Primitives

« Le petit Poucet les laissait crier, sachant bien par où il reviendrait à la maison; car en marchant il avait laissé tomber le long du chemin les petits cailloux blancs qu'il avait dans ses poches. »
Charles Perrault dans Le Petit Poucet

Et vous, saurez-vous retrouver le chemin de la maison ?

Car c'est bien de cela dont il s'agit dans ce chapitre : revenir en arrière pour retrouver la fonction *primitive* qui était à l'origine de nos calculs.

Après vous avoir appris à dériver, on vous demande de refaire le même trajet, mais à l'envers !
Il faut partir de la fonction dérivée pour retrouver la fonction initiale.
Mais rassurez-vous, on a semé des petits cailloux blancs pour retrouver notre chemin en fonction du type de dérivation que nous avons fait :

- le changement de variable (quand on a dérivé une fonction composée).
- l'intégration par partie (quand on a dérivé un produit),

Ce chapitre se présente donc comme un petit complément calculatoire sur les fonctions usuelles.
Par contre, toute la théorie de l'intégration et le lien avec les calculs de surface sous une courbe sont repoussés à un chapitre ultérieur.

Notations : Dans ce chapitre, I et J désignent des intervalles de $\mathbf{R}$ qui contiennent au moins deux éléments.
La mention du segment $[a,b]$ dans les définitions et théorèmes sous-entend que $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, avec $a < b$ (le segment contient au moins deux points).

1 Définition et structure

Définition 1.1

Soit $f : I \to \mathbf{R}$,
On dit que F est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Explications
Trouver une primitive, c'est faire l'opération inverse de la dérivation. La dérivée de la primitive donne la fonction « initiale ». C'est ainsi qu'il faudra se rappeler les primitives usuelles.

⚠ On a défini une primitive d'une fonction et non d'un réel. On parle donc d'une primitive de f et non de $f(x)$.

Propriété 1.2

Une primitive sur I est dérivable sur I et en particulier continue.
Si f est de classe $\mathscr{C}^k(I,\mathbf{R})$, alors les primitives de f sont de classe $\mathscr{C}^{k+1}(I,\mathbf{R})$.

Preuve
Immédiat avec la définition. ■

Théorème 1.3

Soit $f : I \to \mathbf{R}$, si f admet une primitive F sur un **intervalle** I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est

$$\big\{F + \text{cste}, \quad \text{cste} \in \mathbf{R}\big\}.$$

Exemple
Donner les primitives de $x \mapsto x^3 - 5x + 2$.
Solution :
Ce sont toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{5}{2}x^2 + 2x + c$ avec $c \in \mathbf{R}$.

Explications
La primitive n'est **pas unique**.
Cela provient de ce que la dérivée fait « perdre de l'information » sur la courbe. Connaître la dérivée en tout point de la courbe ne permet pas de reconstruire la courbe. Il faut aussi avoir un point de départ.
Par exemple, si la dérivée de la fonction est $x \mapsto 2x$, alors on sait que la fonction est du type $x \mapsto x^2$. Par contre, cela peut être $x \mapsto x^2 + 1$ ou $x \mapsto x^2 - 2\pi$. Ces deux fonctions ont les mêmes pentes en tout point, mais elles sont simplement translatées

verticalement l'une par rapport à l'autre.
Ainsi, lorsqu'on cherche une primitive, on a à disposition toutes fonctions dont les courbes sont translatées verticalement l'une par rapport à l'autre : elles ont les mêmes pentes en tout point, mais translatées.
Formellement (peut être sauté en première lecture) :
L'application qui à une fonction f – dérivable – associe sa dérivée n'est pas injective. Chaque élément de l'image peut donc avoir potentiellement plusieurs antécédents : plusieurs primitives.
Par contre, les primitives n'étant translatées que d'une constante, il suffit d'avoir une information supplémentaire pour connaître exactement la primitive.
Ainsi, l'application $f \mapsto (f', f(0))$ est injective pour l'ensemble des fonctions dérivables : si on impose le passage par un point (par exemple $(0, f(0))$), cela fixe la constante c de manière unique et l'application devient injective.

Preuve

Raisonnons par double inclusion : on note $E = \{F + \text{cste}, \quad \text{cste} \in \mathbf{R}\}$ et $\mathcal{P}$ l'ensemble des primitives de f.
$\forall \text{cste} \in \mathbf{R}$, $(F + \text{cste})' = F' = f$, donc $F + \text{cste} \in \mathcal{P}$. Ainsi $E \subset \mathcal{P}$.
Réciproquement si $G \in \mathcal{P}$, alors $G' = f = F'$, donc $(G - F)' = 0$.
Donc $G - F$ est constante sur I. Si on note cste cette constante, alors $G = F + \text{cste} \in E$.
donc $\mathcal{P} \subset E$, et par double inclusion $\mathcal{P} = E$. ■

⚠ C'est faux si I n'est pas un intervalle. Il faut alors plusieurs constantes car la translation verticale peut différer entre deux parties de I qui ne se touchent pas.

Exemple

Donner toutes les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbf{R}^*$.
Solution :
Sur $\mathbf{R}_+^*$, les primitives de f sont de la forme $x \mapsto \ln x + c_+$ avec $c_+ \in \mathbf{R}$.
Sur $\mathbf{R}_-^*$, les primitives de f sont de la forme $x \mapsto \ln(-x) + c_-$ avec $c_- \in \mathbf{R}$.
Donc les primitives de f sur $\mathbf{R}$, sont de la forme

$$\left\{ x \mapsto \begin{cases} \ln|x| + c_+ & \text{si } x > 0 \\ \ln|x| + c_- & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad (c_+, c_-) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

2 La notation intégrale

Notation *(signe intégrale)*

Pour f une fonction continue sur un intervalle I, et pour $a \in I$,
on note $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Remarque : dans la notation $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, la fonction f s'appelle l'**intégrande**.

Preuve

L'existence de la primitive est admise à ce stade.
Unicité : on suppose qu'il existe deux primitives F et G de f qui s'annulent en a.
D'après le théorème 1.3, il existe une constante $k \in \mathbf{R}$ tel que $F = G + k$.
Or $G(a) + k = F(a) = 0$ et $G(a) = 0$, donc $k = 0$ et $F = G$.
D'où l'unicité de la primitive de f qui s'annule en a. ■

Notation *(Crochet)*

Pour $f \in \mathscr{C}^1([a, b])$, on note

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \big[f\big]_a^b = f(b) - f(a).$$

⚠ On fait l'hypothèse que la fonction soit de classe $\mathscr{C}^1$, pour s'assurer de l'existence de la primitive.
On verra au moment du chapitre sur l'intégration qu'on peut alléger un peu cette condition.

Preuve

Pour $x \in [a, b]$, $x \mapsto \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ désigne l'unique primitive de f' qui s'annule en a.
Or f est une primitive de f'. Ainsi, d'après le théorème 1.3, il existe une constante $k \in \mathbf{R}$ telle que

$$\forall x \in [a, b], \quad \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) + k.$$

Or la primitive s'annule en a, donc $f(a) + k = 0$, et $k = -f(a)$.
Pour $x = b$, on a donc bien $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$. C'est ce que l'on note $\big[f\big]_a^b$. ■

Propriété 2.1 *(Linéarité)*

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,\, b]$, soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$\int_a^b f(t) + \lambda g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve

Si on note F la primitive de f qui s'annule en a et G la primitive de g qui s'annule en a, alors $(F + \lambda G)' = F' + \lambda G' = f + \lambda g$.
Donc $F + \lambda G$ est une primitive de $f + \lambda g$,
et elle s'annule évidemment en a. Ceci démontre bien que pour $x \in [a,\, b]$

$$\int_a^x f(t) + \lambda g(t)\,\mathrm{d}t = F(x) + \lambda G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En particulier pour $x = b$. ■

Propriété 2.2

$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

Preuve

Si on note F une primitive de f, alors $\int_a^b f = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f$. ■

Exemple

Si on veut une primitive de $t \mapsto 3t - \cos t$, alors, on commence par chercher une primitive de $t \mapsto t$, et une primitive du cosinus, puis on utilise la linéarité :

$$\int_0^x (3t - \cos t)\,\mathrm{d}t = 3\int_0^x t\,\mathrm{d}t - \int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t = 3\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x - [\sin t]_0^x = \frac{3}{2}x^2 - \sin x.$$

3 Primitives usuelles

Fonction	Primitive	Fonction	Primitive	Fonction	Primitive
$x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$		
$\mathrm{e}^{\lambda x}, \lambda \in \mathbf{R}^*$	$\dfrac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{\lambda}$	$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$		
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$				

On peut justifier toutes ces primitives en les dérivant. Celle du logarithme sera obtenue un peu plus loin par intégration par parties.

Exemple *(À savoir refaire)*

Pour $x > 1$, calculer $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$.

Solution :

On s'inspire de ce qui a été fait avec les sommes et on écrit $t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$.
On peut alors décomposer la fraction en 2

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2}\frac{t+1-(t-1)}{(t+1)(t-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right).$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} &= \frac{1}{2}\left(\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{x-1}{1}\right) - \ln\left(\frac{x+1}{3}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{2}\ln(3).\end{aligned}$$

En particulier, $t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)$ est une primitive de $\dfrac{1}{t^2-1}$.

4 Formes composées

Pour u une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Fonction	Primitive	Fonction	Primitive	Fonction	Primitive
$u'u^\alpha$, pour $\alpha \neq -1$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$u'e^u$	e^u	$u' \sin u$	$-\cos u$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$			$u' \cos u$	$\sin u$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$			$\dots$	$\dots$

Exemple

Trouver une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

Solution :

Si on pose $u : x \mapsto x^2 + 3$, on vérifie d'abord que u est à valeurs strictement positive sur $\mathbf{R}$ et que la fonction dont on cherche une primitive est donc continue sur $\mathbf{R}$: la fonction admet des primitives.
$u'(x) = 2x$ ce qui ressemble furieusement au numérateur. On voit donc que l'on a affaire à une fonction composée $g(u(x))$.

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{\frac{1}{2}u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

Donc une primitive est $x \to \sqrt{u(x)} = \sqrt{x^2+3}$.

Méthode *(Intégration de sinus et cosinus)*

Pour intégrer une fonction qui dépend des puissances de sinus et de cosinus,

- soit, on fait apparaître la dérivée d'une fonction composée,
- soit, on **linéarise** comme nous l'avons vu dans le chapitre sur les complexes et la trigonométrie (calculatoire).

Exemple

Calculer $\int_0^x \cos^2 t \sin^4 t \, dt$.

Solution :

$$\begin{aligned}
\cos^2 t \sin^4 t &= \frac{1}{2^6 i^4}\left(e^{it}+e^{-it}\right)^2\left(e^{it}-e^{-it}\right)^4\\
&= \frac{1}{2^6}\left(\left(e^{it}+e^{-it}\right)\left(e^{it}-e^{-it}\right)\right)^2\left(e^{it}-e^{-it}\right)^2\\
&= \frac{1}{2^6}\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)^2\left(e^{it}-e^{-it}\right)^2 \quad \text{id. remarquable}\\
&= \frac{1}{2^6}\left(\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)\left(e^{it}-e^{-it}\right)\right)^2\\
&= \frac{1}{2^6}\left(e^{3it}-e^{it}-e^{-it}+e^{3it}\right)^2.
\end{aligned}$$

On développe le carré et on obtient :

$$\begin{aligned}
\cos^2 t \sin^4 t &= \frac{1}{2^6}\big(2\cos(6t)-4\cos(4t)-2\cos(2t)+4\big)\\
&= \frac{1}{2^5}\big(\cos(6t)-2\cos(4t)-\cos(2t)+2\big).
\end{aligned}$$

On en déduit avec la linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_0^x \cos^2(t)\sin^4(t)\,dt &= \frac{1}{2^5}\left(\int_0^x \cos(6t)\,dt - 2\int_0^x \cos(4t)\,dt - \int_0^x \cos(2t)\,dt + 2x\right)\\
&= \frac{1}{2^5}\left(\frac{\sin(6x)}{6} - \frac{2\sin(4x)}{4} - \frac{\sin(2x)}{2} + 2x\right).
\end{aligned}$$

Exemple

Calculer $\int_0^x \cos^3 t \sin^4 t \, dt$.

Solution :

$\cos^3(t)\sin^4(t) = \cos(t)\left(1-\sin^2(t)\right)\sin^4(t) = \cos(t)\left(\sin^4(t)-\sin^6(t)\right) = \cos(t)\sin^4(t)-\cos(t)\sin^6(t)$.

$$\int_0^x \cos(t)\sin^4(t)\,dt + \int_0^x \cos(t)\sin^6(t)\,dt = \left[\frac{\sin^5(t)}{5}-\frac{\sin^7(t)}{7}\right]_0^x = \frac{\sin^5(x)}{5}-\frac{\sin^7(x)}{7}.$$

Si on fait les calculs en utilisant la technique de linéarisation (plus lourd), alors on obtient l'expression linéarisée de celle que nous avons trouvé.

5 Changement de variable

Mise en œuvre du changement de variable :

Pour une fois, nous allons appliquer le théorème avant de l'énoncer.
Avec l'exemple précédent, voici comment on écrit le changement de variable.

$$\int_1^2 \frac{t}{\sqrt{t^2+3}}\,dt.$$

On pose $u = t^2+3$, alors $u'(t) = \frac{du}{dt} = 2t$, donc $du = 2t\,dt$.
On remplace dans l'expression et on trouve

$$\int_1^2 \frac{t}{\sqrt{t^2+3}}\,dt = \int_{t=1}^{t=2} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t^2+3}}\,2t\,dt = \int_{u=4}^{u=7}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \left[\sqrt{u}\right]_4^7 = \sqrt{7}-\sqrt{4}.$$

On a changé les bornes d'intégration, en effet, quand t varie de 1 à 2, alors $u = x^2+3$ varie de $1^2+3 = 4$ à $2^2+3 = 7$.
Si on intègre de 1 à x, alors u varie de 4 à x^2+3, et on trouve :

$$\int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^2+3}}\,dt = \sqrt{x^2+3}-\sqrt{4}.$$

Remarque sur les notations : ici pour bien expliciter le changement de bornes, on a écrit des expressions du type $\int_{t=1}^{t=2}\frac{2t\,dt}{2\sqrt{u}} = \int_{u=4}^{u=7}\frac{du}{2\sqrt{u}}$.

Souvent note directement : $\int_1^2 \frac{2t\,dt}{2\sqrt{u}} = \int_4^7 \frac{du}{2\sqrt{u}}$.

Exemple

Calculer $I = \int_0^x \frac{dt}{e^t+e^{-t}}$.

On pourra poser $u = e^t$.

Solution :

Si on pose $u = e^t$, alors $du = e^t\,dt$.

$$I = \int_0^x \frac{dt}{e^t+e^{-t}} = \int_0^x \frac{e^t\,dt}{e^{2t}+1} = \int_{e^0}^{e^x}\frac{du}{u^2+1} = [\arctan u]_1^{e^x} = \arctan\left(e^x\right) - \frac{\pi}{4}.$$

On peut vérifier que si on dérive l'expression obtenue (comme une composée), on retrouve la fonction dont on cherchait l'intégrale.

Il est temps d'énoncer le théorème. Mais soyons honnête, cet énoncé théorique est à savoir, mais la priorité est de maîtriser la méthode sur les exemples.

Théorème 5.1 *(Le changement de variable)*

Soit $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbf{R})$, a,b deux points de I et $u \in \mathscr{C}^1([a,b],I)$.

$$\int_a^b u'(t)(f\circ u)(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.$$

Preuve

Pour la preuve, il suffit de voir que nous avons à faire à une **composition** de fonctions.
Si on note F une primitive de f sur I, alors
$\forall t \in [a, b]$, $u'(t)\,(f \circ u)\,(t) = u'(t)F\,(u(t)) = (F \circ u)'\,(t)$.
Donc $\displaystyle\int_a^x u'(t)(f \circ u)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (F \circ u)'\,(t)\,\mathrm{d}t = (F \circ u)\,(b) - (F \circ u)\,(a)$.
Or, on voit également que
$\displaystyle\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{u(a)}^{u(b)} F'(u)\,\mathrm{d}u = [F(u)]_{u(a)}^{u(b)} = F\,(u(b)) - F\,(u(a))\,.$
Ce qui donne bien l'égalité. ■

Explications

La formulation de ce théorème ne doit pas faire peur : si on regarde bien c'est ce que nous venons de faire : $u = u(t)$, donc $\mathrm{d}u = u'(t)\,\mathrm{d}t$.
Quand on veut intégrer $f\,(u(t))\cdot u'(t)\,\mathrm{d}t$, on remplace $u(t)$ par u et on trouve $f(u)\,\mathrm{d}u$.
Quand t variait entre a et b, alors u varie entre $u(a)$ et $u(b)$.

Il s'agit simplement du changement d'indice que nous avons vu sur les sommes discrètes et que l'on généralise aux sommes « continues » (dans le chapitre d'intégration, nous interpréterons les intégrales comme des limites de sommes).

Remarques sur les hypothèses et notations :

- *Régularité :* u est supposée de classe $\mathscr{C}^1$ car une dérivée de u apparaît dans la première intégrale. On exige donc que $u' \in \mathscr{C}^0$, c'est-à-dire $u \in \mathscr{C}^1$.
  Par contre, f est simplement supposée continue. Aucune dérivée de f n'intervient.
- *Domaines de définition et image :* on compose f à droite par u, on a donc des ensembles qui « s'emboîtent » ainsi : $[a, b] \xrightarrow{u} I \xrightarrow{f} \mathbf{R}$.
  Cela explique également les domaines de définition et d'intégration.
- *Notation u :* dans la première intégrale, u désigne la fonction, alors que dans la deuxième expression « $f(u)\,\mathrm{d}u$ » : u désigne une variable au même titre que x ou t. Ainsi, on utilise la même notation pour deux objets différents (pour faciliter l'usage).

Exemple

Pour $x > 0$, calculer
$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Solution :

On aimerait bien se « débarrasser » de la racine carrée.
On pose donc $u = \sqrt{t}$, d'où $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$.
Si $t \in [1, x]$, alors $u \in [1, \sqrt{x}]$, donc par changement de variable
$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^x 2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} = \int_1^{\sqrt{x}} 2\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \left[-2\,\mathrm{e}^{-u}\right]_1^{\sqrt{x}} = -2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} + 2\,\mathrm{e}^{-1}.$$

A Primitives de fractions rationnelles simples

Méthode

Pour intégrer une fraction rationnelle du type
$$\frac{1}{t^2 + bt + c}$$
sur un intervalle de son domaine de définition.
On cherche les racines de $t^2 + bt + c$.

1. S'il y a 2 racines réelles distinctes α et β.
   On cherche a, b ne dépendant pas de t tels que $\dfrac{1}{t^2 + bt + c} = \dfrac{a}{t - \alpha} + \dfrac{b}{t - \beta}$ et on intègre avec les logarithmes.
2. S'il y a 1 racine double α.
   On reconnaît une primitive usuelle.
3. S'il n'y a pas de racines réelles.
   On met le dénominateur sous forme canonique et avec un changement de variable on obtient une forme en $\dfrac{1}{u^2 + 1}$, qui se primitive avec arctan .

Exemple

Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 2t + 1}$ en précisant son domaine de définition.

Solution :

On remarque que $t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2$ et que cette expression s'annule en $t = -1$.
On cherche la primitive qui s'annule en 0, donc x doit être « du même côté » de -1 que 0.
Ainsi l'intégrale est définie pour tout $x > -1$.
$$\begin{aligned}\forall x > -1,\quad \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 2t + 1} &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t + 1)^2}\\ &= \left[-\frac{1}{t + 1}\right]_0^x\\ &= -\frac{1}{x + 1} + 1.\end{aligned}$$

Exemple

Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 2t - 3}$ en précisant son domaine de définition.

Solution :

On remarque que $t^2 + 2t - 3 = (t - 1)\,(t + 3)$ et que cette expression s'annule en $t = 1$ et en $t = -3$.
On cherche la primitive qui s'annule en 0, donc x doit être sur l'intervalle du domaine de continuité qui contient 0.
Ainsi l'intégrale est définie pour tout $x \in]-3, 1[$.
On remarque que $\dfrac{1}{(t - 1)(t + 3)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{t + 3 - (t - 1)}{(t - 1)(t + 3)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t - 1} - \dfrac{1}{t + 3}\right)$.

$$\text{Ainsi, } \forall x \in]-3,\, 1[,\ \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t-3} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)(t+3)} = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\ln|t-1| - \ln|t+3|\right]_0^x = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + \ln(3)\right).$$

Exemple

Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+3}$ en précisant son domaine de définition.

Solution :

Le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$, donc l'intégrande est continue sur $\mathbf{R}$.
Donc l'intégrale est définie pour tout $x \in \mathbf{R}$.

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+3} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2+2} = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}.$$

On pose $u = \frac{t+1}{\sqrt{2}}$, et donc $\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}t$, d'où $\mathrm{d}t = \sqrt{2}\,\mathrm{d}u$.
En appliquant ce changement de variable $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, on trouve

$$\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{x+1}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arctan(u)\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{x+1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right).$$

Exemple

Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{2t+1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t$ en précisant son domaine de définition.

Solution :

Le dénominateur de l'intégrande ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$, donc la fonction à intégrer est continue sur $\mathbf{R}$.
Ainsi, l'intégrale est définie pour tout $x \in \mathbf{R}$.
On voit que le numérateur est presque la dérivée du dénominateur, on n'est donc pas loin d'une formule $\frac{u'}{u}$.

$$\int_0^x \frac{2t+1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{2t+4}{t^2+4} - \frac{3}{t^2+4}\,\mathrm{d}t = \left[\ln\left(t^2+4\right)\right]_0^x - \frac{3}{4}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}.$$

On pose $u = \frac{t}{2}$, donc $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{2}$ c'est-à-dire $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u$.
Par changement de variable, on trouve

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1} = 2\int_0^{x/2} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = 2\left[\arctan(u)\right]_0^{x/2} = 2\arctan\left(\frac{x}{2}\right).$$

La solution est donc

$$\int_0^x \frac{2t+1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{x^2+4}{4}\right) - \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right).$$

6 L'intégration par parties

Théorème 6.1 *(Intégration par parties)*

Si u et v sont deux applications $\mathscr{C}^1([a,b],\mathbf{R})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(x)v(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve

La preuve est triviale et c'est elle qui permet de bien comprendre cette formule. Elle provient de la dérivation d'un **produit**.
$(uv)' = u'v + uv'$, donc uv est une primitive de $u'v+uv'$ qui est continue sur $[a,b]$ (car $u, v \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbf{K})$)
Donc $\int_a^b u'v + uv' = [uv]_a^b$, et avec la linéarité on obtient la formule voulue. ∎

Exemple

Calculer $\int_0^x t\sin t\,\mathrm{d}t$.

Solution :

On pose pour $t \in [0,\, x]$

$$u(t) = t \qquad v(t) = -\cos(t)$$
$$u'(t) = 1 \qquad v'(t) = \sin(t)$$

$$(u,\, v) \in \mathscr{C}^1\left([0,\, x],\, \mathbf{R}\right).$$

Je conseille de présenter les calculs ainsi pour ne pas se tromper.
On choisit une diagonale avec les éléments de l'intégrande. Ici, par exemple $u(t)$ et $v'(t)$ et on calcule ensuite les deux autres termes par dérivation et primitive.
Ici, c'est évidemment t que l'on dérive, ce qui permet de le faire « disparaître. »
Pour écrire la formule, on met le produit de la première ligne entre les crochets et on soustrait avec l'intégrale de la deuxième diagonale.

$$\int_0^x t\sin(t)\ \mathrm{d}t = \left[-t\cos(t)\right]_0^x - \int_0^x 1\times(-\cos(t))\ \mathrm{d}t = -x\cos(x) + \int_0^x \cos(t)\ \mathrm{d}t = -x\cos(x) + \left[\sin(t)\right]_0^x = -x\cos(x) + \sin(x).$$

Exemple *(À savoir refaire)*

Trouver une primitive de $\ln$.

Solution :

Ici, l'intégration n'apparaît pas immédiatement. C'est une astuce qu'il faut connaître : $\ln t = 1 \cdot \ln t$ et on peut intégrer 1 et dériver ln.
On cherche par exemple, une primitive qui s'annule en 1.
⚠ on ne peut pas intégrer sur $[0, x]$ car la fonction n'est pas continue en 0.
On pose, pour $t > 0$,

$$u(t) = t \qquad v(t) = \ln(t)$$
$$u'(t) = 1 \qquad v'(t) = \frac{1}{t}$$

$$(u,\, v) \in \mathscr{C}^1\left(\mathbf{R}_+^*\right).$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln(t)\, \mathrm{d}t &= [t \ln(t)]_1^x - \int_1^x \frac{t}{t}\, \mathrm{d}t \\ &= x \ln(x) - (x - 1) \\ &= x \ln(x) - x + 1.\end{aligned}$$

Les primitives étant « à une constante près », on trouve donc que $x \mapsto \ln(x)$ a pour primitive $x \mapsto x \ln(x) - x$.