POLYNÔMES À UNE INDÉTERMINÉE

"Le nombre qui possède une quantité indéterminée d'unités
s'appelle l'arithme, et sa marque distinctive est ζ."
Diophante

Les polynômes font partie des premiers objets apparus dans l'histoire des mathématiques. On les trouve dès l'époque babylonienne avec la description de méthodes de résolution des équations de degré 2.
Les résolutions des équations de degré supérieur ont beaucoup occupé les scientifiques de la Renaissance : Cardan, Tartaglia, Ferraro. Elles ont fait l'objet de nombreux "défis" dans lesquels les mathématiciens se mesuraient l'un à l'autre et démontraient leur agilité[1].
C'est au XIX$^{\text{ème}}$ siècle qu'Abel puis Galois mettent fin à la course aux résolutions d'équations polynomiales en démontrant que les équations de degré 5 et plus ne sont en général pas résolubles par radicaux. Les outils qu'ils introduisent pour leur démonstration ouvrent de nouvelles perspectives aux mathématiques et donnent une impulsion déterminante à l'algèbre.

Les polynômes ont la spécificité de constituer un pont naturel entre l'analyse et l'algèbre selon qu'ils sont vus comme applications, ou comme objets algébriques. La démonstration par Gauss du théorème de d'Alembert-Gauss en est un exemple éloquent (et hors programme).

Notation : Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 DÉFINITION PRÉALABLE

Définition 1.1 (Combinaison linéaire)
Soient $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ des objets mathématiques,
Lorsque cela est défini, on nomme **combinaison linéaire** de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{K}$, toute somme **finie** de la forme

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

Exemple

Toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut s'écrire comme $\mathbb{K}$-combinaison linéaire des matrices élémentaires $\left(E_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.
Tout vecteur du plan $\mathbb{R}^2$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{i}(1,0)$ et $\overrightarrow{j}(0,1)$:

$$(x,y) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$$

[1] Rappel : Internet et la télévision n'existaient pas à l'époque, alors il fallait bien s'occuper...

2 Construction de l'espace des polynômes

A Définition

Définition 2.1 (Polynôme formel)

On appelle **monôme** d'indéterminée X, toute expression de la forme

$$aX^k$$

avec $a \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}$.

Pour $k = 0$, on note $X^0 = 1$.

On appelle **polynôme** d'indéterminée X sur $\mathbb{K}$ toute somme (finie) de monômes. On note alors

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

$a_0, a_1, \cdots, a_n$ sont les **coefficients** de P.

Explications :

Les polynômes sont exactement les combinaisons linéaires de $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Exemple

$5X^3$, $2X^5$ et 4 sont des monômes.
$X^5 + 2X^4 - X^2 + 9$ est un polynôme.

Remarque : Pour exprimer un polynôme, on écrit ses monômes par ordre de puissance (croissante ou décroissante). Dans le monôme, la puissance est un entier positif. Il n'existe pas de puissance négative de X avec les polynômes.

Définition 2.2 (Égalité de deux polynômes)

Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients le sont indice par indice.
C'est le **principe d'identification** des polynômes.

En particulier, un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Exemple

$(X-1)(X+1) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \iff a_0 = -1, a_1 = 0, a_2 = 1$ et $a_3 = 0$.

Définition 2.3 :

On appelle **polynôme nul**, le polynôme $P = 0$.
On appelle **polynôme unité**, le polynôme $P = 1$.
On dit qu'un polynôme est **pair**, si tous ses coefficients d'indice impair sont nuls.
On dit qu'un polynôme est **impair**, si tous ses coefficients d'indice pair sont nuls.

Exemple

$P = 1 - 3X^2 + 2X^8$ est un polynôme pair.

B Degré d'un polynôme

Définition 2.4 (Degré d'un polynôme)

On appelle **degré du polynôme**, l'indice de son dernier coefficient non nul. On note $\deg(P)$ le degré de P
Par convention $\deg(0) = -\infty$

Le **coefficient dominant** d'un polynôme (non nul) est son dernier coefficient non nul.
Un **polynôme unitaire** est un polynôme de coefficient dominant égal à 1.
Un **polynôme constant** est un polynôme nul ou de degré 0.

Exemple

Le degré de $-3X^5 - X^2 + 7$ est 5, son coefficient dominant est -3.
$X^4 + X^3 - X - 9$ est un polynôme unitaire.

Attention : $\deg P = 0 \not\Rightarrow P = 0$

Notation :
$\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes d'indéterminée X sur $\mathbb{K}$.
$\mathbb{K}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes d'indéterminée X sur $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n.

Attention : Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$, alors on n'a pas nécessairement $\deg P = n$, mais plutôt $\deg P \leq n$.

C Somme, produit et puissances de polynômes

Convention d'écriture :
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, avec $\deg P = n$.
Si on note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors pour tout $k \geq n+1$, on pose par convention que $a_k = 0$.

Cette convention nous permet d'écrire très simplement les formules qui suivent pour la somme et le produit de polynômes.

Définition 2.5 (Opérations sur les polynômes)

Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$

On définit la somme de P et Q par

$$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k$$

On définit le produit de P par le scalaire λ par

$$\lambda P = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) X^k$$

On définit le produit de P par Q par

$$PQ = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \qquad \text{avec} \qquad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Exemple

Si $P = 1 + 2X - 3X^4$, $\quad Q = 3X + X^3 + X^4 - X^5 \quad$ et $\quad \lambda = 2$

$$P + Q = 1 + 5X + X^3 - 2X^4 - X^5$$

$$\lambda P = 2 + 4X - 6X^4$$
$$PQ = (1 + 2X - 3X^4)(3X + X^3 + X^4 - X^5) = 3X + 6X^2 + X^3 + 3X^4 - 8X^5 - 2X^6 - 3X^7 - 3X^8 + 3X^9$$

Explications :

Ces opérations correspondent aux opérations “naturelles”.
Dans le produit, le coefficient c_k correspond à tous les produits de termes qui interviennent dans le monôme X^k. Si on “*choisit*” $a_i X^i$ dans le premier polynôme, alors il faut le multiplier par un monôme de degré X^{k-i} pour obtenir un monôme de degré X^k. On a donc le terme $a_i b_{k-i}$. Il faut ajouter tous les produits ainsi obtenus à partir des différents coefficients de P. On trouve $c_k = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{k-i}$.
Ce coefficient peut aussi être interprété comme une façon de calculer une somme double :

$$\begin{aligned} PQ &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j X^j\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j X^{i+j} \\ &= \sum_{k=0}^{n+m}\sum_{i+j=k} a_i b_j X^{i+j} \\ &= \sum_{k=0}^{n+m}\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \end{aligned}$$

Nous avons déjà vu plusieurs façon de calculer une somme double au moment du chapitre sur sommes et produit. La multiplication polynomiale nous en donne une dernière : **les sommes de Cauchy**.
Au lieu de sommer en ligne ou en colonne, on somme en diagonale. Sur chaque diagonale, la somme $i + j$ est constante : on obtient un monôme. Le polynôme produit est la somme de tous ces monômes.

		j								
		$j=0$	$j=1$	$\cdots$		$\cdots$	$j=m-2$	$j=m-1$	$j=m$	
	$i=n$	$a_n b_0$	$a_n b_1$		$a_n b_{k-n}$		$\ddots$	$a_n b_{m-1}$	$a_n b_m$	
	$i=n-1$	$a_{n-1} b_0$	$a_{n-1} b_1$			$\ddots$		$\ddots$	$a_{n-1} b_m$	c_{m+n} $i+j=m+n$
	$\vdots$						$\ddots$		$\ddots$	c_{m+n-1} $i+j=m+n-1$
i	$i=3$	$a_3 b_0$	$\ddots$					$a_i b_{k-i}$		$\vdots$
	$i=2$	$a_2 b_0$	$a_2 b_1$	$\ddots$					$\ddots$	
	$i=1$	$a_1 b_0$	$a_1 b_1$	$a_1 b_2$	$\ddots$					c_k $i+j=k$
	$i=0$	$a_0 b_0$	$a_0 b_1$	$a_0 b_2$	$a_0 b_3$	$\ddots$				$\vdots$
			c_0 $i+j=0$	c_1 $i+j=1$	c_2 $i+j=2$	c_3 $i+j=3$	$\cdots$		$\cdots$	

Méthode (Calcul pratique du produit de deux polynômes)

Pour faire le produit de deux polynômes (ou plus), il est souvent malhabile de faire un développement "classique" tel que vous le faites depuis le collège.
Il est préférable de faire directement le calcul des c_k : choisir les termes dans chaque parenthèse, pour que, multipliés entre eux, ils donnent le bon degré k.
Nous avons déjà utilisé ces méthodes de *calcul rapide* lors de la linéarisation/délinéarisation en trigonométrie.

Propriété 2.6 :

a) les lois somme, produits sont associatives.

b) la loi produit "$\times$" est commutative sur $\mathbb{K}[X]$.
$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$,
$$PQ = QP$$

c) le produit est distributif par rapport aux additions de $\mathbb{K}$ et de $\mathbb{K}[X]$.
$\forall P, Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,
$$(\lambda + \mu) P = \lambda P + \mu P \qquad \text{et} \qquad P(Q_1 + Q_2) = PQ_1 + PQ_2$$

Théorème 2.7 (Stabilité des polynômes)

$\mathbb{K}[X]$ est stable par somme, par produit avec un scalaire et par produit entre polynômes.
C'est-à-dire que la somme de deux polynômes est un polynôme,
le produit de deux polynômes est un polynôme,
le produit d'un polynôme par un scalaire est un polynôme.

Propriété 2.8 :

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$,
$$\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$$
$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$
Et si $\deg P \neq \deg Q$, alors $\deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$.

Remarque : C'est pour que ces formules soient aussi valables avec le polynôme nul qu'il a un degré égal à $-\infty$.

Preuve :

Trivial pour la somme, c'est donné par la formule du cours.
Le cas d'égalité pour $\deg P \neq \deg Q$ est une condition suffisante (et non nécessaire).

Pour le produit, si P ou Q est nul, le résultat est immédiat.
Si P et Q sont tous deux non nuls, on démontre le résultat en deux étapes (on obtient l'égalité par une double inégalité).

- On montre que $\deg(PQ) \leq m + n$, c'est-à-dire que tous les coefficients d'indice supérieur sont nuls.
- On montre que $\deg(PQ) \geq m + n$, c'est-à-dire que le coefficient d'indice $m + n$ est non nul.

- On commence par montrer $\deg(PQ) \leq m + n$. La formule du cours le donne explicitement, mais on va néanmoins vérifier que pour tout $k \geq m + n + 1$, $c_k = 0$.
On suppose donc $k \geq m + n + 1$, alors

$$\begin{aligned}
c_k &= \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i b_{k-i} && \text{car } a_i = 0 \text{ pour } i \geq n+1 \\
&= \sum_{i=k-m}^{n} a_i b_{k-i} && \text{car } b_{k-i} = 0 \text{ pour } k - i > m \iff i < k - m
\end{aligned}$$

Or $k \geq m+n+1$, donc $k-m \geq n+1 > n$ donc la somme est vide.
Donc pour $k \geq m+n+1$, $c_k = 0$
Donc $\deg(PQ) \leq m+n$

- On montre ensuite que $c_{m+n} \neq 0$.
  D'après le raisonnement précédent, pour $k = m+n$, on a

$$\begin{aligned} c_{k=m+n} &= \sum_{i=k-m}^{n} a_i b_{k-i} && \text{car } b_{k-i} = 0 \text{ pour } k-i > m \iff i < k-m \\ &= \sum_{i=n}^{n} a_i b_{m+n-i} && \text{on remplace } k \text{ par } m+n \\ &= a_n b_m \end{aligned}$$

  Or $a_n \neq 0$ car $\deg P = n$ et $b_m \neq 0$ car $\deg Q = m$, donc $c_{m+n} = a_n b_m \neq 0$.
  Donc $\deg(PQ) \geq m+n$

- Conclusion : par double inégalité, $\deg(PQ) = m+n$

■

Théorème 2.9 :
$P \times Q = 0 \Rightarrow P = 0$ ou $Q = 0$
On dit que $\mathbb{K}[X]$ est *intègre*.

Corollaire 2.10 :

On peut simplifier par des polynômes non nuls dans les équations.

Preuve :

Voici un exemple qui montre que raisonner avec les degrés peut s'avérer très efficace :
Par contraposée, si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$, alors $\deg P \in \mathbb{N}$ et $\deg Q \in \mathbb{N}$,
ainsi $\deg PQ = \deg P + \deg Q \in \mathbb{N}$,
Donc $PQ \neq 0$. ■

Théorème 2.11 :
Les seuls polynômes inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les constantes non nulles : $\lambda.1_{\mathbb{K}[X]}$, pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$

Preuve :

Analyse :
P est inversible si et seulement s'il existe un polynôme Q tel que $PQ = 1$.
En particulier P et Q sont non nuls.
Si on suppose P inversible et Q son inverse, alors $\deg P + \deg Q = \deg PQ = \deg 1_{\mathbb{K}[X]} = 0$.
Or $\deg P \in \mathbb{N}$ et $\deg Q \in \mathbb{N}$ (car ils sont non nuls).
donc la seule solution est $\deg P = \deg Q = 0$.
Donc P est une constante non nulle.
Synthèse :
Réciproquement, si P est une constante non nulle λ, alors si on pose $Q = \frac{1}{\lambda}$, c'est aussi un polynôme et $PQ = 1$.
Donc P est inversible.
Conclusion : P est inversible si et seulement si c'est une constante non nulle. Son inverse est alors l'inverse de cette constante dans $\mathbb{K}$. ■

Propriété 2.12 (Formule du binôme de Newton)
La formule du binôme de Newton est valable sur $\mathbb{K}[X]$:
Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, et $n \in \mathbb{N}$

$$(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$$

Preuve :

Cela provient du fait que le produit entre polynômes est commutatif. C'est alors exactement la même preuve que sur $\mathbb{R}$. ■

Nous verrons en exercice que cela, joint avec le principe d'identification, permet d'obtenir facilement des identités sur les coefficients binomiaux.

Propriété 2.13 (Égalité de Bernoulli)

La formule de Bernoulli est valable sur $\mathbb{K}[X]$:
Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, et $n \in \mathbb{N}$

$$P^{n+1} - Q^{n+1} = (P - Q) \sum_{k=0}^{n} P^k Q^{n-k}$$

Preuve :

Comme sur $\mathbb{R}$ car le produit entre polynômes commute. ■

D Complément hors programme : composition de polynômes

Définition 2.14 (Puissance $k^{\text{ème}}$ d'un polynôme)

On définit par récurrence la puissance $k^{\text{ème}}$ d'un polynôme P avec

- $P^0 = 1$
- $\forall k \geq 0,\ P^{k+1} = P \times P^k$

Définition 2.15 (Composée de deux polynômes)

Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, on définit alors la composée de P et Q par

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{m} b_i X^i \right)^k$$

Exemple

$P = 3X^2 + 7X - 1$ et $Q = X^2 + 1$

Propriété 2.16 :

Soient P et Q deux polynômes (non nuls) de $\mathbb{K}[X]$,

$$\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q$$

3 Fonctions polynomiales et polynôme dérivé

A Fonction polynomiale associée

Définition 3.1 :

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.
On appelle application polynomiale associée à P, l'application :

$$\widetilde{P} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{cases}$$

Remarque : Par abus de langage, on confond parfois polynôme et fonction polynomiale. Mais n'oubliez pas que $x \in \mathbb{K}$ est un nombre **fixé**, alors que X est une indéterminée.
Ainsi $X^2 + 1$ désigne toute la fonction $x \mapsto x^2 + 1$, en revanche $x^2 + 1$ ne désigne que la valeur de cette fonction pour un certain $x \in \mathbb{K}$.

Propriété 3.2 :

Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\widetilde{P+Q} = \widetilde{P} + \widetilde{Q}$$
$$\widetilde{\lambda P} = \lambda \widetilde{P}$$
$$\widetilde{P \times Q} = \widetilde{P} \times \widetilde{Q}$$
$$\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$$

Autrement dit, les opérations sur les polynômes et les opérations sur les fonctions polynomiales fournissent le même résultat.

Théorème 3.3 (Lien bijectif entre les polynômes et les applications polynomiales)

L'application

$$\phi \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & \widetilde{P} \end{cases}$$

réalise une bijection entre entre $\mathbb{K}[X]$ et l'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathbb{K}$

Explications :

C'est cette bijection qui fait le lien entre les polynômes et les applications polynomiales, c'est à dire entre l'algèbre et l'analyse.
Elle justifie que l'on puisse utiliser l'analyse pour démontrer des résultats d'algèbre et réciproquement.
L'injectivité de l'application signifie que l'écriture des fonctions polynômiales est unique sur $\mathscr{P}(\mathbb{K})$: le principe d'identification est aussi valable sur $\mathscr{P}(\mathbb{K})$. Par contre, il faut faire attention, l'identification des facteurs n'est possible que lorsque l'on travaille avec la fonction (complète) et non pas seulement pour une valeur de x.

Preuve :

Surjectivité : trivial du fait de la définition de $\mathscr{P}(\mathbb{K})$.
Injectivité :
Soient $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tels que $\widetilde{P} = \widetilde{Q}$. On cherche alors à montrer que $P = Q$.
On le fait par récurrence sur le degré.

Si l'un des polynômes est nul, alors le résultat est trivial. On suppose donc P et Q non nuls et on pose $n = \max(\deg P, \deg Q)$.

- **Initialisation :** pour $n = 0$, on peut écrire $P = a_0$ et $Q = b_0$.
  Ainsi les applications polynomiales associées sont constantes et elles sont égales si et seulement si $a_0 = b_0$: $P = Q$.
  Donc, pour $n = 0$, on a $P = Q$.

- **Hérédité :** supposons le résultat vrai au rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons le au rang $n+1$.
  On pose alors
  $$P = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{n+1} b_k X^k$$
  On sait, par hypothèse, que les applications polynomiales $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$ sont égales. En particulier en $x=0$, on obtient
  $$a_0 = \widetilde{P}(0) = \widetilde{Q}(0) = b_0$$
  Les deux polynômes ont donc même coefficient de degré 0, on s'intéresse donc à présent aux polynômes
  $$P_1 = P - a_0 = \sum_{k=1}^{n+1} a_k X^k = X\left(\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} X^k\right)$$
  et
  $$Q_1 = Q - b_0 = \sum_{k=1}^{n+1} b_k X^k = X\left(\sum_{k=0}^{n} b_{k+1} X^k\right)$$
  Comme $\widetilde{P} = \widetilde{Q}$ et $a_0 = b_0$, alors $\widetilde{P_1} = \widetilde{Q_1}$.
  En particulier, pour tout $x \neq 0$,
  $$\frac{\widetilde{P_1}(x)}{x} = \frac{\widetilde{Q_1}(x)}{x}$$
  Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} x^k$
  Ces deux applications admettent chacune une limite finie en 0 qui vaut respectivement a_1 et b_1 (ces deux limites sont égales car les applications sont égales partout ailleurs).
  Ainsi les applications polynomiales correspondantes sont égales sur $\mathbb{R}$.

  Or $x \mapsto \dfrac{\widetilde{P_1}(x)}{x}$ est l'image de $P_2 = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} X^k$ par l'application ϕ.
  De même, $x \mapsto \dfrac{\widetilde{Q_1}(x)}{x}$ est l'image de $Q_2 = \sum_{k=0}^{n} b_{k+1} X^k$ par l'application ϕ.
  Et ces applications sont égales. Or $\deg P_2 \leq n$ et $\deg Q_2 \leq n$, donc par hypothèse de récurrence, $P_2 = Q_2$.
  Donc, $\forall k \geq 1,\ a_k = b_k$, et on a montré en outre que $a_0 = b_0$.

  Donc $P = Q$, ce qui prouve l'hérédité.

Ainsi, par principe de récurrence, l'application ϕ est injective. ■

B Dérivation

Définition 3.4 (Polynôme dérivé)

Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.
On définit le **polynôme dérivé**, P' par
$$P' = n a_n X^{n-1} + (n-1) a_{n-1} X^{n-2} + \cdots + 2 a_2 X + a_1$$

Explications :

La dérivation polynomiale coïncide avec la dérivation des fonctions polynomiales. En particulier, les règles de calcul valables sur les fonctions polynomiales restent vraies avec les polynômes.

Propriété 3.5 **(Propriétés de la dérivation)**

L'*opérateur dérivation* est un opérateur **linéaire** sur $\mathbb{K}[X]$.
$\forall (P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},$

$$(P+\lambda Q)' = P' + \lambda Q'$$

Identité de Leibniz
Si $P,Q \in (\mathbb{K}[X])^2$, alors

$$(PQ)' = P'Q + PQ'$$

Définition 3.6 **(Dérivée $k^{\text{ième}}$)**

Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit par récurrence la dérivée $k^{\text{ième}}$ de P par

- $P^{(0)} = P$
- $P^{(k+1)} = (P^{(k)})' = (P')^{(k)}$

Propriété 3.7 **(Degré du polynôme dérivé)**

Si $\deg P > 0$, alors $\deg P' = (\deg P) - 1$

Corollaire 3.8 :

$$\forall k \geq \deg P + 1, \quad P^{(k)} = 0$$

La formule suivante est pour information. Elle est hors programme.

Propriété 3.9 **(Formule de Leibniz)**

Soient P,Q deux polynômes, la dérivée n-ième du produit est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, (PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

Preuve :

Par récurrence sur n comme pour le binôme de Newton. ■

4 Racines d'un polynôme

A Racines et factorisation

Définition 4.1 **(Racine d'un polynôme)**

On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de P si $\widetilde{P}(\alpha) = 0$.

Théorème 4.2 **(Lien entre racines et factorisation)**

α est une racine de P sur $\mathbb{K}$ si et seulement si P est factorisable par $(X - \alpha)$.

Preuve :

(sens réciproque)
Si $(X-\alpha)$ factorise P, alors $P=(X-\alpha)Q$.
Donc $\widetilde{P}(\alpha)=\widetilde{(X-\alpha)}(\alpha)\times\widetilde{Q}(\alpha)=0\times\widetilde{Q}(\alpha)=0$.
(sens direct)
Soit $P=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kX^k$ tel que $P(\alpha)=0$,

$$P(X)=P(X)-P(\alpha)=\sum_{k=0}^{n}a_k\left(X^k-\alpha^k\right)$$

Or d'après la formule de Bernoulli,

$$X^k-\alpha^k=(X-\alpha)\sum_{i=0}^{k-1}X^i\alpha^{k-i-1}=(X-\alpha)\,Q_k(X)$$

Donc

$$P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_k(X-\alpha)\,Q_k(X)=(X-\alpha)\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n}a_kQ_k(X)\right)}_{\in\mathbb{K}[X]}$$

Donc P est factorisable par $X-\alpha$. ■

Explications :

Trouver les racines d'un polynôme sur $\mathbb{K}$ ou le factoriser revient au même. Si on trouve des racines évidentes d'un polynôme, cela permet de trouver une factorisation. Nous avons déjà utilisé cette méthode.

Exemple

Factoriser $P=X^4-2X^3-16X^2+2X+15$.
Solution :
1 est racine évidente, donc on peut factoriser par $X-1$:

$$P=(X-1)(X^3-X^2-17X-15)$$

-1 est racine évidente, donc on peut factoriser par $X+1$:

$$P=(X-1)(X+1)(X^2-2X-15)$$

On trouve ensuite deux racines -3 et 5 soit par essais, soit avec le calcul du discriminant Δ.
Donc $P=(X-1)(X+1)(X+3)(X-5)$

Définition 4.3 (Multiplicité d'une racine)

Si α est racine de P, alors sa **multiplicité** est égale au plus grand entier m tel que

$$\widetilde{P}(\alpha)=\widetilde{P'}(\alpha)=\ldots=\widetilde{P^{(m-1)}}(\alpha)=0$$

Remarque : Cela suppose donc que $\widetilde{P^{(m)}}(\alpha)\neq 0$

Exemple

Pour un polynôme du second degré, on a une racine double α lorsque $\Delta=0$. Dans ce cas, on a bien $\widetilde{P}(\alpha)=\widetilde{P}'(\alpha)=0$.
En effet, la courbe est tangente à l'axe des abscisses en α. Elle s'annule donc en α et sa dérivée est nulle en ce point (minimum avec tangente horizontale).

Théorème 4.4 (Racine multiple et factorisation)

α est une racine de P de multiplicité m sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $(X-\alpha)^m$ factorise P et $(X-\alpha)^{m+1}$ ne factorise pas P.

Preuve :

(sens direct) Admis.
(sens réciproque)
Si $(X-\alpha)^m$ factorise P, alors $P=(X-\alpha)^m Q$.
Et $(X-\alpha)$ ne factorise par Q (sinon la racine serait de multiplicité supérieure à m). Donc d'après le théorème 4.2, $\widetilde{Q}(\alpha)\neq 0$.
On peut montrer par récurrence finie sur $k\leq m$ que

$$\begin{aligned}P^{(k)} &= m(m-1)\cdots(m-k+1)\,(X-\alpha)^{m-k}\,Q+(X-\alpha)^{m-k+1}R_k\\ &= \frac{m!}{(m-k)!}\,(X-\alpha)^{m-k}\,Q+(X-\alpha)^{m-k+1}R_k\end{aligned}$$

Avec R_k un polynôme.
Initialisation :
Pour $k=0$, $P=\frac{m!}{m!}(X-\alpha)^m Q$.
La propriété est donc vraie au rang 0 avec $R_k=0$.
Hérédité :
On suppose la relation vraie au rang $k\geq 0$, alors il existe $R_k\in K[X]$ tel que

$$P^{(k)}=\frac{m!}{(m-k)!}\,(X-\alpha)^{m-k}\,Q+(X-\alpha)^{m-k+1}R_k$$

Alors

$$\begin{aligned}P^{(k+1)} &= \frac{m!}{(m-k)!}(m-k)\,(X-\alpha)^{m-k-1}\,Q+\frac{m!}{(m-k)!}\,(X-\alpha)^{m-k}\,Q'+(m-k+1)(X-\alpha)^{m-k}R_k+(X-\alpha)^{m-k+1}R'_k\\ &= \frac{m!}{(m-k-1)!}\,(X-\alpha)^{m-k-1}\,Q+(X-\alpha)^{m-k}\left(\frac{m!}{(m-k)!}Q'+(m-k+2)R_k+(X-\alpha)R'_k\right)\\ &= \frac{m!}{(m-k-1)!}\,(X-\alpha)^{m-k-1}\,Q+(X-\alpha)^{m-k}\,R_{k+1}\end{aligned}$$

En posant $R_{k+1}=\frac{m!}{(m-k)!}Q'+(m-k+2)R_k+(X-\alpha)R'_k\in\mathbb{K}[X]$.
Conclusion :
Pour tout $k\leq m$, il existe $R_k\in\mathbb{K}[X]$ tel que

$$P^{(k)}=\frac{m!}{(m-k)!}\,(X-\alpha)^{m-k}\,Q+(X-\alpha)^{m-k+1}R_k$$

En particulier, si on évalue en α, pour $k<m$, on a $m-k\geq 1$ et $m-k+1\geq 1$, donc

$$\widetilde{P}^{(k)}=\frac{m!}{(m-k)!}0\times\widetilde{Q}(\alpha)+0\times\widetilde{R_k}(\alpha)=0$$

Par contre, pour $k=m$,

$$P^{(m)}=\frac{m!}{(m-m)!}\,(X-\alpha)^{m-m}\,Q+(X-\alpha)^{m-m+1}R_m=Q+(X-\alpha)R_m$$

Donc $\widetilde{P^{(m)}}(\alpha)=\widetilde{Q}(\alpha)\neq 0$ (vu en début de preuve).
Remarque : La preuve peut aussi être faite avec la formule de Leibniz, que nous n'avons pas utilisée ici car elle est hors programme. ∎

Exemple

0 est racine triple (de multiplicité 3) de $X^7-3X^5+2X^4-X^3$

Propriété 4.5 :
Soit $P\in\mathbb{K}[X]$, alors si $\alpha_1,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ sont n racines distinctes de P de multiplicités $m_1,m_2,\cdots,m_n$, alors

$$P\quad\text{factorisable par}\quad (X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}\cdots(X-\alpha_n)^{m_n}$$

Preuve :

Admis. Facile à montrer par récurrence pour $m_i = 1$, mais sinon, cela requiert de l'arithmétique qui n'est pas à votre programme. ■

Corollaire 4.6 :
Le nombre de racines (comptées avec leur multiplicité) d'un polynôme non nul est inférieur ou égal à son degré.
Seul le polynôme nul admet une infinité de racines

Méthode (Montrer qu'un polynôme est nul)
Pour montrer qu'un polynôme est nul, on peut au choix :

a) montrer que tous ses coefficients sont nuls

b) montrer qu'il admet une infinité de racines,

c) montrer qu'il admet plus de racines que son degré,

d) montrer que son degré ne peut être un nombre entier.

$\Rightarrow$ on raisonne souvent par l'absurde pour montrer qu'un polynôme est nul.

Exemple

Soient $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$ deux applications polynomiales.
S'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\widetilde{P}(x) = \widetilde{Q}(x)$, cela entraîne-t-il que $P = Q$?
S'il existe $a < b$ tels que $\forall x \in]a, b[$, $\widetilde{P}(x) = \widetilde{Q}(x)$, cela entraîne-t-il que $P = Q$?

B Le théorème de d'Alembert-Gauss

Définition 4.7 (Polynôme scindé)
Un polynôme est **scindé** s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 et d'un coefficient constant.

$$P = \lambda \prod_{i=0}^{p} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

Théorème 4.8 (Théorème de d'Alembert-Gauss - Théorème fondamental de l'algèbre)
Tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$.

Autre formulation : Tout polynôme non constant admet au moins une racine sur $\mathbb{C}$.
Autre formulation : Tout polynôme non nul admet autant de racines sur $\mathbb{C}$ que son degré (comptées avec les ordres de multiplicité).

Preuve :

Admis, on se contente de montrer l'équivalence entre les trois formulations.
(1) $\Rightarrow$ (2)
Si P est non constant, alors $\deg P \geq 1$. Et P supposé scindé sur $\mathbb{C}$ (1).
Donc $P = \lambda \prod_{i=0}^{p} (X - \alpha_i)^{m_i}$ avec un produit non vide.
Il existe donc au moins une racine $\alpha_0 \in \mathbb{C}$.
(2) $\Rightarrow$ (3)
On le montre par récurrence sur $\deg P$.
Initialisation : si $\deg P = 0$, alors P est constant non nul et n'admet pas de racines.

Hérédité : On suppose le résultat vrai pour $\deg P = n \in \mathbb{N}$.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg P = n+1$.
Alors $n+1 \geq 1$, donc P est non constant et admet au moins une racine $\alpha \in \mathbb{C}$ (2).
Donc $X-\alpha$ factorise P et on peut écrire $P = (X-\alpha)Q$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$ (et non pas $\mathbb{K}[X]$).
Or $\deg Q = n$, donc par hypothèse de récurrence, Q admet autant de racines que son degrés.
Donc en ajoutant α, P admet aussi autant de racines que son degré.
Conclusion : Par principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.
(3) $\Rightarrow$ (1)
Si P admet autant de racines que son degré, alors si on note ces racines $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ de multiplicités $m_1, m_2, \cdots, m_p$, on peut écrire d'après la propriété 4.5 : $P = Q\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{m_i}$.
Et par égalité des degrés, $\deg Q = 0$, donc $Q = \lambda \in \mathbb{C}$ est une constante.
P est donc bien scindé sur $\mathbb{C}$. ■

Attention : C'est faux sur $\mathbb{R}[X]$, par exemple X^2+1 n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, mais il est scindé sur $\mathbb{C}$.

C Racines d'un polynôme à coefficients réels

Propriété 4.9 :
Les racines complexes d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ sont conjuguées.
Une racine et sa conjuguée ont alors la même multiplicité.

Autre formulation : Si P est un polynôme à coefficients réels, et si α est racine de P, alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P de même multiplicité.

Preuve :
P est à coefficients réels, on l'écrit
$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$
avec $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$
Ainsi, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$,
$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(\alpha) = 0 &\iff \overline{\widetilde{P}(\alpha)} = 0 \\
&\iff \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k} = 0 \\
&\iff \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k \alpha}^k = 0 \\
&\iff \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{\alpha}^k = 0 && \text{car } a_k \in \mathbb{R} \\
&\iff \widetilde{P}(\overline{\alpha}) = 0
\end{aligned}$$

On peut faire de même avec les dérivées successives de P. ■

Définition 4.10 (Polynôme irréductible)
Un polynôme est dit **irréductible**, s'il ne peut pas être factorisé en produit de polynômes de degrés strictement inférieurs au sien.

Théorème 4.11 (Irréductibles sur $\mathbb{R}$)
Les polynômes que l'on ne peut pas factoriser sur $\mathbb{R}$ sont

- les polynômes de degré ≤ 1,
- les polynômes de degré 2 à discriminant négatif.

Preuve :

On décompose le polynôme sur $\mathbb{C}$.
On regroupe les racines complexes conjuguées : cela donne un produit de monômes (racines réelles) et de polynômes de degré 2 (racines complexes conjuguées). ■

Exercice

Montrez qu'un polynôme réel de degré impair, admet au moins une racine réelle.
Faites une preuve d'un point de vue algébrique, et une preuve d'un point de vue analytique.

Méthode :

Pour décomposer un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$, on peut déjà le décomposer dans $\mathbb{C}[X]$

Attention : Ce n'est pas parce qu'un polynôme n'a pas de racines qu'il n'est pas factorisable.

Exemple

Par exemple $X^4+1=(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$ (obtenu avec les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité)

5 Complément : relations coefficients-racines

Ce théorème n'est pas à apprendre par cœur. Vous devez le "voir" sur le polynôme.

Théorème 5.1 (Relation coefficients-racines)
Soit P un polynôme **scindé** sur $\mathbb{K}$.

$$P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$$

Alors

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\qquad \text{et}\qquad \prod_{i=1}^{n}\alpha_k=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

Attention : Le polynôme est supposé scindé. C'est donc toujours vrai sur $\mathbb{C}$, mais ce résultat peut être mis en défaut sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

Il suffit de développer le polynôme scindé et de chercher le coefficient de X^0 et celui de X^{n-1}. ■

Exemple (Cas des polynômes de degrés 2 et 3, unitaire)

Degré 2 :
On note $P=X^2+bX+c$.
Si α et β sont racines de P, on peut alors écrire $P=(X-\alpha)(X-\beta)$,
alors en développant on obtient $P=X^2-(\alpha+\beta)X+\alpha\beta$
Et par identification :

$$a_1=-(\alpha+\beta)\qquad \text{et}\qquad a_0=\alpha\beta$$

Degré 3 :
On note $P=X^3+aX^2+bX+c$.
Si α, β et γ sont racines de P, on peut alors écrire $P=(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$,
Ainsi

$$P=X^3+(\alpha+\beta+\gamma)X^2+\left(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma\right)X-\alpha\beta\gamma$$

Par identification,

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-a\\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=b\\ \alpha\beta\gamma=-c\end{cases}$$

Attention: ici, les polynômes sont supposés unitaires. Sinon, il ne faut pas oublier de diviser par le coefficient dominant (non nul).

Explications :

Vous remarquerez que les valeurs des coefficients ne dépendent pas de l'ordre des racines (on peut intervertir α et γ par exemple). Heureusement.

Méthode :
Lorsque l'on connait une racine d'un polynôme de degré 2, il est facile d'obtenir la seconde à partir des coefficients.