

PROBABILITÉS FINIES DISCRÈTES

« Pesons le gain et la perte, en prenant croix que Dieu est.
Estimons ces deux cas : si vous gagnez, vous gagnez tout ;
si vous perdez, vous ne perdez rien.
Gagez donc qu'Il est, sans hésiter. »
Pascal dans *Les Pensées*

Cette année, les probabilités se restreignent au cas des univers finis. Il ne sera donc pas question de probabilités continues, de loi normale, exponentielle...

Ce chapitre est l'occasion de mettre à profit les compétences acquises dans le chapitre de dénombrement : il trouve ici un champ d'application sur mesure.

Après une longue introduction pour mettre en perspective l'usage des probabilités, ce chapitre commencera par une rapide approche intuitive avant de formaliser rigoureusement l'ensemble des concepts des probabilités finies discrètes.

Les variables aléatoires et les lois usuelles (Bernoulli, binomiale...) sont vues à part dans le chapitre correspondant.

1 EN GUISE D'INTRODUCTION

Histoire des mathématiques : Les premières traces de raisonnements probabilistes ont été trouvées en Inde vers le IV^{ème} siècle avant Jésus-Christ. La culture védique étudie les combinaisons possibles des syllabes qui permettent de composer des poèmes, les combinaisons des cinq sens...

Les probabilités modernes sont nées avec Pascal et Fermat au XVII^e siècle. À l'origine, elles se concentrèrent essentiellement sur la théorie des jeux et des paris. Cette nouvelle science du pari fut une révolution dans notre capacité à penser l'avenir. Pascal transposa ses découvertes scientifiques dans le domaine de la métaphysique avec le fameux *pari de Pascal* (voir la citation page précédente).

Au début du XVIII^e, Bernoulli introduisit l'idée de *la loi des grands nombres* qui stipule que les résultats d'une expérience se rapprochent de la probabilité lorsque cette première est effectuée un très grand nombre de fois.

Au XX^e siècle, Kolmogorov donne un langage formel aux probabilités et construit les bases de la théorie moderne des probabilités. L'intuition cède la place au formalisme mathématique. Ceci permet notamment l'étude des modèles infinis et continus en plus des modèles discrets. La nouvelle théorie tire partie de la récente définition de l'intégration par Lebesgue (un raffinement subtil de la théorie de l'intégration vue dans cet ouvrage).

Finalement, les probabilités sont restées fidèles à elles-mêmes car un de leur champ d'application important est actuellement dans les marchés financiers qui sont pour beaucoup un jeu d'argent où l'on parie sur la fluctuation des cours.

De l'expérience physique aux mathématiques : On peut voir les probabilités comme une façon de prévoir l'avenir, ou tout au moins de faire des paris sur celui-ci. Les probabilités seraient donc la science des paris sur l'avenir, et c'est comme telles qu'elles sont utilisées.

Leur objet se rapproche de celui de la physique ou de la chimie dont l'objet est de prévoir l'évolution d'un système dans une situation donnée (prévoir la trajectoire d'une fusée en fonction de sa conception, la réaction d'un mélange si on lui ajoute un produit...).

Tout ceci s'appuie sur une connaissance *a priori* de lois qui régissent le système¹ et sur leur transcription mathématique. C'est la partie *modélisation* en laquelle interviennent des choix et hypothèses qui peuvent être remis en cause par la suite. Cette modélisation provient de l'observation attentive de la nature (par exemple, si je lâche une pomme, alors elle tombe vers le bas), mais pourra toujours être affinée voire contestée plus tard.

On distingue deux types de modèles :

- le modèle **déterministe** selon lequel une connaissance suffisamment précise des conditions de l'expérience permet de prévoir, *à coup sûr*, le résultat de celle-ci.
- le modèle **probabiliste** pour lequel il est impossible de savoir avec certitude l'issue de l'expérience. On étudie les différents résultats possibles et on estime leur probabilité d'occurrence : s'ils ont plus ou moins de chances de se produire.

1. Ce qui suppose un phénomène observable et que l'on peut reproduire, au moins par la pensée.

La frontière entre ces deux modèles est assez floue. On peut considérer que le modèle déterministe est un modèle probabiliste simplifié en lequel une issue possède une très forte probabilité de réalisation. On néglige alors les autres issues possibles et on fait l'approximation que cette issue *très probable* est *certaine*. A contrario, on peut aussi considérer que le modèle probabiliste décrit un système déterministe mais dont la méconnaissance des conditions précises de réalisation ne nous permet pas de prédire avec certitude son issue.

On voit dès lors que l'étape la plus difficile et la plus risquée est la *modélisation* en laquelle se concentrent tous les choix. Je laisserai donc les professeurs de Physique-Chimie, SVT... s'occuper de cette science difficile et nous nous concentrerons sur l'étape suivante : on suppose que le modèle est établi. Les issues possibles sont donc déjà toutes répertoriées et leur probabilités élémentaires sont estimées. À partir de ce modèle *élémentaire*, nous construirons des modèles plus complexes dont nous estimerons à nouveau les probabilités.

2 VOCABULAIRE

A Approche intuitive

Vocabulaire	Exemple du lancer de dé
Expérience aléatoire : une expérience dont on ne peut prévoir l'issue.	le lancer de dé
Issue (ou événement élémentaire) : résultat possible d'une expérience aléatoire.	1, 2, ... 6, sont les issues
Univers : ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire.	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Événement : un ensemble d'issues parmi toutes celles possibles.	$A = \{4, 5, 6\}$ (c'est une partie de Ω).
Un événement A est réalisé , si le résultat de l'expérience aléatoire est dans A .	A est réalisé si on obtient 4, 5 ou 6.
Les issues qui composent A , sont appelées issues favorables à A (ou qui réalisent A).	4, 5 et 6
\bar{A} est l' événement contraire de A .	$\bar{A} = \{1; 2; 3\}$

2. Depuis la réforme de l'orthographe de 1990, les deux graphies *événement* et *èvenement* sont acceptées bien que l'Académie Française recommande la seconde en accord avec la prononciation. Il semble que les deux graphies aient toujours eu cours à proportions variables selon les époques, et les dictionnaires de l'Académie Française passent de l'une à l'autre selon les versions. Ici, nous utiliserons la graphie « classique » qui était majoritaire du temps de Pascal.

B Approche mathématique

Définition 2.1

On appelle **univers** un ensemble (fini non vide).
On note souvent l'univers Ω .

Les **événements** sont les parties de Ω .

Les **événements élémentaires** sont les événements **singleton**.
On parle aussi d'**issues possibles** et on les note souvent ω .

Remarque : Dans le cadre de ce cours, nous nous limitons aux univers finis. La formalisation est plus complexes pour les univers infinis.

Propriété 2.2 (Dénombrement)

Si $\text{Card}(\Omega) = n$, alors il y a n événements élémentaires possibles et 2^n événements possibles.

Exemple (Exemple suivi...)

Si l'expérience consiste à lancer successivement deux dés, alors l'univers est l'ensemble des couples de $\llbracket 1; 6 \rrbracket^2$.
Il y a donc $\text{Card}(\llbracket 1; 6 \rrbracket^2) = 36$ issues possibles.
Les événements correspondent aux parties de $\llbracket 1; 6 \rrbracket^2$. Il y en a $\text{Card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{36}$.
On peut par exemple définir les événements

A : « les deux dés donnent chacun un résultat pair »

B : « les deux dés donnent le même résultat »

ainsi, $A = \{(a, b) \in \llbracket 1; 6 \rrbracket^2, \text{ tel que } a \text{ et } b \text{ pairs}\}$ et $\text{Card}(A) = 3 \times 3 = 9$.
et $B = \{(a, a), \text{ tel que } a \in \llbracket 1; 6 \rrbracket\}$, ce qui donne $\text{Card} B = 6$.

Définition 2.3 (Logique et ensembles)

- L'événement « A ou B » correspond à l'événement « $A \cup B$ ».
- L'événement « A et B » correspond à l'événement « $A \cap B$ ».
- L'événement contraire de « A » correspond à l'événement « \bar{A} ».

Exemple (suite de l'exemple suivi)

- « A ou B » est l'événement : « les dés sont tous les deux pairs, ou ils sont égaux ». On ajoute les combinaisons $(1, 1); (3, 3)$ et $(5, 5)$ à celles de A .
- « A et B » est l'événement : « les deux dés sont à la fois égaux et pairs ». $A \cap B = \{(2, 2), (4, 4), (6, 6)\}$.
- Le contraire de A est « au moins un des deux dés donne un résultat impair ».

Définition 2.4

Lorsque $A \cap B = \emptyset$, les deux événements A et B sont dits **incompatibles**.

En particulier, deux événements incompatibles ne peuvent pas être réalisés en même temps.

Exemple

A et \bar{A} sont toujours incompatibles.

Exemple (suite de l'exemple suivi)

Si on définit l'événement C par « le premier dé donne un résultat pair et le second donne un résultat impair », alors C est incompatible avec B (car les deux dés ne peuvent pas être de parité contraire tout en donnant le même résultat).

Définition 2.5 (Système complet d'événements)

Soit Ω un univers et $\{A_i\}_{i \in I}$ un système d'événements.
Le système d'événements est dit **complet** s'il vérifie les deux conditions :

1. $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$,
2. $\forall (i, j) \in I^2$, si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Remarque : Si on rajoute la condition, $\forall i \in I$, $A_i \neq \emptyset$, alors ce système forme une **partition** de Ω .

Explications

Un système complet d'événements correspond à une disjonction des cas : on liste l'ensemble des situations (disjointes) possibles.

Exemple

A et \bar{A} forment un système complet d'événements.

Exemple

Avec le double lancer de dés, on peut définir un système complet :

- « Les deux dés donnent chacun un résultat pair »,
- « Les deux dés donnent chacun un résultat impair »,
- « Les deux dés donnent des résultats de parité différente ».

3 PROBABILITÉS

Jusqu'ici on n'a fait que décrire les issues possibles. Maintenant, on leur affecte des probabilités qui correspondent aux chances de succès de chaque issue.

Définition 3.1 (Probabilité sur un univers)

Soit un univers fini Ω ,
une probabilité \mathbf{P} sur Ω , est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ telle que

1. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1$,
2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,
3. Si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

Explications

Dans le cas fini, ces règles sont suffisantes pour définir proprement ce qu'est une probabilité.

Les trois axiomes formalisent des notions très intuitives :

1. La probabilité est dans $[0, 1]$: entre 0% et 100% de chances d'être réalisé.
2. La probabilité d'avoir une issue qui fait partie de l'univers est 1 : il n'est pas possible d'avoir une autre issue que celles de l'univers.
3. Si on a « p chances de réaliser A » et « q chances de réaliser B » et que A et B ne contiennent aucune issue commune ($A \cap B = \emptyset$), alors on a $p + q$ chances de réaliser l'un des deux.

C'est la traduction probabiliste du cardinal de deux ensembles disjoints.

Définition 3.2

- Si $\mathbf{P}(A) = 0$, alors l'événement A est **impossible**.
- Si $\mathbf{P}(A) = 1$, alors l'événement A est **certain**.

Avec un univers infini, lorsque $\mathbf{P}(A) = 0$, on dit que l'événement est négligeable, pour $\mathbf{P}(A) = 1$, qu'il est presque certain.

Définition 3.3 (Espace probabilisé fini)

Un espace probabilisé fini est un couple (Ω, \mathbf{P}) , avec Ω un univers fini, et \mathbf{P} une probabilité sur Ω .

Exemple

Cas d'une épreuve de Bernoulli : tirage à pile ou face.

On code l'événement pile avec 1 et l'événement face avec 0.

Si la pièce est équilibré, on a la même probabilité d'avoir pile ou face : $\frac{1}{2}$.

Ainsi, on définit l'espace probabilité (Ω, \mathbf{P}) , avec :

$$\Omega = \{0, 1\}$$

$$\mathbf{P} : \begin{cases} \emptyset & \mapsto 0 \\ \{0\} & \mapsto \frac{1}{2} \\ \{1\} & \mapsto \frac{1}{2} \\ \{0, 1\} & \mapsto 1 \end{cases}$$

Exemple

Soit une urne contenant n boules dont p sont blanches et $n - p$ sont noires.

On tire une boule au hasard.

Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ? noire ?

Solution :

Les règles qui suivent sont capitales mais il n'y a aucun effort de mémoire à faire : il suffit de les comprendre pour être capable de les retrouver dès que nécessaire.

Corollaire 3.4 (Règles sur les probabilités)

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
2. $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$: l'événement « vide » est impossible.
3. $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$
4. Si $A \subset B$, alors $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$ (croissance)
5. Si $A \cap B = \emptyset$ alors $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$
6. $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$
7. $\mathbf{P}(A \cup B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$
8. Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont incompatibles deux à deux, alors $\mathbf{P}\left(\bigcup_{0 \leq i \leq n} A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)$
9. $\mathbf{P}\left(\bigcup_{0 \leq i \leq n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)$

Explications

$\mathbf{P}(\Omega) = 1$: toutes les issues possibles de l'expérience sont dans l'univers.

$\mathbf{P}(\emptyset) = 0$: l'expérience donne nécessairement un résultat.

Preuve

1. cela fait partie de la définition
2. $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$, donc $\mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbf{P}(\Omega) + \mathbf{P}(\emptyset)$. Donc $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$
3. $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = \Omega$, donc $1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(A \cup \bar{A}) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A})$.
Donc $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$
4. Si $A \subset B$, alors $B = A \cup (B \setminus A)$ et les deux ensembles sont disjoints.
Donc $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B \setminus A) \geq \mathbf{P}(A)$ par positivité de la probabilité.
5. fait partie de la définition
6. (correspond à Grassmann pour les ensembles finis, c'est la même preuve et on peut la visualiser sur un schéma)

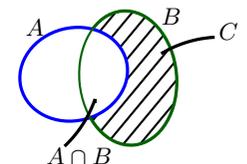
Soit $C = B \setminus A$, alors $A \cap C = \emptyset$, et $A \cup C = A \cup B$.

Donc $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(C)$. (★)

Or $C \cup (A \cap B) = B$ et $C \cap (A \cap B) = \emptyset$.

Donc $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C \cup (A \cap B)) = \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(A \cap B)$

Donc avec (★) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$



7. Découle du 6 et de la positivité de la probabilité.

8. On montre la propriété avec une récurrence sur n .

Le résultat est vrai pour $n = 2$ (déjà vu),

Pour $n \geq 3$ fixé, on suppose la propriété vraie au rang $n - 1$ et on considère n événements incompatibles $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$.

On vérifie d'abord que A_n est incompatible avec $\bigcup_{1 \leq i \leq n-1} A_i$.

C'est évident car $A_n \cap \left(\bigcup_{1 \leq i \leq n-1} A_i\right) = \bigcup_{1 \leq i \leq n-1} (A_n \cap A_i) = \bigcup_{1 \leq i \leq n-1} \emptyset = \emptyset$

Donc on peut appliquer le cas $n = 2$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n-1} A_i \right) \cup A_n \right) &= \mathbf{P} \left(\bigcup_{1 \leq i \leq n-1} A_i \right) + \mathbf{P}(A_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \end{aligned}$$

9. On considère pour chaque i , $B_i = A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)$ de telle sorte que les $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ soient deux à deux incompatibles et que leur union soit la même que celle des $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$.

On applique ensuite le point précédent aux $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$, et on utilise la croissance de la probabilité : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbf{P}(B_i) \leq \mathbf{P}(A_i)$. ■

Théorème 3.5 (Description par les événements élémentaires)

Une probabilité \mathbf{P} sur un univers fini $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ est entièrement déterminée par les valeurs des $(p_i = \mathbf{P}(\omega_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

Dans ce cas, \mathbf{P} est une probabilité si et seulement si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des issues qui le composent :

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

Concrètement avec un univers fini : on associe une probabilité $p_i \in [0, 1]$ à chaque issue et la somme des probabilités « élémentaires » est égale à 1.

Preuve

Trivial ■

Définition 3.6 (Modèle équiprobable)

Si tous les p_i sont égaux³, la situation est dite **équiprobable**.

Explications

C'est le modèle de base pour la plupart des expériences. Tirage aux dés, tirage de cartes, pile ou face...

Théorème 3.7 (Probabilité d'un événement dans un modèle équiprobable)

Si Ω est un univers fini composé de n issues possibles, et si \mathbf{P} définit un modèle équiprobable sur Ω ,

alors la probabilité d'une issue est $p_i = \frac{1}{n}$.

Si A est un événement, alors $\mathbf{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Explications

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas au total}}$$

La détermination d'une probabilité ramène souvent à un problème de dénombrement.

Exemple

Lors du lancer successif de deux dés, la probabilité d'avoir une paire est $\frac{1}{6}$

En effet, le nombre total de possibilités est $\text{Card}(\llbracket 1; 6 \rrbracket^2) = 36$ et le nombre de façon d'avoir une paire est 6 (pour la paire de 1, la paire de 2, ... , la paire de 6).

La probabilité totale est donc bien $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Exemple (Fondamental)

Une urne contient n boules : p blanches et $n - p$ noires. On effectue deux tirages. Donner la probabilité d'obtenir deux boules blanches selon le type de tirage.

Solution :

Méthodes usuelles pour déterminer une probabilité :

Il existe plusieurs méthodes pour construire des probabilités sur un univers :

- Toutes les issues ont la même probabilité d'occurrence : **modèle équiprobable**.
- La répétition de l'expérience aléatoire donne la fréquence d'occurrence de chaque issue et permet d'établir le modèle.
- La probabilité est calculée à partir d'autres modèles mécaniques, mathématiques...

3. Toutes les issues ont la même chance de se produire.

4 PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

L'explication des probabilités conditionnelles est très simple : en fonction des informations dont on dispose, les probabilités ne sont pas identiques.

Dans les marchés financiers par exemple, si on est bien informé, la probabilité de gains est a priori supérieure : c'est le problème des délits d'initiés.

A Probabilité conditionnelle de B sachant A

Définition 4.1 (Probabilité conditionnelle de B sachant A)

A et B sont deux événements, tels que $\mathbf{P}(A) \neq 0$.

Sachant que A est réalisé, la probabilité que B le soit aussi est :

$$\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}$$

On lit : « la probabilité de B sachant A ».

Les deux notations $\mathbf{P}(B|A)$ ou $\mathbf{P}_A(B)$ sont équivalentes.

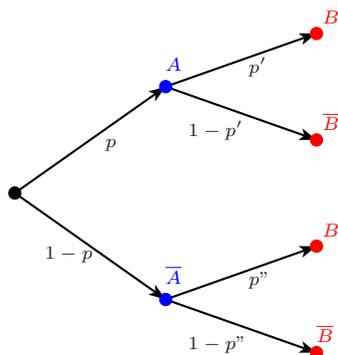
Explications

On sait que A est réalisé et on restreint donc l'univers à A .

Dans le cas équiprobable, cela revient au calcul :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_A(B) &= \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)} = \frac{\text{Card}(A \cap B) \text{Card}(\Omega)}{\text{Card}(A) \text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} \frac{\text{Card}(\Omega)}{\text{Card}(A)} \\ &= \mathbf{P}(A \cap B) \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \end{aligned}$$

On peut essayer de comprendre cela avec des arbres de probabilité comme en terminale. Ceci ne constitue pas une *justification*, car les calcul de l'arbre utilise cette définition et celles qui suivent, mais cela a au moins le mérite de donner une visualisation à cette formule.



Les probabilités conditionnelles se lisent le long des branches.

On peut par exemple, suivre la branche supérieure et on obtient :

$\mathbf{P}(A \cap B) = pp' = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B)$ avec $\mathbf{P}(A) = p$ et $\mathbf{P}_A(B) = p'$.

Théorème 4.2 (Formule des probabilités composées)

Pour deux événements A et B , avec $\mathbf{P}(A) \neq 0$,

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B)$$

Pour n événements A_1, A_2, \dots, A_n ,

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

(on suppose que $\mathbf{P}(A_1), \mathbf{P}(A_1 \cap A_2), \dots, \mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$ sont tous non nuls)

Preuve

La formule pour deux événements s'obtient directement avec la définition.

La formule générale, s'obtient par récurrence.

L'initialisation est immédiate pour $n = 1$.

Soit $n \geq 1$. On suppose que le résultat est vrai au rang n et on considère $(n + 1)$ événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ qui vérifient les hypothèses du théorème.

On applique l'hypothèse de récurrence aux n événements A_1, A_2, \dots, A_{n-1} et $A_n \cap A_{n+1}$.

Ainsi $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1})$

$$= \mathbf{P}(A_1) \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n \cap A_{n+1}).$$

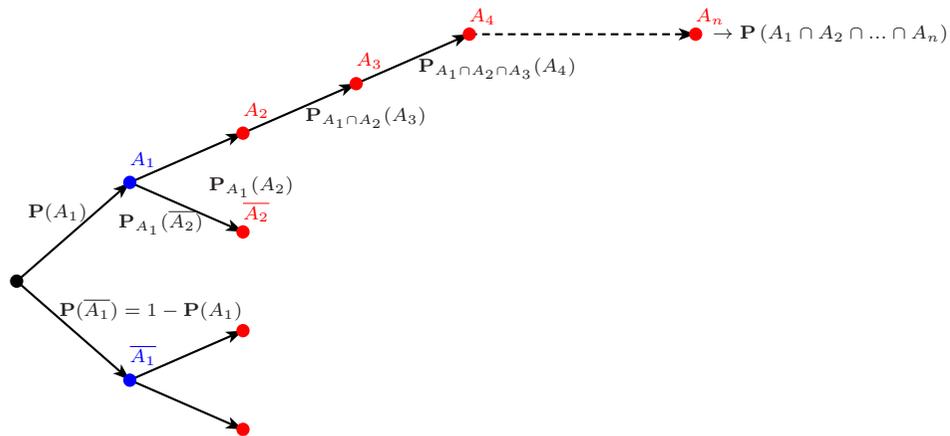
Pour simplifier on note $B = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}$, et on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_B(A_n \cap A_{n+1}) &= \frac{\mathbf{P}(B \cap A_n \cap A_{n+1})}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B \cap A_n \cap A_{n+1})}{\mathbf{P}(B)} \frac{\mathbf{P}(B \cap A_n)}{\mathbf{P}(B \cap A_n)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(B \cap A_n \cap A_{n+1})}{\mathbf{P}(B \cap A_n)} \frac{\mathbf{P}(B \cap A_n)}{\mathbf{P}(B)} \\ &= \mathbf{P}_{B \cap A_n}(A_{n+1}) \mathbf{P}_B(A_n) \end{aligned}$$

D'où le résultat voulu. ■

Explications

En reprenant un arbre de probabilité, on suit une branche qui réalise les événements A_i .



Remarque : Avec cette formule, on a exigé que $\mathbf{P}(A) \neq 0$ pour que la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{A(B)}$ ait un sens.

Néanmoins, en cas de nullité de $\mathbf{P}(A)$, on peut encore donner un sens à cette écriture. En effet, si $\mathbf{P}(A) = 0$, alors par croissance des probabilités $\mathbf{P}(A \cap B) = 0$. De plus, toute probabilité étant bornée, le membre de droite s'écrit $0 \times$ "quantité bornée" = 0. On peut donc en conclure que $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}_{A(B)} = 0$, et ce, même si la deuxième quantité est prise arbitrairement dans $[0, 1]$.

Ainsi, l'égalité reste vérifiée dans le cas $\mathbf{P}(A) = 0$.

Il en est de même pour la formule des probabilités composées.

Exemple

Soit une urne contenant n boules blanches et n boules noires.

On tire n boules, quelle est la probabilité de n'avoir que des blanches ?

Indication : distinguer les situations selon les types de tirage.

Solution :

B Indépendance

Définition 4.3

Deux événements A et B sont **indépendants** si, et seulement si, $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B)$.

La propriété suivante, sert à donner une interprétation plus concrète de l'indépendance, mais elle n'est valable que lorsque $\mathbf{P}(A) \neq 0$.

Propriété 4.4

Si $\mathbf{P}(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$.

Explications

Cela signifie que le fait que l'on sache que A est réalisé (ou non) n'influence pas notre connaissance sur l'éventuelle réalisation de B .

Comme nous allons le voir dans l'exemple suivant, la notion d'indépendance ne traduit pas nécessairement un lien de cause à conséquence ou une influence directe entre deux événements, mais il s'agit davantage d'une question ayant trait à l'*information reçue*. Si A influence B , le fait d'avoir une information sur A , nous en donnera également sur B , et les événements ne seront pas indépendants. Par contre, A peut très bien n'avoir aucune influence sur B , et pourtant ne pas être indépendant de B .

Pour tenter d'être plus clair, les deux événements peuvent se réaliser sans influence mutuelle, et pourtant, si je sais que l'un est réalisé, cela peut me donner des informations sur un *contexte général*, qui favoriserait ou défavoriserait la réalisation de B .

Cela invite à comprendre que la notion de probabilité ne désigne donc pas tant les chances qu'un événement se réalise, que ma capacité à prévoir son éventuelle réalisation (indépendamment de ses chances intrinsèques d'arriver).

On restera néanmoins très prudent face à son intuition : les cas d'indépendance peuvent se révéler hautement contre-intuitifs. C'est d'abord l'affaire d'un calcul.

Propriété 4.5

A et B sont indépendants, si, et seulement si A et \overline{B} sont indépendants, si, et seulement si \overline{A} et \overline{B} sont indépendants.

Preuve

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap \overline{B}), \text{ donc } \mathbf{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

$$\text{Ainsi, pour } A \text{ et } B \text{ indépendants, } \mathbf{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B)$$

$$= \mathbf{P}(A) (1 - \mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(\overline{B}).$$

Donc A et \overline{B} indépendants.

La réciproque s'obtient en appliquant le même résultat à A et \overline{B} , car $B : \overline{\overline{B}}$.

La seconde équivalence en découle en appliquant le complémentaire successivement à A et à B . ■

Exemple

Supposons que nous disposions d'une urne avec n boules de couleur blanche ou noire.

Je tire n boules successivement sans vous les montrer et vous devez deviner la couleur de la dernière tirée. Le but est de savoir si l'annonce des couleurs des $(n - 1)$ premières boules vous aide à deviner la couleur de la dernière.

Au moment où vous cherchez à deviner, le tirage a déjà été réalisé. Il ne s'agit donc pas d'évaluer la probabilité que la dernière boule soit d'une couleur ou d'une autre : moi qui la vois, je sais avec certitude. Par contre, il est question d'évaluer vos chances sur chaque hypothèse afin de choisir la plus probable en fonction de l'information dont vous disposez.

On note A l'événement correspondant aux couleurs obtenues aux $n - 1$ premiers tirages (connus) et B_n l'événement selon lequel le dernier tirage donne une boule blanche. On cherche donc à comparer les probabilités $\mathbf{P}(B_n)$ et $\mathbf{P}_A(B_n)$ pour voir si ces événements sont indépendants⁴.

Cela va dépendre de quelques hypothèses qui auront grande influence :

1. Si on suppose que l'urne contient p boules blanches et $n - p$ boules noires. Si vous n'avez aucune information sur les $n - 1$ premières boules tirées, alors, la probabilité que la dernière boule soit blanche est : $\mathbf{P}(B_n) = \frac{p}{n}$. Voyons si cela est changé lorsque l'on vous donne l'information des $n - 1$ premières boules tirées :

- (a) Si le tirage est sans remise, cela veut dire que vous pouvez savoir avec certitude la couleur de la n -ième boule tirée en fonction des $(n - 1)$ précédentes.

En effet, il ne reste plus qu'une seule boule à tirer et on connaît la composition initiale de l'urne ainsi que les couleurs des $(n - 1)$ autres boules tirées.

En fonction des couleurs annoncées précédemment, la probabilité sera donc

- soit $\mathbf{P}_A(B_n) = 1$ si on n'a tiré que $(p - 1)$ boules blanches parmi les $(n - 1)$ premières,
- soit $\mathbf{P}_A(B_n) = 0$ si on a déjà annoncé avoir tiré toutes les boules blanches parmi les $(n - 1)$ premières.

Pour ce type de tirage **les événements ne sont pas indépendants** puisque la connaissance des $(n - 1)$ premiers tirages me donne une information sur le dernier : la probabilité n'est plus la même.

- (b) Si le tirage est réalisé avec remise.

Dans ce cas, à chaque tirage, la probabilité d'avoir une boule blanche est $\frac{p}{n}$. La connaissance des $n - 1$ premiers tirages ne me donne absolument aucune information supplémentaire sur ce qu'a été ou sera le dernier tirage. **Les événements sont donc indépendants.**

4. Ici, puisque l'on sait que A est réalisé, il est nécessairement de probabilité non nulle.

2. Supposons à présent que l'on sache uniquement que l'urne contient n boules, mais que l'on ne sache pas la proportion de blanches et de noires. Dans ce cas, si vous ne disposez d'aucune information préalable, il est naturel de dire qu'il y a autant de chance que la $n^{\text{ième}}$ boule tirée soit blanche, plutôt que noire : $\mathbf{P}(B_n) = \frac{1}{2}$.

Qu'en est-il si on sait la couleur des $n - 1$ premières boules tirées ?

- (a) Si le tirage est sans remise, alors, à chaque tirage, on a une chance sur 2 que la boule soit blanche. Et quelque soient les tirages précédents, nous n'avons aucune information supplémentaire sur ce que pourrait être le tirage suivant. **Les événements sont indépendants.**
- (b) Si le tirage est avec remise, alors, chaque tirage nous renseigne davantage sur le contenu de l'urne. Ainsi, lorsque je connais les $n - 1$ premiers tirages, j'ai une meilleure connaissance de l'urne et je peux donc calculer plus précisément la probabilité que la dernière boule soit blanche. Par exemple, si je n'ai tiré que des boules blanches au cours des $n - 1$ premiers tirages, la probabilité que l'urne contienne une majorité de boules blanches (voire que des boules blanches) est forte et la probabilité d'avoir une boule blanche au dernier tirage est donc très supérieure à $\frac{1}{2}$. **Les événements ne sont pas indépendants.**

On comprend bien ici que les $n - 1$ premiers tirages n'influencent absolument pas le dernier tirage. En effet, l'urne est ce qu'elle est (même si nous n'en avons pas connaissance) et les tirages étant avec remise, ils ne s'influencent absolument pas l'un l'autre. Par contre, de mon point de vue, chaque tirage me donne des informations supplémentaires sur le système et affine ma connaissance. Les probabilités sont modifiées et ma capacité à deviner est accrue.

La notion d'indépendance n'est pas une relation d'influence, mais de connaissance.
L'indépendance entre événements dépend du choix de la loi de probabilité.

Des événements indépendants pour une loi de probabilité, peuvent ne pas l'être pour une autre, même si l'expérience aléatoire est la même. Comme nous l'avons vu avec le tirage avec remise par exemple.

Pour la probabilité où je connais le contenu de l'urne : les événements sont indépendants, alors que pour la probabilité où ne je connais pas ce contenu, les événements ne sont plus indépendants.

Exemple

On tire une carte d'un jeu de 52 cartes.

On définit deux événements A : « la carte est un as », B : « la carte est un cœur ». Ces deux événements sont-ils indépendants ?

Solution :

Exemple (D'après Jacques Rouxel)

À gauche du ciel, il y avait la planète Shadok. Elle n'avait pas de forme spéciale... ou plutôt... elle changeait de forme.

Comme la planète Shadok changeait de forme, il y avait des Shadoks qui tombaient. C'était très gênant... surtout pour les Shadoks.

Les Shadoks en eurent donc assez, au bout d'un certain temps, de vivre sur une planète qui ne marchait pas bien... alors ils décidèrent d'aller sur la terre... qui avait l'air de mieux marcher...

Les Shadoks décidèrent donc de construire une fusée interplanétaire. Mais ces malheureuses bêtes n'avait pas de connaissances spéciales en astronautique. D'ailleurs, elles n'avaient pas tellement... de connaissances spéciales. On peut même dire qu'elles n'avaient pas de connaissances du tout...

À chaque essai de la fusée, la fusée retombait et se cassait... la situation était satisfaisante : les essais rataient très bien ! Car c'était un des principes de base de la logique shadok : « ce n'est qu'en essayant continuellement que l'on finit pas réussir. » Ou, en d'autres termes :

Plus ça rate, plus on a de chances que ça marche.

Leur fusée n'était pas très très au point mais ils avaient calculé qu'elle avait quand même une chance sur un million de marcher...

Et ils se dépêchaient de bien rater les 999 999 premiers essais pour être sûrs que le millionième marche.

Commenter la logique shadok.

Définition 4.6 (Famille d'événements mutuellement indépendants)

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements pour (Ω, \mathbf{P}) ,
On dit que les $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont **mutuellement indépendants**,
si pour toute partie I de $\llbracket 1; n \rrbracket$

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbf{P}(A_i)$$

Exercice

Combien d'égalités faut-il vérifier ?

Solution :

Exemple

Avec 3 événements A , B et C , il faut vérifier les égalités :

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$$

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$$

$$\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C)$$

$$\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$$

⚠ Des événements peuvent être indépendants deux à deux sans être mutuellement indépendants. Cela doit être vrai **pour toute partie**.

Exemple

On lance deux dés et on définit les 3 événements :

- A : « Le résultat du premier dé est 1 »,
- B : « Le résultat du second dé est 1 »,
- C : « Les deux dés donnent le même résultat ».

Étudier l'indépendance deux à deux et l'indépendance mutuelle.

Solution :

⚠ $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B) \mathbf{P}(C) \not\Rightarrow A, B, C$ mutuellement indépendants.

Exemple

On lance un dé et on définit 3 événements :

- A : « Le résultat du dé est 1, 2 ou 3 »,
- B : « Le résultat du dé est 1, 3 ou 5 »,
- C : « Le résultat du dé est 1, 2, 4 ou 5 ».

Étudier l'indépendance mutuelle.

Solution :

C Formule de Bayes

Les formules qui suivent ne doivent pas solliciter la mémoire, mais l'intelligence. Si elles sont bien comprises, il n'y a rien à apprendre.

L'idée de la formule de Bayes, est d'utiliser la symétrie du produit dans la définition des probabilités conditionnelles.

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}_A(B) \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_B(A) \mathbf{P}(B)$$

On peut donc « inverser » A et B dans les relations conditionnelles :

Propriété 4.7

Soit A et B deux événements de (Ω, \mathbf{P}) tels que $\mathbf{P}(A) > 0$,

$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}_B(A) \mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}$$

La formule de Bayes va généraliser cette relation.

Propriété 4.8 (Formule des probabilités totales)

Soit A un événement de (Ω, \mathbf{P}) , et $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_{B_i}(A) \mathbf{P}(B_i)$$

Remarque : En toute rigueur, on exige du système complet d'événements qu'il n'admette aucun événement de probabilité nulle. Néanmoins, la remarque au sujet des probabilités conditionnelles en cas de nullité reste vraie ici.

Preuve

D'un point de vue ensembliste, les B_i forment une partition de Ω .

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i)$$

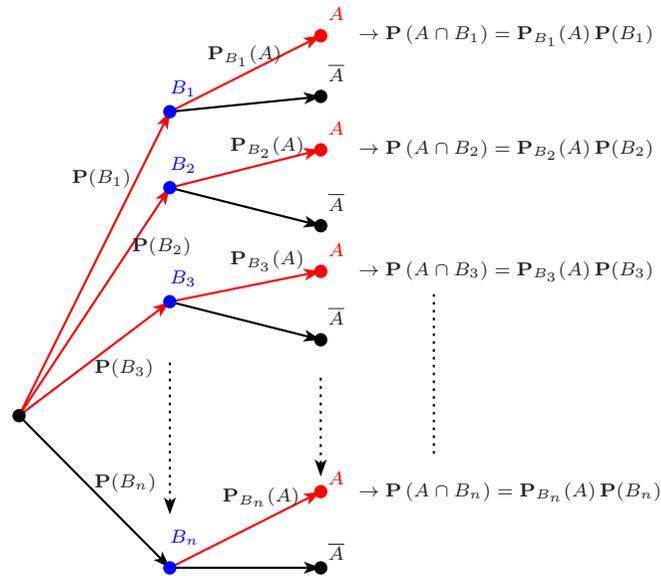
Comme les B_i forment une partition, l'union est disjointe, donc

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_{B_i}(A) \mathbf{P}(B_i)$$

■

Explications

Sur un arbre de probabilités, cela revient à sommer tous les chemins qui aboutissent à A en passant par chacun des B_k .



Solution :

Théorème 4.9 (Formule de Bayes)

Soit A un événement de (Ω, \mathbf{P}) , et $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements, Si $\mathbf{P}(A) > 0$, alors

$$\mathbf{P}_A(B_k) = \frac{\mathbf{P}_{B_k}(A)\mathbf{P}(B_k)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}_{B_k}(A)\mathbf{P}(B_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_{B_i}(A)\mathbf{P}(B_i)}$$

Exemple (Exemple classique à travailler)

Une population est atteinte d'un virus. On sait que la proportion de personnes atteintes est 10^{-4} .

Un test de dépistage a été mis au point. Les expérimentations ont permis de savoir que les probabilités que l'individu soit détecté positif s'il est atteint ou s'il ne l'est pas sont respectivement égales à 0,99 et à 0,001. Sachant que le test donne un résultat positif, quelle est la probabilité que l'individu soit effectivement atteint ?

Explications

Ceci illustre une grande difficulté pour détecter un événement rare avec un test ; même si le test est extrêmement fiable. C'est une erreur très néfaste, mais malheureusement très courante qui consiste à confondre deux types de questions :

- Quelle est la probabilité qu'un individu malade ne soit pas détecté ?
- Quelle est la probabilité qu'un individu détecté soit effectivement malade ?

Nous venons de voir que les réponses à ces deux questions sont très différentes.

D De l'importance de la modélisation

Mise en situation : Au début de l'année, j'ai reçu une lettre anonyme qui m'annonçait que l'action `molin-mathématiques` allait monter au cours de la semaine suivante.

La semaine suivante, par simple curiosité, je regarde le cours de bourse de l'action en question, et je vois qu'elle réalise en effet une belle progression.

Le vendredi midi, je reçois une autre lettre anonyme m'indiquant que l'action `prochain DS` baisserait la semaine prochaine.

Intrigué, je regarde la semaine suivante et je constate qu'en effet, cette action baisse.

Le vendredi, je reçois à nouveau une lettre et sa prédication s'avère aussi juste que les précédentes. Et ainsi de suite pendant 10 semaines !

À la fin de la 10^e semaine, je reçois une lettre identique, m'invitant à acheter des actions `truands et compagnie` qui m'apporteront à coup sûr une belle plus-value. Cette fois ci, elle est signée :

Le Courtier de Baltimore

Ce dernier me propose donc d'en faire l'achat moyennant une confortable commission à son égard.

Raisonnons un peu avant d'y mettre toutes nos économies.

Supposons que ce fameux courtier ne soit qu'un charlatan et qu'il ne connaisse rien à la bourse. Quelle est alors la probabilité qu'il réussisse, dix semaines de suite, à me fournir la bonne prédiction ?

On suppose donc que le courtier n'y connaît rien et donne à chaque fois une action au hasard. Ainsi, chaque prédiction est indépendante des précédentes, et on peut supposer en première approximation qu'à chaque fois, il a une chance sur deux que sa prédiction s'avère juste.

La probabilité d'avoir raison 10 semaines de suite si c'est un charlatant est donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{10}) = \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(B_2) \cdots \mathbf{P}(B_{10}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, moins de une chance sur 1000. Je peux donc être sûr de mon coup, et j'ai pense même avoir affaire à un excellent courtier puisqu'il ne s'est pas trompé une seule fois.

Le vice caché : En réalité, ce fameux courtier n'est qu'un truand. Comment a-t-il donc fait pour déjouer ainsi les probabilités ?

La première semaine, il a simplement envoyé une lettre à 1024 personnes en promettant à la moitié l'entre eux une hausse de l'action et à l'autre une baisse.

Il observe le cours de l'action, et à ceux auxquels la prédiction s'est révélée juste, il envoie une nouvelle prédiction. Il envoie donc 512 lettres où il annonce, pour moitié une hausse, et pour les autres, une baisse.

Il réitère ainsi sa méthode 10 semaines de suite, en n'envoyant la nouvelle lettre qu'à ceux auxquels les prédictions précédentes se sont révélées justes.

À la fin de la dixième semaine, il ne restait plus qu'une personne, c'était moi. Et il est désormais temps pour lui d'empocher le jackpot. Il n'y a aucun hasard là dedans, mais comme je ne vois qu'un aspect partiel du problème, je me fais duper.

Morale de cette histoire : il n'y en a malheureusement pas. Il est avéré que des compagnies lancent couramment de nombreux fonds d'investissement qu'elles laissent évoluer pendant quelques années. La plupart d'entre eux, comme les lettres du courtier, s'avèrent très décevants, et sont oubliés. Mais parmi tous ces fonds, certains obtiennent de très bons résultats, et la compagnie peut donc éditer une jolie plaquette sur papier glacé faisant miroiter les taux mirobolants obtenus par ce fond lors des 5 dernières années... avec la mention qui s'avère plus pertinente que nous ne voulions le croire : « les performances passées ne préjugent pas des performances futures ». C'est simplement la dernière lettre du courtier !

Il en est de même, en recherche ou en TIPE : si vous essayez de très nombreuses expériences avec des paramètres tous plus farfelus les uns que les autres, vous risqueriez, à la fin d'obtenir une expérience qui marcherait par un malheureux concours du hasard. Il vous suffit de cacher toutes les autres expériences, et de proposer votre dernière *lettre*, car

Aussi improbable que soit un événement, il est hautement probable qu'il se réalise un jour, si on y met la persévérance suffisante.

De là, à faire décoller la fusée Shadok ? Ils y sont arrivés !

Ainsi, quand on vous donne une information, posez vous également la question de toutes les informations que l'on ne vous donne pas... Les calculs les plus précis et convaincants, peuvent vite perdre de leur superbe.