4. L'intérêt de l'élément neutre n'est pas immédiat. Pourquoi inventer un élément dont le rôle est justement de ne rien faire ? Est-ce donc pour rien qu'il a fallu attendre le XII^e siècle pour que le 0 soit pleinement accepté en Occident ? En fait, outre son intérêt dans la notation décimale, le zéro devient important lorsqu'il ne s'agit plus seulement d'ajouter mais aussi de soustraire :
5. Chaque élément admet un symétrique. Lorsqu'on ajoute à un élément son symétrique on obtient l'élément neutre. Pour l'addition, on parle d'opposé. Aucun des éléments de \mathbf{N} , sauf le 0, n'admet de symétrique dans \mathbf{N} . L'existence d'un symétrique veut dire que l'on peut soustraire. Soustraire, c'est ajouter l'opposé¹. C'est pour définir le symétrique que nous avons besoin de l'élément neutre 0. C'est l'intérêt de travailler avec \mathbf{Z} plutôt que \mathbf{N} .
8. La loi \times d'un anneau n'est pas toujours commutative. Nous verrons des exemples de lois multiplicatives qui ne sont pas commutatives (les matrices).
10. L'élément neutre pour la multiplication n'est pas le même que pour l'addition. On peut montrer facilement que le 0 (élément neutre de l'addition) est **absorbant**. Cela veut dire que n'importe quel nombre multiplié par 0 donnera 0.
11. On cherche à obtenir un symétrique comme pour l'addition, mais du fait du caractère absorbant du 0, on ne peut pas l'inverser (dans vos copies, vérifiez toujours que le nombre est non nul avant de prendre son inverse). C'est l'existence de l'inverse qui permet de passer de \mathbf{Z} à \mathbf{Q} en forçant les éléments non nuls de \mathbf{Z} à avoir chacun un inverse.

Nous voyons donc ici que \mathbf{Q} satisfait les propriétés pour être un corps. L'intérêt de \mathbf{R} puis de \mathbf{C} vient d'autres raisons. \mathbf{R} intervient pour que les limites de nombres réels soient encore réelles, et \mathbf{C} permet en plus d'obtenir des solutions à toutes les équations polynomiales (en particulier $x^2 = -1$).

1. En fait, la soustraction en tant que telle n'a pas besoin d'être définie, c'est simplement l'ajout de l'opposé.

Preuve

La preuve est sans difficultés. Le seul point intéressant est le dernier à propos de l'inverse :

Si $z = x + iy \in \mathbf{C}^*$, alors on cherche $z' = x' + iy'$ tel que $zz' = 1$.

Cela donne l'équation :

$$xx' - yy' + i(xy' + x'y) = 1$$

Donc par identification :

$$zz' = 1 \iff \begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ xy' + x'y = 0 \end{cases}$$

Il reste à résoudre ce système en utilisant le fait que x et y ne peuvent être simultanément nuls. On obtient alors une unique solution pour x' et y' .

Mais il existe une méthode plus simple pour trouver x' et y' . Vous l'aviez déjà vu en terminale : elle consiste à écrire formellement la fraction et à faire passer le i au numérateur en multipliant par le complexe conjugué (dont nous rappelons la définition juste après) :

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Si on pose $x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \in \mathbf{R}$ et $y' = -\frac{y}{x^2 + y^2} \in \mathbf{R}$, on a bien $(x + iy)(x' + iy') = 1$.
(on vérifie bien que $x^2 + y^2 \neq 0$ car $x + iy \neq 0$). ■

Histoire des mathématiques :

Ce type de présentation algébriquement très structurée a été particulièrement mise à l'honneur par l'un des plus grands mathématiciens du XX^e siècle.

Nicolas Bourbaki est un mathématicien poldève qui est né en 1935. Il reçut 5 médailles Fields².

Il est connu pour la rédaction des *Éléments de mathématique* (au singulier). Cet ouvrage inachevé³ devait être l'analogue contemporain des *Éléments* d'Euclide.

Plus exactement, N. Bourbaki est né du 10 au 20 juillet 1935 près de Clermont-Ferrand, sous l'inspiration du mathématicien Pierre Weil. Il s'agit à l'origine d'un groupe de mathématiciens francophones dont l'ambition était de rédiger une présentation cohérente des mathématiques à partir de leur structure. Ce projet naît en réaction à l'émiettement des mathématiques en de nombreuses branches disparates au début du XX^e. L'usage du terme *mathématique* au singulier veut souligner l'unité de la matière.

L'ouvrage introduit un grand formalisme et beaucoup de rigueur dans l'exposé mathématique. Il répond ainsi aux lacunes de l'enseignement de l'époque qui accordait peu d'importance aux fondements et à la rigueur. Il marquera durablement l'enseignement des mathématiques (avec quelques excès).

Le nom du groupe provient probablement d'un canular de l'école normale supérieure. Dans ses statuts, les mathématiciens de plus de 50 ans doivent quitter le groupe pour laisser la place aux plus jeunes. Bourbaki a rassemblé des noms parmi les plus grands de la deuxième moitié du XX^e, et 5 de ses membres reçurent la médaille Fields. N'hésitez pas à lire la notice historique de Cartan qui mérite le détour (elle montre que les mathématiciens peuvent avoir de l'humour, à leur façon...) :

<https://molin-mathematiques.fr/ouvert/Bourbaki-histoire.pdf>

2. La médaille Fields est la plus célèbre distinction mathématique. Elle est attribuée tous les 4 ans à 4 mathématiciens de moins de 40 ans. On parle souvent du « prix Nobel » des mathématiques.

3. Il compte néanmoins 10 volumes d'environ 300 pages chacun !

Un petit détour amusant pour ceux qui ont le temps :

Le but de cet exercice est de montrer que l'associativité et la commutativité sont bien des notions distinctes. Les matrices donnent un exemple de loi qui est associative sans être commutative. L'idée ici est de trouver une loi commutative mais non associative.

Cet exemple doit vous donner une idée de ce à quoi peut ressembler l'algèbre générale (puisque vous n'en avez pas au programme).

Plutôt que de travailler avec les nombres, nous allons travailler avec des objets beaucoup plus simples (il n'y en aura que trois) que l'on nommera p comme « pierre », f comme « feuille » et c comme « ciseaux ».

Sur cet ensemble, nous définissons une opération \star inspirée du jeu « pierre-feuille-ciseaux ». L'opération entre deux « actions » donne pour résultat le vainqueur. Par exemple, pour $p \star f$, le résultat est f car c'est la feuille qui gagne contre la pierre. Dans le cas où les deux « actions » sont identiques, alors l'opération renvoie l'action elle-même).

On note $M = \{p, f, c\}$, l'ensemble de travail. On peut alors résumer la loi avec une *table de Cayley* :

\star	p	f	c
p	p	f	p
f	f	f	c
c	p	c	c

Ce tableau se lit ainsi : pour calculer $p \star f$, on prend la ligne p et la colonne f et on lit le résultat : $p \star f = f$.

Cela correspond bien au jeu : entre la pierre et la feuille, c'est la feuille qui gagne.

L'opération sur M est *interne*. En effet, $\forall(x, y) \in M^2$, $x \star y \in M$ (le résultat d'une opération est toujours un des trois éléments p, f ou c).

L'opération est clairement *commutative* : $\forall(x, y) \in M^2$, $x \star y = y \star x$. (l'ordre n'a pas d'importance entre les deux joueurs).

Par contre, cette opération n'admet *pas d'élément neutre* (tout élément agit de façon non triviale sur les autres) : la structure (M, \star) n'est pas un groupe. On dit que c'est un *magma* commutatif (une façon de dire que ce n'est pas très ordonné...).

Ce magma n'est pas non plus *associatif*.

Prenons un exemple :

$$p \star (f \star c) = p \star c = p \quad \text{et} \quad (p \star f) \star c = f \star c = c$$

On voit donc que

$$p \star (f \star c) \neq (p \star f) \star c$$

C'est simplement une façon mathématique de dire que l'on ne peut pas jouer à ce jeu à trois en même temps.

Si on voulait avoir un élément neutre, il faudrait rajouter un élément qui perd à chaque fois. On pourrait l'appeler n de telle sorte que $\forall x \in M$: $n \star x = x$.

Grâce à cet élément neutre, on peut construire un symétrique pour chaque élément de M en imposant que $\forall x \in M$, $x \star x = n$. Ainsi, chaque élément est son propre symétrique.

On modifie donc les règles du jeu et on obtient une nouvelle table de Cayley :

\star	n	p	f	c
n	n	p	f	c
p	p	n	f	p
f	f	f	n	c
c	c	p	c	n

On n'est pas très loin d'un groupe, mais il manque, encore et toujours l'associativité !

C Conjugué d'un nombre complexe

Définition 1.8 (Conjugué)

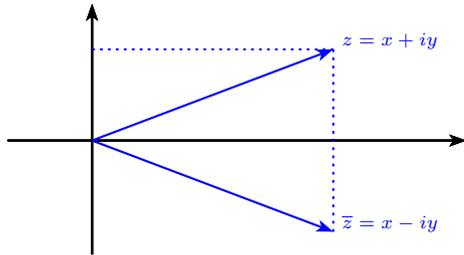
Pour un complexe $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on définit le **conjugué** de z par

$$\bar{z} = x - iy$$

C'est-à-dire : $\forall z \in \mathbf{C}$, $\Re(\bar{z}) = \Re(z)$ et $\Im(\bar{z}) = -\Im(z)$.

Explications

La conjugaison correspond à la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



Exemple

On définit j par $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Exprimer j^2 en fonction de \bar{j} .

Solution :

Propriété 1.9

1. La conjugaison est **involutive** : $\forall z \in \mathbf{C}$, $\bar{\bar{z}} = z$

2. La conjugaison est **linéaire** :

$$\forall (z, z') \in \mathbf{C}, \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \text{ et } \forall z \in \mathbf{C}, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$$

3. Le conjugué d'un produit est le produit des conjugués

$$\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2, \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

4. Le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués

$$\forall (z, z') \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^*, \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

Explications

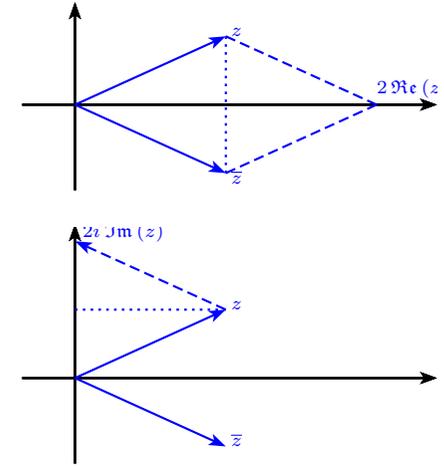
Involutivité : Si on effectue deux fois de suite la symétrie par rapport à la même droite, alors on retrouve le point initial.

Propriété 1.10

Soit $z \in \mathbf{C}$,

$$\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$



⚠ Pour obtenir la partie imaginaire, il ne faut pas oublier la division par i .

Propriété 1.11

$$(z \in \mathbf{R}) \iff (\bar{z} = z) \quad \text{et} \quad (z \in i\mathbf{R}) \iff (\bar{z} = -z)$$

2 MODULE ET ARGUMENT

A Module d'un nombre complexe

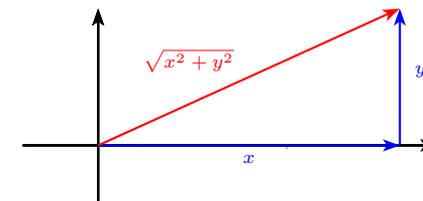
Définition 2.1 (Module)

Pour tout complexe $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on définit le **module** de z par

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Explications

Le module d'un complexe correspond à la longueur du vecteur qui le représente, on obtient cette formule avec le théorème de Pythagore. Comme pour la valeur absolue sur \mathbf{R} , c'est la distance du point à 0.



Les définitions du module et de la valeur absolue coïncident sur \mathbf{R} , ce qui explique que l'on utilise la même notation.

Interprétation géométrique du module

$|z - z'|$ désigne la distance entre les points d'affixes z et z' .

Propriété 2.2 (Coïncidence sur \mathbf{R})

Le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue.

Propriété 2.3 (Module et conjugué)

Pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$z\bar{z} = |z|^2 \quad \text{et} \quad |\bar{z}| = |z|$$

Preuve

Trivial, il suffit d'écrire. La deuxième égalité traduit le fait qu'une symétrie conserve la longueur : c'est une isométrie. ■

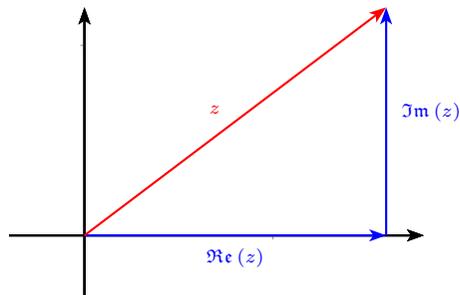
Propriété 2.4

Pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$|\Re(z)| \leq |z| \quad \text{et} \quad |\Im(z)| \leq |z|$$

Explications

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est plus courte que chacune des deux cathètes.



⚠ Il n'y a **pas d'inégalités** sur \mathbf{C} .

Pour avoir des inégalités, on repasse dans \mathbf{R} par l'intermédiaire du module.

Propriété 2.5 (Propriétés du module)

1. (positivité) $\forall z \in \mathbf{C}, |z| \in \mathbf{R}_+$,
2. (définition) $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
3. (axiome de séparation) $|z - z'| = 0$ si et seulement si $z = z'$.
4. (homogénéité) $\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2, |zz'| = |z||z'|$ et pour $z' \neq 0$, $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Explications

1. La positivité traduit qu'une longueur est toujours un réel positif.

2. Le terme mathématique « *définition* » ne veut pas dire que c'est ainsi que l'on définit le module, mais cela signifie que la nullité du module correspond exactement à la nullité du nombre complexe. L'intérêt du caractère *défini* s'explique mieux avec l'axiome de séparation qui en découle.
3. L'axiome de séparation veut dire qu'il n'existe pas de points distincts qui soient superposés : si deux points sont distincts, ils ne peuvent être à une distance nulle l'un de l'autre. De cette manière on arrive toujours à différencier/séparer les points du plan.

Théorème 2.6 (Inégalité triangulaire et son corollaire)

1. (inégalité triangulaire)

$$\forall (z, z') \in \mathbf{C}, |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

On a égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$, tel que $z = \lambda z'$ ou $z' = \lambda z$:

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff z \text{ et } z' \text{ sont colinéaires de même sens.}$$

2. (corollaire de l'inégalité triangulaire)

$$\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2, \left| |z| - |z'| \right| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|.$$

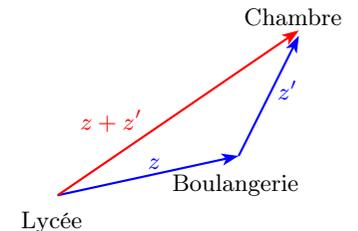
Dans le cas où les vecteurs sont colinéaires de même sens, on dit aussi qu'ils sont **positivement liés**.

Explications

L'inégalité triangulaire a la même signification que dans \mathbf{R} si ce n'est que l'on se déplace dans le plan au lieu de se déplacer uniquement sur une droite : il est plus rapide d'aller en ligne droite directement du lycée à sa chambre que de passer par la boulangerie.

$$LC \leq LB + BC$$

Par contre, on ne rallonge pas le chemin si la boulangerie se trouve déjà située sur le segment qui relie le lycée à la chambre.



⚠ Dans le cas d'égalité (pour l'inégalité triangulaire), le réel doit être positif. En effet, avec l'exemple précédent, si $\lambda < 0$, alors les trois points seraient bien alignés, mais la boulangerie se trouverait au delà de la chambre ou en deçà du lycée. De plus, il ne suffit pas de donner une seule égalité $z' = \lambda z$ par exemple car cela ne traiterait pas le cas $z' \neq 0$ et $z = 0$ pour lequel l'égalité est vérifiée.

Preuve

L'idée est de s'inspirer de la preuve sur \mathbf{R} où nous avons pris le carré du module de la somme.

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z') \overline{(z + z')} && \text{d'après la propriété 2.3} \\ &= z\bar{z} + z'\bar{z}' + z\bar{z}' + \bar{z}z' \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + z\bar{z}' + \bar{z}z' \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + 2\Re(z\bar{z}') && \text{d'après la propriété 1.10} \\ &\leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| && \text{d'après la propriété 2.4} \\ &\leq (|z| + |z'|)^2 \end{aligned}$$

Les deux éléments mis au carré étant des nombres réels positifs, on a donc (par croissance de la fonction racine carrée)

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

On a l'égalité si et seulement si $2\Re(z\bar{z}') = 2|z||z'|$ (ayant partout ailleurs des égalités). C'est donc réalisé à la seule condition que $z\bar{z}' \in \mathbf{R}_+$ (d'après la définition 2.1 du module).

Si on note $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, alors

$$\Im(z\bar{z}') = x'y - xy' = 0 \text{ et } \Re(z\bar{z}') = xx' + yy' \geq 0.$$

Si on suppose $x \neq 0$, alors $\exists \lambda = \frac{x'}{x} \in \mathbf{R}$ tel que $x' = \lambda x$ et dans ce cas $y' = \lambda y$ d'après l'égalité sur la partie imaginaire.

Donc $z' = \lambda z$: les vecteurs sont colinéaires.

De plus par positivité de la partie réelle, $\lambda \geq 0$.

Par symétrie des rôles entre z et z' , si $x' \neq 0$, alors on a égalité à la condition qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $z = \lambda z'$.

Si à la fois x et x' sont nuls, alors λ quelconque positif convient.

Remarque : Cette preuve serait beaucoup plus simple à écrire avec la forme exponentielle du nombre complexe, mais nous ne l'avons pas encore vue... ■

B Description du cercle trigonométrique

Définition 2.7 (*Rappel : cercle trigonométrique*)

Le **cercle trigonométrique** est un cercle du plan de rayon 1 et de centre 0.

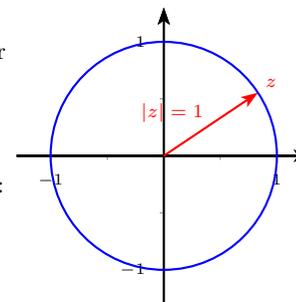
Propriété 2.8 (*Paramétrage cartésien du cercle trigonométrique*)

Dans le plan \mathbf{R}^2 , le cercle trigonométrique est décrit par l'ensemble des points :

$$\mathcal{C}(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$$

Dans le plan complexe, il est décrit par l'ensemble noté \mathbf{U} :

$$\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$$

**Explications**

C'est le même cercle sur \mathbf{R}^2 et sur \mathbf{C} , même si l'écriture diffère.

C Argument d'un nombre complexe

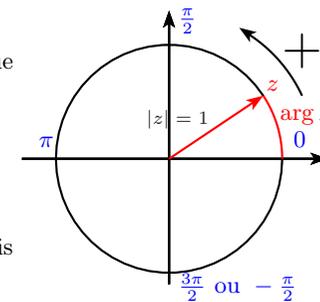
Définition 2.9 (*Argument*)

Pour un point z du cercle trigonométrique, on définit l'**argument** de z par la longueur algébrique de l'arc entre le point $1 + 0i$ et le point z .

Le sens positif est tel que l'argument de i soit égal à $+\frac{\pi}{2}$.

L'argument est exprimé en **radians**.

Remarque : L'argument d'un point n'est pas unique, mais il est exprimé à 2π près.

**Explications**

C'est la définition de l'angle qui avait été donnée dans le chapitre de trigonométrie.

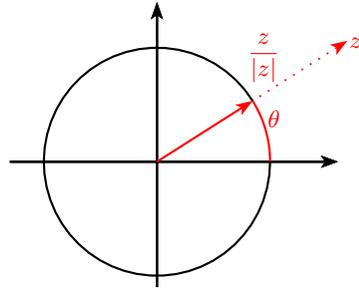
Ici, nous n'avons défini l'argument que pour un point du cercle.

La définition suivante permet d'étendre cette notion à tout point non nul du plan complexe.

Définition 2.10

Soit $z \in \mathbf{C}^*$,
l'argument de z est défini par l'argument de $\frac{z}{|z|}$.

Le nombre complexe 0 n'admet pas d'argument.

**Explications**

Géométriquement, cela revient à se rapporter au point où le vecteur « coupe » le cercle trigonométrique.

L'idée de se ramener à un nombre complexe de module 1 (sur le cercle trigonométrique) en divisant par le module est très commune en mathématiques.

Définition 2.11 (Argument principal)

Pour $z \in \mathbf{C}^*$, on désigne par **argument principal**, l'unique argument $\theta \in]-\pi, \pi]$. On le note $\arg(z)$.

⚠ L'intervalle est ouvert en $\theta = -\pi$ pour avoir l'unicité. En effet on atteint déjà le point $(-1, 0)$ avec l'argument $+\pi$ (intervalle fermé), il ne faut donc pas qu'il soit aussi possible de l'atteindre par les négatifs en $-\pi$.

Explications

Choisir l'argument principal revient à prendre le plus court chemin pour atteindre l'affixe du point : soit en partant dans le sens positif si le point est dans le demi-plan supérieur (la droite réelle comprise), soit en partant dans le sens négatif s'il est dans le demi-plan inférieur. Et bien sûr, à ne pas faire plusieurs tours avant de s'arrêter !

Propriété 2.12 (Identification)

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont le même module et le même argument principal (s'il est défini⁴).

Les propriétés suivantes ne sont pas à apprendre bêtement : il suffit de se représenter un cercle trigonométrique pour que se manifeste leur évidence.

Propriété 2.13

- $\forall z \in \mathbf{C}^*$, $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \pmod{2\pi}$
- $\forall z \in \mathbf{C}^*$, $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$
- $\forall z \in \mathbf{C}^*$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}_+^*$, $\arg(\lambda z) = \arg(z)$
- $\arg(z) = \arg(z') \pmod{2\pi}$ si et seulement si z et z' non nuls et positivement liés : $\frac{z}{z'} \in \mathbf{R}_+^*$
- $\arg(z) = \arg(z') \pmod{\pi}$ si et seulement si z et z' non nuls et liés : $\frac{z}{z'} \in \mathbf{R}^*$

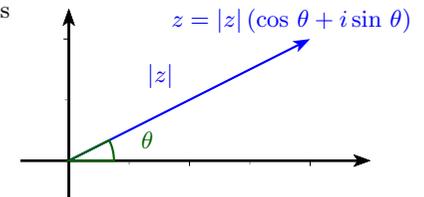
3 FORME TRIGONOMÉTRIQUE**Théorème 3.1 (Forme trigonométrique)**

Soit $z \in \mathbf{C}^*$, alors z s'écrit de manière unique sous la forme

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

avec $\rho > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Dans ce cas, $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.



Cette écriture s'appelle la **forme trigonométrique**.

Remarque : Si $z = 0$, on peut aussi considérer que c'est une forme trigonométrique avec $\rho = 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$, mais il n'y a plus d'unicité.

⚠ L'angle doit être le même dans le cosinus et le sinus.

Preuve

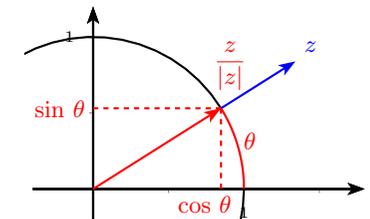
Si $z = 0$, c'est évident,

si $z \neq 0$, $\frac{z}{|z|} \in \mathbf{U}$,

si on pose $\theta = \arg(z) = \arg\left(\frac{z}{|z|}\right)$,

alors $\Re\left(\frac{z}{|z|}\right) = \cos \theta$ et $\Im\left(\frac{z}{|z|}\right) = \sin \theta$

Ainsi, $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$



4. Cas particulier du nombre complexe nul

Méthode (*Mettre sous forme trigonométrique*)

Pour mettre un nombre complexe $z = a + ib$ sous forme trigonométrique, on commence par calculer son module $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

puis on cherche θ tel que $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Dans les exercices, si on demande de trouver ainsi une forme trigonométrique explicite, c'est en général que l'on a une valeur remarquable pour θ .

Exemple

Donner la forme trigonométrique de $z = -3 + \sqrt{3}i$.

Solution :

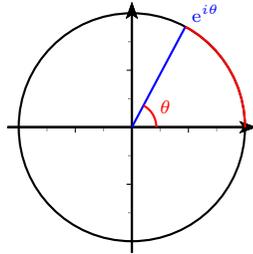
4 EXPONENTIELLE COMPLEXE

Définition 4.1 (*Exponentielle complexe*)

Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on note

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$e^{i\theta}$ est le point du cercle trigonométrique d'argument θ .

**Exemple**

$$e^{i0} = e^0 = 1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i.$$

Propriété 4.2

1. $\forall \theta \in \mathbf{R}, \forall k \in \mathbf{Z}, e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$
2. $\forall (\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2, e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$
3. $\forall \theta \in \mathbf{R}, \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$
4. $\forall \theta \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{Z}, e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$
5. $\forall \theta \in \mathbf{R}, |e^{i\theta}| = 1$
6. $\mathbf{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in]-\pi, \pi]\} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbf{R}\}$

⚠ Pour $(a, b) \in \mathbf{R}^2, a = b \Rightarrow e^{ia} = e^{ib}$ par contre la réciproque est **fausse** !
L'angle est déterminé à 2π près.

Preuve

1. θ et $\theta + 2k\pi$ représentent le même argument à 2π près. \cos et \sin sont 2π périodiques.
2. Ce sont les formules d'addition des cosinus et sinus de la propriété 3.6 de la page 4.

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\theta')} &= \cos(\theta+\theta') + i \sin(\theta+\theta') \\ &= \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta') \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = e^{i\theta} e^{i\theta'} \end{aligned}$$

3. Par parité du cosinus, et imparité du sinus pour la première égalité, la deuxième est simplement déduite du point précédent.
4. Découle des deux points précédents par récurrence.
5. $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ d'après la propriété 3.5 de la page 4.
6. D'après le théorème 3.1. ■

Définition 4.3

Soit $\lambda \in \mathbf{R}, \theta \in \mathbf{R}$, on pose

$$e^{\lambda+i\theta} = e^\lambda e^{i\theta}$$

Autre formulation :

Soit $z \in \mathbf{C}$, on pose

$$e^z = e^{\Re(z)} e^{i \Im(z)}$$

Propriété 4.4

L'exponentielle complexe coïncide avec la définition de l'exponentielle réelle sur \mathbf{R} .

$\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2,$

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'} \quad \text{et} \quad e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$$

$\forall z \in \mathbf{C}, \forall n \in \mathbf{Z},$

$$e^{nz} = (e^z)^n$$

Preuve

Trivial ■

⚠ Sur \mathbf{C} , parler de croissance ou de décroissance d'une fonction n'a **aucun sens** (les inégalités ne sont pas définies). De même, on ne peut **pas dire** que sur \mathbf{C} l'exponentielle serait positive.

Le logarithme **n'existe pas**⁵ sur \mathbf{C} .

⁵ En tout cas pas pour vous : c'est un problème compliqué et il y a plusieurs définitions de logarithmes possibles.

5 FORME EXPONENTIELLE

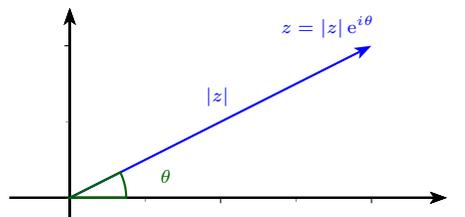
Théorème 5.1 (Forme exponentielle)

Soit $z \in \mathbf{C}^*$, z s'écrit de manière unique sous la forme

$$z = \rho e^{i\theta}$$

avec $\rho \in \mathbf{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Dans ce cas, $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z)$,



Cette écriture s'appelle la **forme exponentielle**.

Remarque : Si $z = 0$, alors on peut aussi trouver une forme exponentielle, mais il n'y a plus d'unicité.

Corollaire 5.2

Soit $z \in \mathbf{C}^*$, si on pose $\theta = \arg(z)$, alors $z = e^{\ln|z| + i\theta}$.

Remarque : Pour pouvoir prendre le logarithme du module, il faut que z soit non nul.

Propriété 5.3 (Interprétation géométrique du produit entre complexes)

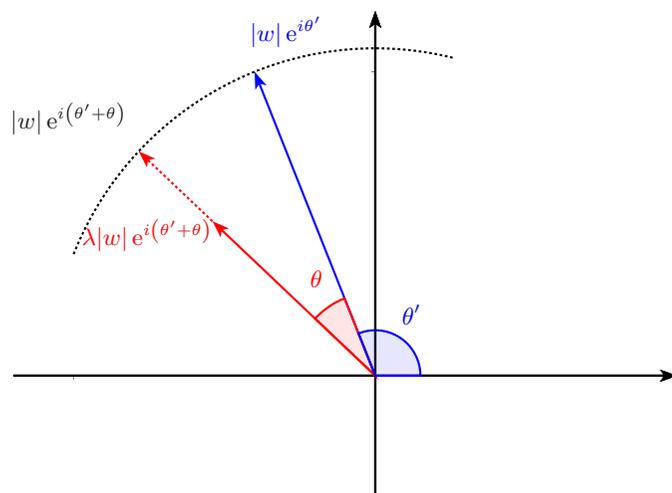
Soit $z \in \mathbf{C}$ avec $z = \lambda e^{i\theta}$,

Multiplier un nombre complexe w par z revient à appliquer au vecteur \vec{w} une rotation d'angle θ et une homothétie de rapport λ .

Preuve

si $w = |w| e^{i\theta'}$, alors $wz = \lambda|w| e^{i\theta} e^{i\theta'} = \lambda|w| e^{i(\theta'+\theta)}$

On bien multiplié la longueur du vecteur par λ et on a ajouté θ à son argument : on l'a fait tourner de θ .



Corollaire 5.4

$\forall (z, z') \in (\mathbf{C}^*)^2$,

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi] \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$$

Explications

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ correspond à l'angle orienté entre les vecteurs z et z' .

Exemple

Donner la forme exponentielle de $1 + i$, interpréter géométriquement.

Solution :

Méthode (Quelle forme dans quelle situation ?)

Comme expliqué plus haut :

- Lorsqu'il y a des **produits** ou **puissances**, utiliser la forme exponentielle.
- Lorsqu'il y a des **sommes**, utiliser la forme algébrique.

Ensuite, comme pour tout méthode, il y a des exceptions...

Exemple

Donner la forme cartésienne de $(1 + i)^n$ pour $n \in \mathbf{Z}$.

Solution :

6 VECTEURS DU PLAN ET NOMBRES COMPLEXES

Propriété 6.1

Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B .
Le vecteur \overrightarrow{AB} est alors d'affixe $z_B - z_A$.

Corollaire 6.2 (Distance et angle entre deux points ou vecteurs)

Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B .
Dans un repère orienté,

$$AB = |z_B - z_A| \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg z_B - \arg z_A = \widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}$$

Explications

L'angle obtenu avec les argument, est un angle orienté : il est positif dans le sens direct, et négatif sinon. L'orientation de l'angle correspond à l'orientation du cercle trigonométrique (sens des angles θ croissants). Si on échange les deux vecteurs, alors cela revient à prendre l'angle opposé.

Propriété 6.3

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan, d'affixes respectives z_1 et z_2

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaire} &\iff \exists \lambda \in \mathbf{R} \text{ tel que } z_1 = \lambda z_2 \text{ ou } z_2 = \lambda z_1 \\ &\iff z_1 \overline{z_2} \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Soient A , B et C trois points du plan d'affixes respectives z_A , z_B et z_C .

$$\begin{aligned} A, B \text{ et } C \text{ alignés} &\iff \exists \lambda \in \mathbf{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC} \text{ ou } \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbf{R} \text{ tel que } z_B - z_A = \lambda(z_C - z_A) \text{ ou } z_C - z_A = \lambda(z_B - z_A) \\ &\iff (z_B - z_A)(\overline{z_C - z_A}) \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

⚠ Il ne faut pas oublier la double condition de colinéarité $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

Preuve

Pour obtenir la dernière équivalence, il suffit de multiplier par $\overline{z_2}$, et comme $z_2 \overline{z_2} = |z_2|^2 \in \mathbf{R}$, alors il peut être retiré de la relation. ■

7 APPLICATION À LA TRIGONOMÉTRIE

A Trigonométrie

Les formules trigonométriques se trouvent fortement simplifiées par l'usage de l'exponentielle complexe. C'est ce que nous allons voir.

Propriété 7.1

$$\forall \theta \in \mathbf{R}, \quad \cos \theta = \Re(e^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \sin \theta = \Im(e^{i\theta})$$

Preuve

C'est la définition du sinus et du cosinus en utilisant l'exponentielle complexe. ■

Propriété 7.2 (Expressions de la tangente)

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}, \\ \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{et} \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}. \end{aligned}$$

Preuve

Égalité 1 :

La droite qui fait un angle θ avec l'axe des abscisses est paramétrée par

$$(d) : \{\rho(\cos \theta + i \sin \theta)\}_{\rho \in \mathbf{R}} = \text{Vect}(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Elle coupe l'axe des abscisses lorsque la partie réelle vaut 1, c'est-à-dire pour $\rho \cos \theta = 1$. Comme $\theta \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$, on a bien $\cos \theta \neq 0$. Donc $\rho = \frac{1}{\cos \theta}$. La tangente est définie par l'ordonnée du point d'intersection. Elle est donc égale à la partie imaginaire du point que nous venons de trouver :

$$\tan \theta = \rho \sin \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

On peut aussi montrer l'égalité par Thalès, cela revient au même.

Égalité 2 : On applique la relation $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ à l'égalité précédente. ■

Propriété 7.3 (Formules d'Euler)

$$\forall \theta \in \mathbf{R}, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

⚠ Ne pas oublier le i au dénominateur pour le sinus.

Preuve

C'est la propriété 1.10 de la page 5 qui est utilisée pour exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de la propriété 7.1. ■

Il peut arriver que l'on soit contraint de faire la somme de deux formes exponentielles, on a alors souvent recours à la technique suivante :

— **Méthode** (*Factorisation par l'angle moyen*) —

Soient $(a, b) \in \mathbf{R}^2$,

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$$

On fait de même avec une différence.

Remarque : Les deux exponentielles sont unitaires.

Exemple

Pour $\theta \neq \pi[2\pi]$, simplifier l'expression de $\frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}$.

Solution :

— **Propriété 7.4** (*Formule de Moivre*) —

Soit $\theta \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{Z}$,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Preuve

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ puis on passe en écriture cartésienne. ■

⚠ Ne pas se tromper sur la formule, en particulier $\cos^n \theta \neq \cos(n\theta)$.

— **Méthode** (*Linéarisation*) —

On transforme une expression de type $\cos^p \theta \sin^q \theta$ en somme de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$.
(on supprime les puissances et produits de fonctions trigonométriques.)

• On utilise la **formule d'Euler** sous la puissance :

$$\cos^p \theta \sin^q \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^p \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^q$$

• On développe avec la **formule du binôme**,

• On rassemble les termes de même exposant pour retrouver des sin et cos.

Remarque : La linéarisation permet le calcul de certaines intégrales.

Exemple

Pour $\theta \in \mathbf{R}$, linéariser $\sin^5 \theta$.

Solution :

Astuces pour calculer plus rapidement et vérifier les formules :

- Ne pas oublier de mettre le dénominateur à la bonne puissance.
- Les coefficients binomiaux sont symétriques : si on a la terme $n e^{ip\theta}$, on a aussi le terme symétrique $\pm n e^{-ip\theta}$ (permet de recomposer les fonctions trigonométriques).
→ il suffit de faire la moitié du développement.
- La présence du signe « - » dans le binôme, donne une alternance de signes « + » et « - » dans le développement.
→ si la fonction est paire, elle s'exprimera avec cos,
→ si la fonction est impaire, elle s'exprimera avec sin.
Pour savoir si le terme symétrique est affecté d'un + ou d'un -, il suffit de remplacer θ par $-\theta$ dans l'expression à développer.
- Les coefficients en exposant vont de 2 en 2.
→ tous les termes en argument ont la même parité.

Exemple

Pour $\theta \in \mathbf{R}$, linéariser $\sin^2 \theta \cos^4 \theta$.

Solution :

Méthode (*Dé-linéarisation*)

La délinéarisation consiste à transformer une expression de type $\sin(n\theta)$ ou $\cos(n\theta)$ en produits et puissances de $\sin \theta$ et $\cos \theta$.

C'est l'opération inverse de la linéarisation.

Pour cela

- On utilise la formule de Moivre

$$\cos(n\theta) = \Re((\cos \theta + i \sin \theta)^n) \quad \text{et} \quad \sin(n\theta) = \Im((\cos \theta + i \sin \theta)^n)$$

- On utilise la formule du binôme de Newton

Exemple

Délinéariser $\sin(5\theta)$.

Solution :

$$\triangle \quad \operatorname{Im}(e^{in\theta}) \neq (\operatorname{Im}(e^{i\theta}))^n \quad \text{et} \quad \sin(n\theta) \neq \sin^n \theta.$$

Astuce pour calculer plus rapidement et vérifier les formules :

La troisième ligne dans le calcul de l'exemple est inutile : puisqu'on sait qu'on prendra la partie imaginaire, ne calculer que les termes avec i en facteur.

→ il suffit de ne calculer que la moitié du binôme.

8 RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS POLYNOMIALES**A Second degré à coefficients réels****Théorème 8.1** (*Résolution des équations de degré 2*)

Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, avec $a \neq 0$. On définit l'équation de degré 2 à coefficients réels

$$(E) : az^2 + bz + c = 0$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux racines réelles distinctes

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une racine double

$$z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux racines complexes conjuguées distinctes

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Preuve (*à savoir*)

Idée : Mettre sous forme canonique pour n'avoir qu'un seul z dans l'équation, puis factoriser.

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left(z^2 + \frac{b}{a}z \right) + c = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) + c \\ &= a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

Si $\Delta \geq 0$, on pose $\delta = \sqrt{\Delta}$, sinon pour $\Delta < 0$, on pose $\delta = i\sqrt{|\Delta|}$.

De la sorte, on a $\delta^2 = \Delta$ et on obtient la formule

$$az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2 \right]$$

Et on utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$az^2 + bz + c = a \left[z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \right] \left[z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \right] = a(z - z_1)(z - z_2)$$

avec z_1 et z_2 les expressions données dans le théorème.

On conclut en sachant qu'un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul. ■

Théorème 8.2 (*Lien entre les racines et la factorisation*)

Soient $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, avec $a \neq 0$. (z_1, z_2) sont les racines de $az^2 + bz + c$ si et seulement si

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

Explications

Trouver les racines revient à factoriser le polynôme.

Preuve

C'est ce que nous avons fait dans la preuve précédente. ■

Remarque : On peut généraliser cette relation à un degré quelconque. C'est ce que nous ferons lorsque nous étudierons les polynômes : « z_1 racine si et seulement si $z - z_1$ factorise l'expression polynôme ».

Méthode (Équations de degré supérieur)

Pour résoudre une équation de degré 3 ou supérieur. On commence par chercher des racines évidentes pour factoriser

Exemple

Résoudre sur \mathbf{C} , $2z^3 - 2 = 0$.

Solution :

Toute la fin du polycopié est hors programme

Corollaire 8.3 (Relations coefficients-racines)

z_1 et z_2 sont les deux racines de $az^2 + bz + c$ si et seulement si

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Preuve

(\Rightarrow) Il suffit d'utiliser les expressions trouvées pour z_1 et z_2 ou de développer la forme factorisée. À noter que si $z_1 = z_2$, alors on compte la même racine deux fois.

(\Leftarrow) $az^2 + bz + ca \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a(z^2 - (z_1 + z_2)z - z_1 z_2) = a(z - z_1)(z - z_2)$ donc z_1 et z_2 sont les deux racines. ■

Corollaire 8.4

Soient $S \in \mathbf{C}$ et $P \in \mathbf{C}$, on définit le système d'équation

$$(E) : \begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P \end{cases}$$

(z_1, z_2) est solution de (E) si et seulement si ce sont les solutions de l'équation

$$z^2 - Sz + P = 0$$

Exemple

Résoudre le système : $(E) : \begin{cases} z_1 + z_2 = 4 \\ z_1 z_2 = -5 \end{cases}$

Solution :

B * Second degré à coefficients complexes**Partie hors programme :**

Dans le cadre du programme, seules les équations du second degré à coefficients réels sont exigibles. Davantage qu'un cours, on peut donc considérer cette partie comme un exercice qui met en œuvre la forme exponentielle complexe vue plus haut.

L'idée directrice est de généraliser la méthode de résolution des équations à coefficients réels. On s'aperçoit rapidement que le seul écueil dans la méthode développée précédemment intervient pour le calcul de la racine de Δ (ce qui avait déjà posé problème dans la cas de $\Delta < 0$ et avait nécessité la disjonction des cas).

La difficulté consiste donc à obtenir les valeurs de δ telles que $\delta^2 = \Delta$.

- Pour $\Delta > 0$, on a deux valeurs possibles pour δ : $\delta = -\sqrt{\Delta}$ ou $\delta = +\sqrt{\Delta}$.

Cela donne les deux solutions pour l'équation : $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Pour $\Delta = 0$, on trouve une seule solution $\delta = 0$.

- Pour $\Delta < 0$, on a $\delta = i\sqrt{|\Delta|}$ ou $\delta = -i\sqrt{|\Delta|}$.

On cherche désormais à trouver les valeurs possibles de δ quand $\Delta \in \mathbf{C}$.

Nous verrons alors que la disjonction des cas est superflue et que l'on peut énoncer les solutions sans y avoir recours.

Définition 8.5 (Racine carrée complexes)

Soit $\Delta \in \mathbf{C}$, les **racines carrées complexes** de Δ sont l'ensemble des δ tels que

$$\delta^2 = \Delta.$$

⚠ Sauf pour 0, la racine carrée complexe n'est pas unique. Il ne faut pas utiliser la notation « $\sqrt{\cdot}$ » pour une racine carrée complexe.

Exemple

Les racines carrées complexes de 49 sont 7 et -7 .
Les racines carrées complexes de -49 sont $7i$ et $-7i$.

Théorème 8.6 (Description des racines carrées complexes)

Soit $\Delta \in \mathbf{C}^*$, alors Δ peut être mis sous la forme $\Delta = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$,
 Δ admet exactement deux racines carrées complexes distinctes :

$$\delta_1 = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad \delta_2 = -\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\rho} e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)}$$

Exemple (Cas particuliers)

Appliquer la formule pour $\Delta \in \mathbf{R}_+^*$ puis pour $\Delta \in \mathbf{R}_-^*$.

Solution :

Explications

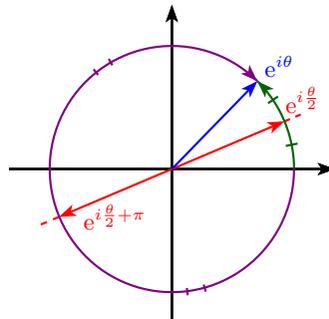
Un produit multiplie les modules et ajoute les arguments. Donc l'opération de mise au carré met le module au carré et multiplie par deux l'argument.

Pour trouver les racines carrées complexes, il suffit donc de faire l'opération inverse : on prend la racine carrée (réelle) du module et on divise l'argument par deux.

La *duplicité* des racines carrées provient du fait que l'argument peut être obtenu en tournant soit dans un sens, soit dans l'autre :

- si on tourne dans le sens direct, on obtient $\theta/2$,
- si on tourne dans l'autre sens, c'est que nous sommes partis avec un tour en trop : $\theta + 2\pi$. Lorsque l'on prend l'angle moitié on trouve donc $\theta/2 + \pi$. Le supplément d'argument π revient à prendre l'opposé car $e^{i\pi} = -1$.

Si on considère, des complexes de module 1, cela donne la figure ci-contre.

**Exemple**

Chercher les racines carrées complexes de i .

Solution :

Exemple

Chercher les racines carrées complexes de $1 + i$.

Solution :

Méthode (Lorsque Δ est sous forme cartésienne)

Soit $\Delta = a + ib$ et on cherche $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

$$\delta^2 = \Delta \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & \text{car } |\delta^2| = |\Delta| \\ x^2 - y^2 = a & \text{car } \Re(\delta^2) = a \\ 2xy = b & \text{car } \Im(\delta^2) = b \end{cases}$$

1. On trouve x^2 grâce aux deux premières relations.
2. On trouve y avec la dernière relation.

Remarque : D'un point de vue logique, la première relation n'est pas nécessaire, mais elle est très pratique à l'usage.

Exemple

Résoudre $\delta^2 = 5 - 12i$.

Solution :

Théorème 8.7 (Résolution des équations de degré 2)

Soient $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$, avec $a \neq 0$.

On définit l'équation (complexe) de degré 2

$$(\mathcal{E}) : az^2 + bz + c = 0$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et δ est une racine complexe de Δ (n'importe laquelle).

(\mathcal{E}) admet deux solutions (éventuellement confondues)

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

Preuve

C'est la même preuve que pour le cas réel. ■

Propriété 8.8

Le lien racine - factorisation vu sur \mathbf{R} reste valable sur \mathbf{C} .

Les relations coefficients-racines vues sur \mathbf{R} restent valables sur \mathbf{C} .

Exemple

Résoudre sur \mathbf{C} , $z^3 - z^2 - z e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{\frac{2i\pi}{3}} = 0$.

Solution :

Exemple

Résoudre le système : $(E) : \begin{cases} z_1 + z_2 = 6 - 10i \\ z_1 z_2 = -4(4 + 7i) \end{cases}$

Solution :

C ★ Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

Partie hors programme :

Cette partie est hors programme, mais elle intervient facilement dans des problèmes de concours. En plus, ce n'est pas dur !

Le but de cette partie est de généraliser ce nous avons fait avec la racine carrée pour une racine n -ième.

Définition 8.9 (*Racine n -ième*)

Soit $c \in \mathbf{C}$, on appelle **racine n -ième** de c , tout nombre complexe z tel que

$$z^n = c$$

Lorsque $c = 1$, on parle de racines n -ièmes de l'unité.

Exemple

0 possède une seule racine n -ième : 0.

Pour $n = 2$, les racines n -ièmes sont les racines carrées complexes.

Théorème 8.10 (*Racines n -ièmes de l'unité*)

On se place dans le cas particulier où $c = 1$.

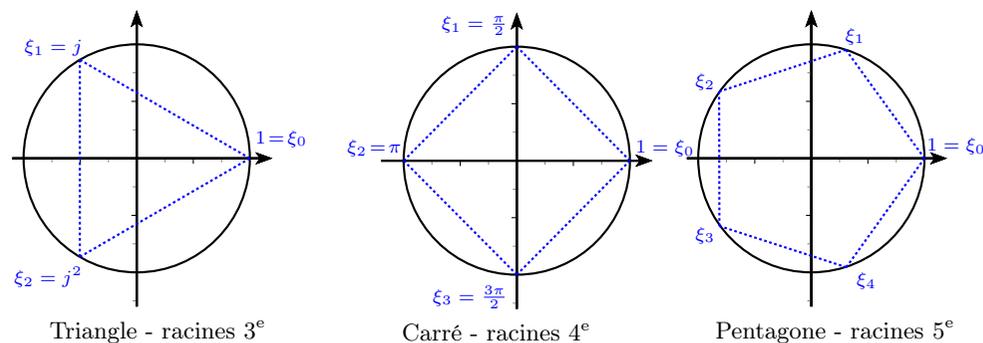
$c = 1$ possède exactement n racines n -ièmes qui sont

$$\mathbf{U}_n = \left\{ \xi_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

Remarque : Si on note $\xi_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, alors $\mathbf{U}_n = \left\{ \xi_1^k, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$.

Explications

Les racines n -ièmes de l'unité correspondent aux sommets des polygones réguliers à n côtés.



Preuve

(sens réciproque) Si $z \in \mathbf{U}_n$, alors z est racine n -ième de l'unité (trivial).

(sens direct) Si $z^n = 1$, alors en particulier $|z|^n = 1$.

Or l'équation $x^n = 1$ admet une seule solution sur \mathbf{R}_+ : $x = 1$.

Donc $|z| = 1$, z s'écrit donc sous la forme $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbf{R}$.

Or

$$e^{in\theta} = 1 \iff n\theta \equiv 0 \pmod{2\pi} \iff \theta \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{n}}$$

C'est-à-dire $\theta \in \left\{ \frac{2ik\pi}{n}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$. Donc $\mathcal{S} \subset \mathbf{U}_n$

Et les solutions ainsi décrites sont distinctes deux à deux.

On a déjà montré l'autre inclusion lors du sens réciproque, donc

$$\mathcal{S} = \mathbf{U}_n = \left\{ \xi_1^k, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

On remarque que pour décrire \mathbf{U} , on peut choisir $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ou $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ou avec tout autre ensemble tel que k prenne n valeurs entières consécutives : on obtiendra exactement les mêmes solutions (grâce au modulo 2π), seul l'ordre sera affecté. ■

Propriété 8.11 (Somme et produit des racines de l'unité)

On se place dans le cas particulier où $c = 1$.

Soit $n \geq 2$, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $\xi_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n-1} \xi_k = (-1)^{n-1}$$

Remarque : Cette relation pourrait être interprétée comme une relation coefficients/racines pour un degré supérieur à 2 : dans l'équation $z^n = 1$, le coefficient de z^{n-1} est 0 et le coefficient constant est -1 .

Preuve

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}} \right)^k \\ &= \frac{1 - e^{\frac{2in\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} \end{aligned}$$

(somme géométrique, $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$ car $n \neq 1$)

$$= 0$$

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \xi_k &= \prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}} \right)^k \\ &= \left(e^{\frac{2i\pi}{n}} \right)^{\sum_{k=0}^{n-1} k} \\ &= \left(e^{\frac{2i\pi}{n}} \right)^{n(n-1)/2} \\ &= \left(e^{i\pi} \right)^{n-1} \\ &= (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

■

Propriété 8.12 (Racines n -ièmes d'un nombre complexe)

On se place dans le cas général

Soit $c \in \mathbf{C}^*$, c admet exactement n racines n -ièmes distinctes qui sont

$$\left\{ \sqrt[n]{|c|} e^{\frac{\theta+2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

avec $\theta = \arg(c)$ et pour $x > 0$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \in \mathbf{R}$.

Preuve

Comme d'habitude, on se ramène au cas $|c| = 1$ en divisant par $|c| \neq 0$ (car $c \in \mathbf{C}^*$).

Si on pose $\theta = \arg(c)$, alors $\frac{c}{|c|} = e^{i\theta}$.

$$z^n = c = |c|e^{i\theta} \iff \left(\frac{z}{\sqrt[n]{|c|}} \right)^n = e^{i\theta}$$

Résoudre $z^n = c$, revient donc à résoudre $Z^n = e^{i\theta}$ avec $Z = \frac{z}{\sqrt[n]{|c|}}$.

Comme pour les racines n -ièmes de l'unité : si Z est solution de $Z^n = e^{i\theta}$, alors $|Z| = 1$. Donc les solutions sont incluses dans \mathbf{U} et peuvent donc s'écrire $Z = e^{i\varphi}$ avec $\varphi \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \left(e^{i\varphi} \right)^n = e^{i\theta} &\iff e^{in\varphi} = e^{i\theta} \iff n\varphi \equiv \theta \pmod{2\pi} \iff \varphi \equiv \frac{\theta}{n} \pmod{\frac{2\pi}{n}} \\ &\iff \varphi \in \left\{ \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \end{aligned}$$

Donc en multipliant $Z = e^{i\varphi}$ par $\sqrt[n]{|c|}$, on obtient bien les solutions énoncées dans le théorème. ■