Polynômes et fonctions polynomiales

"Le nombre qui possède une quantité indéterminée d'unités s'appelle l'arithme, et sa marque distinctive est ζ."
Diophante

Les polynômes font partie des premiers objets apparus dans l'histoire des mathématiques. On les trouve dès l'époque babylonienne avec la description de méthodes de résolution des équations de degré 2.
Les résolutions des équations de degré supérieur ont beaucoup occupé les scientifiques de la Renaissance : Cardan, Tartaglia, Ferraro. Elles ont fait l'objet de nombreux "défis" dans lesquels les mathématiciens se mesuraient l'un à l'autre et démontraient leur agilité[1].
C'est au XIX$^{\text{ème}}$ siècle qu'Abel puis Galois mettent fin à la course aux résolutions d'équations polynomiales en démontrant que les équations de degré 5 et plus ne sont en général pas résolubles par radicaux. Les outils qu'ils introduisent pour leur démonstration ouvrent de nouvelles perspectives aux mathématiques et donnent une impulsion déterminante à l'algèbre.
Les polynômes ont la spécificité de constituer un pont naturel entre l'analyse et l'algèbre selon qu'ils sont vus comme applications ou objets d'un espace vectoriel (ou d'un anneau euclidien).

Ce chapitre constitue une courte introduction à ces objets, visant à mettre en œuvre les notions d'algèbre linéaire.
Ils seront étudiés de façon plus approfondie en deuxième année.

1. Rappel : Internet et la télévision n'existaient pas à l'époque, alors il fallait bien s'occuper...

1 Définition et structure

Définition 1.1 *(Polynôme)*

Soient $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{R}_n[x]$, l'ensemble défini par

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_n[x] &= \left\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,\ (a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}\right\} \\ &= \left\{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ (a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}\right\}\end{aligned}$$

$\mathbf{R}_n[x]$ est composé de l'ensemble des combinaisons linéaires de $\left(1, x, x^2, \cdots, x^n\right)$.
Les éléments de $\mathbf{R}_n[x]$ sont appelés **expressions polynomiales** en x ou **polynômes**.
$a_0, a_1, \cdots, a_n$ sont les **coefficients** du polynôme.

Explications
x est à considérer comme une notation[2] que l'on sera ensuite amené à particulariser avec différentes valeurs réelles.
L'intérêt de l'objet apparaît quand on ne donne pas de valeur spécifique à x. Ainsi, on n'interprète pas $\mathbf{R}_n[x]$ comme un sous-ensemble de $\mathbf{R}$, mais plutôt comme un ensemble d'objets formels.
⚠ Les puissances de x sont toutes positives (pas de puissances négatives).

Principe d'identification 1.2

Deux polynômes sont dits **égaux** si leurs coefficients sont deux à deux égaux.

Explications
Ici, le fait de ne pas avoir attribué de valeur à x est primordial.
En effet, pour une valeur de x fixée, on pourrait avoir l'égalité de deux expressions polynomiales avec des coefficients différents.
Par exemple, pour $x = 0$,

$$1 + 2 \cdot x = 1 + 5 \cdot x\ .$$

Les deux valeurs réelles sont égales sans que les « coefficients » soient égaux. Par contre, si on choisit $x = 1$, alors les deux expressions ne sont plus égales.
Ainsi, le principe d'identification permet de s'assurer que les deux expressions sont égales quelle que soit la valeur choisie pour x.
À noter que l'on peut aussi choisir de remplacer x par d'autres types d'objets que des nombres : par des fonctions, des variables aléatoires... dès lors que l'on peut définir les puissances de x.

2. On parle « d'indéterminée » même si ce vocabulaire spécifique n'est pas au programme.

Définition 1.3 *(Opérations sur les polynômes)*

Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ deux expressions polynomiales de $\mathbf{R}_n[x]$, et $\lambda \in \mathbf{R}$.
On définit la somme de P et Q par $\quad P + Q = \sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k)x^k$.

On définit le produit de P par le scalaire λ par $\quad \lambda P = \sum_{k=0}^{n}(\lambda a_k)x^k$.

Le **polynôme nul** est donné par $0 = \sum_{k=0}^{n} 0 \cdot x^k$.

Théorème 1.4

Pour $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{R}_n[x]$ muni des opérations précédemment définies est un espace vectoriel.
Il est l'image de $\mathbf{R}^{n+1}$ par l'application linéaire :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbf{R}^{n+1} & \to \mathbf{R}_n[x] \\ (a_0, a_1, \cdots, a_n) & \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{cases}$$

Cette application est un isomorphisme.

Preuve

Il est immédiat de vérifier que l'application φ est bien linéaire avec les opérations définies sur $\mathbf{R}^{n+1}$ et sur $\mathbf{R}_n[x]$.
Et l'image d'un espace vectoriel par une application linéaire est un espace vectoriel.
L'application est injective car son noyau est réduit à $0_{\mathbf{R}^{n+1}}$ (principe d'identification). ■

⚠ $\mathbf{R}_n[x]$ est isomorphe à $\mathbf{R}^{\mathbf{n+1}}$ et non à $\mathbf{R}^n$. Il faut $n+1$ coefficients pour décrire un polynôme.

Théorème 1.5

$$\mathbf{R}_n[x] = \text{Vect}\ (1, x, \cdots, x^n)$$

$\mathcal{C} = (1, x, \cdots, x^n)$ forme une base de $\mathbf{R}_n[x]$, appelé sa **base canonique**.

Preuve *(« à la main »)*

Remarquons au préalable que tous les vecteurs de la famille $\mathcal{C}$ sont bien dans $\mathbf{R}_n[x]$.

- Montrons que la famille est génératrice.
  Soit $P \in \mathbf{R}_n[x]$ quelconque.
  Par définition, on peut écrire P sous la forme $P = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
  avec $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$. Ainsi P s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{C}$. Donc $\mathcal{C}$ est une famille génératrice de $\mathbf{R}_n[x]$.
- La famille est également libre car les coefficients d'un polynôme sont définis de manière unique (principe d'identification).

La famille $\mathcal{C}$ est donc une base de $\mathbf{R}_n[x]$. ■

Preuve *(« avec l'application »)*

$\mathcal{C}$ est l'image de la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$ par l'isomorphisme φ, c'est donc une base de $\mathbf{R}_n[x]$. ■

Définition 1.6 *(Monôme)*

On appelle **monôme** de $\mathbf{R}_n[x]$, un polynôme avec un unique coefficient non nul.
Il s'écrit sous la forme aX^k, avec $a \in \mathbf{R}$ et $k \in [\![0, n]\!]$.
Pour $k = 0$, on note $x^0 = 1$.

Définition 1.7

On appelle **polynôme unité**, le polynôme $P = 1$.
On dit qu'un polynôme est **pair**, si tous ses coefficients d'indice impair sont nuls.
On dit qu'un polynôme est **impair**, si tous ses coefficients d'indice pair sont nuls.

Exemple

$P = 1 - 3x^2 + 2x^8$ est un polynôme pair.

2 Degré d'un polynôme

Définition 2.1 *(Degré d'un polynôme)*

On appelle **degré du polynôme**, l'indice de son dernier coefficient non nul. On note $\deg(P)$ le degré de P. Par convention $\deg(0) = -\infty$

Le **coefficient dominant** d'un polynôme (non nul) est son coefficient non nul de plus grand indice. Un **polynôme unitaire** est un polynôme de coefficient dominant égal à 1.
Un **polynôme constant** est un polynôme nul ou de degré 0.

Exemple

Le degré de $-3x^5 - x^2 + 7$ est 5, son coefficient dominant est -3.
$x^4 + x^3 - x - 9$ est un polynôme unitaire.

⚠ $\deg P = 0 \not\Rightarrow P = 0$

⚠ Si $P \in \mathbf{R}_n[x]$, alors on n'a pas nécessairement $\deg P = n$, mais plutôt $\deg P \leqslant n$.

3 Fonctions polynomiales

Définition 3.1 *(Application polynomiale)*

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbf{R}_n[x]$. On appelle **application polynomiale** associée à P, l'application :

$$\widetilde{P} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array} \right.$$

Remarque : Par abus de langage, on confond parfois le polynôme et son application polynomiale.

Propriété 3.2

L'application qui à un polynôme associe son application polynômiale est linéaire. Elle induit un isomorphisme de $\mathbf{R}_n[x]$ dans l'ensemble des applications polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

$$\phi \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathcal{P}_n(\mathbf{R}) \\ P & \mapsto & (x \mapsto P(x)) \end{array} \right.$$

Autrement dit, les opérations sur les polynômes et les opérations sur les applications polynomiales fournissent le même résultat.

Explications

C'est cette bijection qui fait le lien entre l'algèbre et l'analyse. Elle justifie que l'on puisse utiliser l'analyse pour démontrer des résultats d'algèbre et réciproquement.
L'injectivité de l'application signifie que l'écriture des fonctions polynômiales est unique sur $\mathcal{P}_n(\mathbf{R})$: le principe d'identification est aussi valable sur $\mathcal{P}_n(\mathbf{R})$. Par contre, il faut faire attention, l'identification des facteurs n'est possible que lorsque l'on travaille avec la fonction (complète) et non pas seulement pour une valeur de x.

Preuve

Surjectivité : trivial du fait de la définition de $\mathcal{P}_n(\mathbf{R})$.
Injectivité :
Soit P un polynôme dont l'application polynomiale est nulle.
Si par l'absurde, P est non nul alors il admet un coefficient dominant non nul a_p. Ainsi en $+\infty$, $P(x) \sim a_p x^p$ qui ne tend pas vers 0.
C'est absurde par nullité de l'application polynomiale.
Donc P est nul. ∎