

SÉRIES NUMÉRIQUES

« Si je devais me réveiller après avoir dormi pendant mille ans, ma première question serait : l'hypothèse de Riemann a-t-elle été démontrée ? »

David Hilbert

Série : une suite écrite sous la forme d'une somme dont on ajoute les termes un à un.

Un exemple fondamental est l'étude des sommes de la forme

$$\zeta_n(s) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s}.$$

Lorsque cette somme converge pour $n \rightarrow +\infty$, on note $\zeta(s)$ sa limite. La fonction $s \mapsto \zeta(s)$ est appelée la *fonction zêta de Riemann*.

Pour $s = 1$, c'est la série harmonique qui diverge (la fonction ζ n'est pas définie en 1).

Pour $s = 2$, on retrouve la fameuse somme

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

L'hypothèse de Riemann¹ énoncée en 1859 porte sur des caractéristiques de ζ . C'est l'une des plus importantes conjectures mathématiques à ce jour. Elle fait partie des 23 problèmes présentés par Hilbert en 1900 et qui devaient marquer le cours des mathématiques du XX^e siècle. Elle n'est toujours pas démontrée à ce jour.

C'est un des sept problèmes à un million de dollars de l'Institut Clay (un seul à été résolu).

1 EN GUISE D'INTRODUCTION

Outre les aspects calculatoires et techniques, ce chapitre va nous plonger dans

les paradoxes de l'infini.

L'étudiant curieux qui fera l'effort de rentrer dans cette compréhension, sans se limiter au seul formalisme, y trouvera sans aucun doute beaucoup de plaisir.

Pour commencer, prenons le plus célèbre d'entre tous :

Paradoxe de Zénon ou « Achille et la tortue »

Ce paradoxe a été formulé par Zénon au V^{ème} siècle avant Jésus-Christ et il résume à lui seul ce qu'est une série et les questions auxquelles elle répond.

Il faut attendre Taylor au XVIII^{ème} siècle pour formuler la théorie de façon moderne et rigoureuse mais Zénon avait déjà tout compris. Sauter négligemment ces 23 siècles pour ne s'intéresser qu'à la théorie initiée par Taylor, fait passer à côté l'essentiel en résumant le chapitre à un formalisme creux.

Et, puisqu'une belle théorie mérite une plume à sa mesure², laissons Tolstoï nous la présenter :

« C'est chose incompréhensible pour l'esprit humain que la continuité absolue du mouvement. L'homme, ne saisit les lois de n'importe quel mouvement que lorsqu'il en examine des unités arbitrairement découpées. Mais en même temps c'est de cette division arbitraire de mouvement continu en unités discontinues que naissent la plus grande partie des erreurs humaines.

Chacun connaît le "sophisme" des Anciens selon lequel Achille ne rattrapera jamais la tortue qui va devant lui, quoique son allure soit dix fois plus rapide. Quand Achille aura franchi la distance qui le sépare de la tortue, celle-ci se trouvera avoir franchi en le dépassant, le dixième de cette distance. Pendant qu'Achille franchira ce dixième, la tortue avancera encore d'un centième, ainsi de suite à l'infini. Ce problème paraissait insoluble dans l'antiquité. L'absurdité de la conclusion (Achille ne rattrapera jamais la tortue) découlait seulement du fait qu'on admettait arbitrairement des unités discontinues de mouvement alors que le mouvement d'Achille comme celui de la tortue est continu.

Si nous prenons des unités de mouvement de plus en plus petites, nous parvenons seulement à nous approcher de la solution, mais jamais nous ne l'atteignons. Ce n'est qu'en admettant une quantité infinitésimale et sa progression ascendante jusqu'au dixième, et en faisant la somme de cette progression géométrique que nous arrivons à la solution du problème. La nouvelle branche des mathématiques, qui a découvert l'art d'opérer avec des infiniment petits, donne maintenant des réponses à des questions jugées insolubles,

2. En réalité, dans ce récit, Tolstoï en profite pour introduire également la notion de continuité qui dépasse le cadre de ce cours, mais se trouve effectivement intimement liée à la convergence des séries et permet de passer de \mathbf{Q} à son complété \mathbf{R} . Mais ceci nous emmènerait beaucoup trop loin.

1. Les zéros dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ de la fonction ont tous une partie réelle égale à $\frac{1}{2}$.

même dans des problèmes beaucoup plus compliqués de dynamique. Cette branche nouvelle des mathématiques, inconnue de l'antiquité, en introduisant des infiniment petits dans l'étude de la dynamique, rétablit la condition fondamentale du mouvement, c'est-à-dire son absolue continuité, et redresse par là même l'erreur inévitable, que l'intelligence ne peut pas ne pas commettre lorsqu'elle remplace un mouvement continu par des unités discontinues de mouvement. [...]

C'est seulement en soumettant à notre examen une unité infiniment petite, la différentielle de l'histoire, c'est-à-dire les courants homogènes de l'humanité, et en nous rendant maîtres de l'art de les intégrer (de faire la somme des infinitésimaux), que nous pouvons espérer atteindre les lois de l'histoire. »

Tolstoï, La Guerre et la Paix (traduction La Pléiade) Livre III, chapitre premier.

Que comprendre ?

En général, sommer une quantité infinie de termes non nuls devrait nous donner, in fine, une quantité infinie.

Cependant, si à mesure que l'on avance, la quantité que l'on rajoute se trouve être de plus en plus petite, il se peut, qu'en sommant à l'infini, on n'obtienne qu'une quantité finie.

Achille rejoint la tortue :

Montrons qu'Achille rejoint la tortue en un temps fini (et parcourt donc une distance finie).

À chaque étape, la distance entre Achille et la tortue est divisée par dix. Mais le temps pour parcourir l'étape est aussi divisé par dix car Achille, fortifié par Athéna, ne connaît pas la fatigue et court à vitesse constante.

S'il faut un temps t pour les 100 premiers mètres, il suffit de $t/10$ pour les 10m suivants... Ainsi, à l'étape n , la distance restante entre Achille et la tortue est $d_n = \frac{100}{10^n}$,

et le temps écoulé est $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t}{10^k}$.

Ce n'est qu'au bout d'un nombre infini d'étapes qu'Achille rattrape la tortue.

Mais, le temps pour réaliser ces étapes est fini car la série $\sum \frac{t}{10^n}$ converge.

Ainsi, Achille rattrape la tortue au bout d'un temps

$$T = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t}{10^n} = \frac{t}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10t}{9}.$$

On peut aussi voir cette limite de façon décimale (on prend $t = 1$) :

$$1 + 0,1 + 0,001 + 0,0001 + \dots = 1,111111\dots$$

(ce qui est bien la même valeur).

La distance qu'il aura parcourue sera de $v \cdot T = \frac{1000}{9}$ m.

Le partage équitable lèse tout le monde.

Reprenons les mêmes idées, sur un autre exemple :

nous disposons d'un gâteau que l'on veut se répartir entre beaucoup, et même une quantité arbitrairement grande de personnes.

Chacun doit prendre une part (non nulle), de sorte qu'il en reste toujours un peu pour le suivant.

- Si, dans un soucis d'égalité bien française, on décide de répartir équitablement le gâteau, alors, pour établir la taille d'une part, on divise par le nombre de participants : ici l'infini.

La taille d'une part est donc nulle : personne n'a rien et le gâteau reste entier.

C'est équitable, mais pas satisfaisant.

- On peut alors trouver une autre répartition, certes inégalitaire, mais dans laquelle chacun aura strictement plus qu'avec la solution précédente et qui permettra de manger le gâteau en (quasi-)totalité.

Le premier qui se sert prend la moitié du gâteau, puis le suivant prend la moitié de ce qui reste, et celui d'après également... Ainsi chacun prend la moitié de ce qui lui est présenté et donne le reste au voisin.

Cette solution semble presque idéale³ pour chacun. En effet, si chaque personne se compare aux voisins, elle aura la satisfaction bien égoïste de se trouver parmi une minorité de privilégiés puisque la plus grande partie des personnes (une infinité), aura une part plus petite que la sienne (au contraire d'un nombre fini de personnes qui en disposent d'une plus grande). En suivant le processus, on voit que la part restante du gâteau tend vers 0 et qu'à la limite il ne restera plus rien (limite qui n'est jamais atteinte, car personne ne finit le gâteau).

Ceci se traduit ainsi avec les séries :

Si le gâteau vaut 1, la première personne prend $\frac{1}{2}$, la seconde $\frac{1}{2^2}$, la troisième $\frac{1}{2^3}$,... la n -ième personne prend une part de taille $\frac{1}{2^n}$.

Si on fait la somme de toutes les parts prises, alors, à la limite, on obtiendra la totalité du gâteau :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Et si, on étudie ce qui **reste** après que n personnes se soient servies, on trouve évidemment $\frac{1}{2^n}$, que l'on notera

$$R_n = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}.$$

On peut donc retenir, qu'à condition d'avoir une répartition non uniforme, il est possible de partager une quantité strictement positive en une infinité de quantités non nulles. Ou, en d'autres termes :

3. On peut malheureusement penser que la répartition mondiale des richesses, n'est pas très loin de ce modèle, et ce, malgré un nombre fini d'individus, ce qui rend cette solution beaucoup moins satisfaisante.

Ce n'est pas parce qu'on somme une « infinité » de quantité toutes non nulles, que la quantité finale est nécessairement grande.

On conçoit cependant aisément qu'il faut, à mesure que l'on avance dans le partage, que la taille des parts s'approche de zéro (c'est ce que l'on appellera le **critère nécessaire de convergence**).

Mais ça ne suffit pas, et si chacun est un tout petit peu trop gourmand, il se peut que l'on ne puisse satisfaire tout le monde, aussi gros soit le gâteau : la série diverge vers $+\infty$.

Par exemple si le premier prend $\frac{1}{2}$, mais le second, un peu trop gourmand, prend $\frac{1}{3}$ (au lieu de $\frac{1}{4}$), le troisième, prend $\frac{1}{4}$... et le n -ième prend $\frac{1}{n+1}$.

Si on étudie la quantité prise par les n premiers on obtient $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$ et on a vu que (au premier terme près), cette somme harmonique est équivalente à $\ln(n)$ en $+\infty$.

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Cela veut dire que, quelle que soit la taille M du gâteau, il existera toujours un certain rang n tel que $S_n > M$, c'est-à-dire que les suivants n'ont plus rien !

Intuitivement :

Il ne suffit pas que la taille des parts devienne infiniment petite, mais il faut qu'elle le deviennent « vite ».

Il y a une compétition entre deux infinis :

- l'infiniment petit de la taille des parts,
- l'infiniment grand du nombre de termes de la somme.

L'enjeu essentiel est donc d'estimer ces infinis, ce pour quoi, **les développements limités et asymptotiques** seront d'une aide précieuse.

2 GÉNÉRALITÉS

Définition 2.1 (Série numérique)

Soit une suite $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

On appelle **somme partielle** de terme général u_n , la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

La **série numérique** de terme général u_n désigne⁴ la suite (S_n) des sommes partielles.

On note cette série $\sum u_n$ dont u_n est le **terme général**.

Remarque : Lorsque (u_n) est définie à partir de n_0 , on peut définir la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$.

Définition 2.2 (Nature de la série)

La série $\sum u_n$ **converge** si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Dans le cas contraire, la série **diverge**.

La **nature** d'une série désigne sa convergence ou sa divergence.

Théorème 2.3

Lorsqu'une série converge, on note sa limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

⚠ La somme infinie est la notation d'une limite et elle ne se comporte pas comme une somme « habituelle ». Il ne faut donc pas hésiter à repasser aux sommes partielles, puis à prendre la limite.

Exemple

Étudier la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ pour $n \geq 1$.

Solution :

On étudie la suite des sommes partielles (S_n) et on fait apparaître une somme télescopique.

$\forall n \geq 1,$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

4. Formellement, la série numérique désigne le couple $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}})$ composé de la suite « terme général » et de la suite des sommes partielles.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$.

La série converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

Définition 2.4 (Reste d'ordre n)

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Le **reste** d'ordre n de la série est défini par

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

⚠ Pour le reste d'ordre n , la somme commence à $n+1$. Ceci n'a de sens que si la série converge.

Exemple

Donner le reste d'ordre n de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

Solution :

Pour $n \geq 1$,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}.$$

Propriété 2.5

On ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de termes.

Preuve

Si on note n_0 l'indice du dernier terme modifié entre u et v et $a = \sum_{k=0}^{n_0} (u_k - v_k)$, alors, on a pour tout $n \geq n_0$,

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n v_k + a.$$

Ainsi, les deux suites des sommes partielles ne diffèrent que d'une constante pour $n \geq n_0$. Donc elles sont de même nature (et leur limite, si elle est finie, diffère de la valeur a). ■

Théorème 2.6 (Condition nécessaire de convergence)

Si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) converge vers 0.

La réciproque est **FAUSSE**.

Contraposée : Si u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge. On dit qu'elle diverge *grossièrement*.

Preuve

On suppose que la série converge.

Si on note (S_n) la suite des sommes partielles, alors il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $S_n \rightarrow \ell$.

Ainsi, par opération sur les limites, $u_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$. ■

Méthode

Si on demande la nature d'une série, commencer par étudier la limite de son terme général.

Exemple

Montrer que $\sum \sin n$ diverge.

Solution :

Si $\sin(n)$ tendait vers 0, alors $\sin(n+1)$ aussi.

Or $\sin(n+1) = \cos n \sin 1 + \sin n \cos 1$.

Donc par opérations sur les limites, $\cos n \rightarrow 0$ (car $\sin 1 \neq 0$).

Or $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$. C'est absurde.

Donc $\sin n \not\rightarrow 0$, donc $\sum \sin n$ diverge grossièrement.

Exemple

Donner la nature de la série de terme général $u_n = n^2 \left(e^{\frac{1}{n+1}} - e^{\frac{1}{n}} \right)$ pour $n \geq 1$.

Solution :

$$\begin{aligned} u_n &= n^2 \left(e^{\frac{1}{n+1}} - e^{\frac{1}{n}} \right) \\ &= n^2 e^{\frac{1}{n}} \left(e^{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} - 1 \right) \\ &= n^2 e^{\frac{1}{n}} \left(e^{-\frac{1}{n(n+1)}} - 1 \right) \\ &\sim -\frac{n^2 e^{\frac{1}{n}}}{n(n+1)} \sim -1. \end{aligned}$$

Donc $u_n \rightarrow -1$, la série diverge grossièrement.

3 LIENS SUITES - SÉRIES

« Suites & séries : même combat ! »

Toute série peut s'étudier comme une suite : la suite des sommes partielles. Réciproquement toute suite, peut également s'écrire sous la forme d'une série avec les sommes télescopiques.

Méthode (Série télescopique)

Soit $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$,

la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Exemple

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + n$. Exprimer u_n en fonction de n .

Solution :

$\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = n$.

En sommant, on trouve donc $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} k$.

C'est-à-dire $u_n - u_0 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Méthode (*Retrouver le terme général*)

Si (S_n) est une suite de sommes partielles associée à la série $\sum u_n$, alors,

$$u_0 = S_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Exemple

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + n2^n$.

Déterminer u_n en fonction de n .

Solution :

au brouillon :

On cherche une suite auxiliaire $v_n = \alpha_n u_n$ qui permet de se ramener à une situation similaire à celle de l'exemple précédent.

$$\alpha_{n+1} u_{n+1} = 2\alpha_{n+1} u_n + n2^n \alpha_{n+1}.$$

On prend la suite telle que $2\alpha_{n+1} = \alpha_n$. Par exemple, $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$.

réduction :

Soit v_n la suite définie pour tout n par $v_n = \frac{1}{2^n} u_n$.

Alors $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} u_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} (2u_n + n2^n) = v_n + \frac{n}{2}.$$

On retrouve alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_n = v_0 + \frac{n(n-1)}{4}$, donc

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = 2^n u_0 + 2^{n-2} n(n-1).$$

4 OPÉRATIONS SUR LES SÉRIES CONVERGENTES

Théorème 4.1 (*Produit par une constante*)

Si (u_n) est une suite et $\lambda \in \mathbf{C}$ **non nul**, alors $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ ont la même nature. Et si elles convergent, alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Remarque : Si $\lambda = 0$, alors la série $\sum \lambda u_n$ est simplement nulle et converge toujours vers 0.

Théorème 4.2 (*Somme des limites*)

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum (u_n + v_n)$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

La réciproque est fautive. On peut avoir la convergence de $\sum (u_n + v_n)$ sans avoir la convergence de $\sum u_n$ ni de $\sum v_n$.

Preuve

Par opération sur les limites des sommes partielles. ■

Exemple

Montrer que si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n + v_n$ diverge.

Solution :

Si par l'absurde $\sum u_n + v_n$ converge, alors, d'après la convergence de $\sum u_n$, la série $\sum u_n - \sum u_n - v_n$ converge.

Or, on reconnaît ici la série de terme général v_n qui diverge.

C'est donc absurde et $\sum u_n + v_n$ diverge.

Exemple

Donner l'exemple de deux séries divergentes dont la somme converge.

Solution :

Il suffit de prendre le terme général et son opposé.

Par exemple $u_n = n$ et $v_n = -n$ (les deux séries divergent grossièrement, mais la suite des sommes partielles de $u_n + v_n$ est stationnaire à 0).

Méthode (*Changements d'indices*)

Les changements d'indices du type $j = j + p$, avec p une constante fixée, se réalisent de la même façon sur les sommes des séries **convergentes** que sur les sommes finies (mais la borne $+\infty$ ne change pas).

Par exemple, si $\sum u_n$ converge, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1}.$$

Preuve

Par passage aux limites sur les sommes partielles. ■

5 SÉRIES USUELLES

A Séries géométriques

Définition 5.1 (*Série géométrique*)

On appelle **série géométrique**, toute série dont le terme général est une suite géométrique.

Théorème 5.2 (*Critère de convergence des séries géométriques*)

La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Preuve

Trivial, $q^n \rightarrow 0$ sinon, la série diverge grossièrement. ■

Propriété 5.3

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$, alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = u_0 \frac{1}{1-q}.$$

B Séries de Riemann**Définition 5.4** (*Séries de Riemann*)

On appelle **série de Riemann**, tout série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$. Pour $\alpha = 1$, la série $\sum \frac{1}{n}$ s'appelle la **série harmonique**.

Théorème 5.5 (*Séries de Riemann*)

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve

On donnera la preuve après le théorème de comparaison série-intégrale à la page 9. ■

C Série exponentielle**Théorème 5.6**

$\forall x \in \mathbf{C}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge.

On note sa somme

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Preuve

Voir plus loin dans ce cours à la page 11. ■

Explications

On peut définir ainsi la fonction exponentielle (à la fois sur \mathbf{R} et sur \mathbf{C}) et les autres propriétés en découlent. Mais cela nécessite un cours plus approfondi sur les séries qui sera vu en deuxième année.

Pour $x = 0$, on retrouve bien $e^0 = 1$.

6 CRITÈRES DE CONVERGENCE DES SÉRIES À TERMES POSITIFS

Dans toute cette partie, on ne traite que des séries à termes positifs qui constituent l'objectif central en première année. En effet, nous verrons plus loin que, même lorsque la série n'est pas à termes positifs, on essaiera de se ramener à cette situation.

A Théorème de la limite monotone**Définition 6.1**

On appelle **série à termes positifs** [resp. strictement positifs] toute série dont le terme général est positif [resp. strictement positif] à partir d'un certain rang.

Comme une modification d'un nombre fini de termes ne change pas la nature de la série, il n'est pas utile de s'assurer que la série est toujours positive, mais seulement à partir d'un certain rang.

Les résultats sur la convergence s'en trouvent inchangés, mais attention, contrairement aux suites, la somme (limite) est sensible aux premiers termes. En effet, la série traduit un phénomène cumulatif (on ajoute tous les termes et pas seulement les derniers) et « garde mémoire » de tous ses éléments.

Théorème 6.2 (*Séries à termes positifs*)

Toute série à termes positifs admet une limite dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.

La série converge si, et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

On voit de même que toute série à termes négatifs admet une limite dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$.

Preuve

La suite des sommes partielles est croissante (à partir d'un certain rang).

En effet, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$,

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = u_{n+1} \geq 0$$

car le terme général est supposé positif à partir d'un certain rang (noté ici n_0). D'après le théorème de la limite monotone, (S_n) admet une limite finie ou $+\infty$. ■

B Théorème de comparaison simple

Théorème 6.3 (Comparaison des séries à termes positifs)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes **positifs**.

On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$, tel que $\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$.

- si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$,
- si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Preuve

On fait la preuve dans le cas où les termes généraux sont positifs à partir du rang 0 et que l'inégalité est aussi vraie à partir du rang $n_0 = 0$. On généralise ensuite.

$\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq v_n$, donc par sommation d'inégalités de même sens : $\sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k$.

Si $\sum v_n$ converge, comme la série est à termes positifs, alors toutes les sommes partielles

sont majorées par la limite $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$. Donc $\sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.

Donc la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ est majorée, et la série est à termes positifs, donc $\sum u_n$ converge.

(par contraposée, on a aussi le résultat si $\sum u_n$ diverge).

De plus $\sum u_n$ converge vers la borne supérieure de ses sommes partielles, dont $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ est un majorant, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Dans le cas général, on sait que changer un nombre fini de termes ne modifie pas la nature des suites et on applique donc le résultat aux suites (u'_n) et (v'_n) obtenues à partir de (u_n) et (v_n) en posant

$\forall n \in \mathbf{N}, u'_n = 0$ si $u_n < 0$ ou si $u_n > v_n$, et $u'_n = u_n$ sinon.

$\forall n \in \mathbf{N}, v'_n = 0$ si $v_n < 0$ ou si $u_n > v_n$, et $v'_n = v_n$ sinon.

Le résultat précédent s'applique donc à $\sum u'_n$ et $\sum v'_n$, puis à $\sum u_n$ et $\sum v_n$ puisque seul un nombre fini de termes a été modifié.

Evidemment la sommation des inégalités n'est valable qu'à partir de n_0 (le changement des termes change la valeur de la somme) et l'inégalité n'est donc valable que sur les restes des deux séries à partir du rang $n_0 - 1$. ■

Exemple

Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n^n}$ converge.

Solution :

$\forall n \geq 2, \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}$.

Or $\sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique à termes positifs convergente car $\frac{1}{2} < 1$.

$\sum \frac{1}{n^n}$ est aussi à termes positifs, donc par comparaison, $\sum \frac{1}{n^n}$ converge.

C Convergence absolue

On considère une série réelle $\sum u_n$ dont on veut connaître la nature.

La première chose est de vérifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, sinon, on a divergence grossière.

Une fois ce critère vérifié, on peut estimer « la vitesse » avec laquelle la suite tend vers 0 : si elle tend suffisamment vite vers 0, $\sum u_n$ converge, sinon $\sum u_n$ diverge.

Pour cela, les séries usuelles offrent des vitesses de référence auxquelles se comparer.

Cependant, lorsque les termes de la suite changent de signe, on observe parfois un effet de compensation entre les termes positifs et négatifs.

Cet effet de compensation permet à la suite tendre « un peu moins vite » vers 0 que si tous les termes étaient positifs : le petit surplus des termes positifs étant compensé par un petit surplus des termes négatifs : cette compensation facilite la convergence.

Dans le cadre d'une première étude, on peut négliger cet effet et ne s'intéresser qu'à la série des valeurs absolues $\sum |u_n|$. Dans ce cas, les « surplus », loin de se compenser

l'un l'autre, s'ajoutent dans la somme.

On comprend donc aisément que si la série des valeurs absolues converge, alors la série converge (« encore plus »), mais que la réciproque est évidemment fausse.

L'absolue convergence est un critère un peu grossier mais très efficace.

Définition 6.4 (Convergence absolue)

Soit $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, on dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** (ou converge absolument) si la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 6.5

Une série absolument convergente est convergente :

« la convergence absolue implique la convergence simple ».

Dans ce cas, $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

⚠ la réciproque est **fausse**.

Définition 6.6

Une série qui est convergente, sans être absolument convergente est dite **semi-convergente**.

On verra des exemples de semi-convergence au moment des séries alternées. L'étude des familles sommables, un peu plus loin, montrera également que ce mode de con-

vergence est beaucoup plus « faible » que la convergence absolue et insuffisant pour certaines applications.

Preuve (*Cas réel*)

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$.

u_n^+ représente la partie positive de u_n et u_n^- sa partie négative.

Ainsi, pour $u_n \geq 0$, $u_n = u_n^+$ et $u_n^- = 0$ et pour $u_n < 0$, $u_n = -u_n^-$ et $u_n^+ = 0$.

On obtient donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_n^+ - u_n^-$ avec (u_n^+) et (u_n^-) des suites positives.

$\forall n \in \mathbf{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_k^+ - \sum_{k=0}^n u_k^- = S_n^+ - S_n^-$.

Supposons que la série $\sum u_n$ converge absolument, c'est-à-dire $\sum |u_n|$ converge.

La suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^n |u_k|)$ est donc croissante et majorée par $\ell \in \mathbf{R}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n^+ \leq |u_n|$, donc $S_n^+ \leq \sum_{k=0}^n |u_k| \leq \ell$.

La suite (S_n^+) est croissante (somme de termes positifs) et majorée par ℓ , donc elle converge.

De même, la suite (S_n^-) converge, et par opération sur les limites, (S_n) converge.

Donc $\sum u_n$ converge.

Par inégalité triangulaire, $\forall n \in \mathbf{N}$, $|\sum_{k=0}^n u_k| \leq \sum_{k=0}^n |u_k|$.

D'où, par passage des inégalités à la limite, $|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$. ■

Preuve (*Cas complexe*)

$|\Re(u_n)| \leq |u_n|$ et $|\Im(u_n)| \leq |u_n|$, donc les deux séries associées aux parties réelles et imaginaires convergent d'après le cas réel.

Donc par linéarité $\sum u_n$ converge. ■

Exemple

Donner la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Solution :

$\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (car $2 > 1$).

Donc la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente, donc elle converge.

D Théorèmes de comparaison asymptotique

⚠ On comparera toujours à une suite **positive** de référence.

Théorème 6.7 (*Domination*)

Soit (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que (v_n) soit **strictement positive**.

On suppose que $u_n = O(v_n)$.

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Preuve

Si $u_n = O(v_n)$, alors, il existe $M > 0$ et $n_0 \in \mathbf{N}$ tels que $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq Mv_n$.

Donc si $\sum v_n$ alors, $\sum |u_n|$ converge, donc $\sum u_n$ converge. ■

Remarque : Il est indispensable que (v_n) soit positive pour utiliser le critère.

Par contre, le passage par l'absolue convergence permet de considérer u quelconque, éventuellement complexe.

Théorème 6.8 (*Négligeabilité*)

Soit (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que (v_n) soit **strictement positive**.

On suppose que $u_n = o(v_n)$.

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Preuve

C'est un cas particulier de la domination. ■

Théorème 6.9 (*Critère avec des équivalents*)

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites équivalentes **positives**, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

⚠ Cela ne veut pas dire que les sommes partielles soient équivalentes ! En particulier, si elles convergent, la limite dépend fortement des premiers termes des suites.

Preuve

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $|u_n - v_n| = o(v_n)$.

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum |u_n - v_n|$ converge, donc $\sum u_n - v_n$ converge.

Or on a supposé que $\sum v_n$ converge, donc par somme, $\sum u_n$ converge aussi.

Par symétrie des rôles on a donc bien l'équivalence. ■

Exemple

Donner la nature de la série de terme général $u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$.

Solution :

$u_n \sim \frac{1}{n}$, donc la série est équivalente à la série harmonique divergente.

Ainsi $\sum u_n$ diverge.

⚠ Ces critères ne sont valables qu'en comparaison à des séries à **termes positifs**. On peut trouver deux suites équivalentes $u_n \sim v_n$ de sorte que $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge.

Si cette remarque est écrite à la fois en début et en fin de section, c'est qu'elle est l'objet de très nombreuses erreurs : alors soyez vigilants.

E Comparaison aux séries usuelles

Théorème 6.10

Soit $\sum u_n$ une série à termes **positifs**,

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ majorée, alors $\sum u_n$ converge.
- S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ tend vers $\ell \in \mathbf{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, alors $\sum u_n$ diverge.
- S'il existe $q > 1$ tel que $(q^n u_n)$ majorée, alors $\sum u_n$ converge.

Preuve

Si $n^\alpha u_n$ majorée, alors on peut noter M un majorant. Donc $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n \leq \frac{M}{n^\alpha}$.

Or la série $\sum \frac{M}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ (série de Riemann), donc par comparaison, la série $\sum u_n$ converge.

De même pour les deux autres cas. ■

Corollaire 6.11 (Critère de d'Alembert)

Soit (u_n) est une suite à termes **strictement** positifs, telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \geq 0$.

- Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell = 1$, ce théorème ne permet pas de conclure, il faut une autre approche.
- Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Preuve

- Si $\ell < 1$, alors on peut trouver $q \in \mathbf{R}$, tel que $\ell < q < 1$ (par exemple $q = \frac{\ell+1}{2}$). Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers ℓ , il existe un certain rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$.

Et par récurrence immédiate, $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq q^{n-n_0} u_{n_0}$.

Donc par comparaison à une série géométrique : $\sum u_n$ converge.

- Si $\ell > 1$, alors la suite est croissante et ne tend pas vers 0. La série diverge donc grossièrement.
- Si $\ell = 1$, on peut avoir tous les cas : par exemple $\sum \frac{1}{n}$ diverge, mais $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. ■

Le critère de d'Alembert est simpliste (mais très efficace dans le cadre des séries entières qui seront vues en 2ème année) car il compare les séries à des séries géométriques qui ont une convergence « très rapide ».

Ainsi, toutes les séries de Riemann, qui convergent « un peu plus lentement » rentrent dans la zone grise $\ell = 1$.

Il faut donc se rappeler que ce critère, quand il marche, est très efficace, mais qu'il faudra souvent aller chercher des comparaisons plus fines.

F Comparaison série intégrale**Théorème 6.12** (Comparaison série intégrale)

Soit f une fonction (continue) **positive** décroissante sur \mathbf{R}_+ .

La série $\sum f(n)$ est de même nature que la suite $\left(\int_0^n f(t) dt \right)_{n \in \mathbf{N}}$.

Preuve

f est décroissante, donc pour tout $t \in [n, n+1]$, $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$.

Par croissance de l'intégrale,

$$f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1) dt \leq \int_n^{n+1} f \leq \int_n^{n+1} f(n) dt = f(n).$$

En sommant des inégalités de même sens :

$$\sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k).$$

La série est à termes positifs, et la suite des intégrales est croissante positive (par positivité de f).

- Si la suite des intégrales converge, alors elle est majorée par un réel $M \in \mathbf{R}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f \leq M$. Donc la série est majorée : elle converge.
- Réciproquement, si la série converge, alors elle est majorée par un réel $M \in \mathbf{R}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\int_0^n f \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \leq M$. Donc la suite des intégrales est majorée, et comme elle est croissante, alors elle converge.

Donc la série et la suite des intégrales ont la même nature. ■

Exemple

Prouver le théorème sur la convergence/divergence des séries de Riemann.

Solution :

- Pour $\alpha \leq 0$, le terme général ne tend pas vers 0 : la série diverge grossièrement.
- Pour $\alpha > 0$, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est positive décroissante sur \mathbf{R}_+ et prolongeable par continuité en 0. On peut donc appliquer le théorème de comparaison série intégrale (ici, il faut commencer à 1 pour pouvoir calculer l'intégrale).

– Si $\alpha = 1$, alors $I_n = \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n$ qui diverge. Donc la série diverge.

– Si $\alpha \neq 1$, alors $I_n = \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = -\frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1 \right)$ qui converge pour $\alpha - 1 > 0$, c'est-à-dire pour $\alpha > 1$.

7 SEMI-CONVERGENCE

⚠ Dans un exercice, avant de rentrer dans des études subtiles de semi-convergence, telles qu'elles sont exposées ici, On étudie l'absolue convergence à l'aide de comparaisons, développements limités...

Nous verrons un peu plus loin, que l'absolue convergence donne en plus des résultats de « stabilité » qui n'existent pas avec la semi-convergence.

Théorème 7.1 (critère spécial des séries alternées)

Soit (a_n) une suite **décroissante de limite nulle**.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$.

- La série $\sum (-1)^n a_n$ converge.
- $\forall n \in \mathbf{N}$, le reste d'ordre n , R_n est du signe de son premier terme.
- $\forall n \in \mathbf{N}$, $|R_n| \leq a_{n+1}$ (majoré par son premier terme).

On remarque en outre que $\forall n \in \mathbf{N}$ $S_1 \leq S_3 \leq \dots \leq S_n \leq \dots \leq S_2 \leq S_0$ et qu'en particulier (S_n) est du signe constant égal à celui de son premier terme $(-1)^0 a_0 \geq 0$.

Preuve (*À savoir refaire*)

- On montre que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
En effet,
 $\forall n \in \mathbf{N}$, $S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$ par décroissance de (a_n) .
Donc (S_{2n}) est décroissante.
De même, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0$.
Donc (S_{2n+1}) est croissante.
On a donc bien montré que les deux suites extraites sont monotones de sens contraire.
De plus $|S_{2n+1} - S_{2n}| = a_{2n+1} \rightarrow 0$, donc les suites sont bien adjacentes.

Les deux suites extraites convergent donc vers la même limite $\ell \in \mathbf{R}$, donc la suite (S_n) converge vers ℓ .
Ce qui prouve que la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.
- (S_{2n}) est décroissante, donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $S_{2n} \geq \ell$, donc $R_{2n} = \ell - S_{2n} \leq 0$ ce qui est le signe de $(-1)^{2n+1} a_{2n+1}$.
De même $R_{2n+1} \geq 0$, donc du signe de $(-1)^{2n} a_{2n}$.
- De plus $R_{2n} = \ell - S_{2n} \leq S_{2n+1} - S_{2n}$ car $S_{2n+1} \leq \ell$.
Donc $0 \leq R_{2n} \leq a_{2n+1}$.
De même, $0 \geq R_{2n+1} \geq -a_{2n+2}$.
On en déduit que $\forall n \in \mathbf{N}$, $|R_n| \leq a_{n+1}$.
- Pour montrer que $(S_n) \geq 0$, il suffit de voir $a_1 \leq a_0$, donc $0 \leq S_1 \leq S_0$.
Que pour n impair, la suite (S_{2n+1}) est croissante et de premier terme positif (donc positive).
 $S_{2n} \geq S_{2n+1} \geq 0$.
La chaîne d'inégalité s'obtient par monotonie des suites extraites.

Théorème 7.2 (Cas général)

Soit (u_n) une suite de signes alternés telle que $(|u_n|)$ soit **décroissante de limite nulle**.

- La série $\sum u_n$ converge.
- $\forall n \in \mathbf{N}$, le reste d'ordre n , R_n est du signe de son premier terme.
- $\forall n \in \mathbf{N}$, $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ (majoré par son premier terme).

On a le même résultat avec la négligeabilité.

Preuve

On a fait un cas au dessus.

C'est la même chose par symétrie si on échange les signes (revient à tout multiplier par (-1)). ■

Exemple

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et donner le signe de sa limite.
2. La série converge-t-elle absolument ?

Remarque : On peut montrer que la série des restes est elle-même alternée, donc converge. Mais je ne détaille pas car cela ne tient pas dans la marge.

8 RÉSUMÉ, EXEMPLES

Méthode (Nature)

Pour étudier la **nature** d'une série à termes réels ou complexes :

- **divergence grossière** : le terme général tend-il vers 0 ?
- **absolue convergence** : étude des valeurs absolues du terme général.
 - comparaison asymptotique : $\sim (v_n)$, $O(v_n)$ ou $o(v_n)$ avec $\sum v_n$ une série à termes positifs convergente.
 - critère de d'Alembert (si non annulation du terme général).
 - comparaison avec une série usuelle.
 - majoration « simple » par le terme général d'une série convergente, ou directement la suite des sommes partielles.
 - comparaison série-intégrale.
- **semi-convergence** :
 - Critère spécial des séries alternées.
 - Développement asymptotique.

Méthode (Calcul de la somme)

Si on demande de calculer une somme, les méthodes peuvent différer :

- Reconnaître une somme télescopique.
- Prouver la convergence, puis trouver une équation que satisfait la limite (voir exemple plus bas).
- Prouver l'absolue convergence, puis sommer par paquets ou de façon commutative (voir partie suivante sur les familles sommables).

Exemple (Série exponentielle)

Pour $x \in \mathbf{C}$, on définit la **série exponentielle** par $\sum \frac{x^n}{n!}$.

Prouver que la série converge pour tout $x \in \mathbf{R}$.

On note alors $\forall x \in \mathbf{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Solution :

Pour $x > 0$, et $n \in \mathbf{N}$, on note $u_n = \frac{x^n}{n!}$.

La suite est strictement positive et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0$.

D'après le critère de d'Alembert, la série converge.

Si $x < 0$, la série converge absolument, donc converge.

Si $x = 0$, le résultat est trivial et la série converge vers 1.

Exemple (Séries géométriques dérivées)

La **série géométrique dérivée** $\sum nq^{n-1}$ converge si, et seulement si $|q| < 1$.

Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

La **série géométrique dérivée seconde** $\sum n(n-1)q^{n-2}$ converge si, et seulement si $|q| < 1$.

Dans ce cas,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Solution :

★ Étude de la convergence.

Si $|q| \geq 1$, alors le terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.

Si $q = 0$, le résultat est trivial.

Si $|q| < 1$ et $q \neq 0$, alors on note $u_n = nq^{n-1}$.

Ainsi pour $n \geq 1$, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n+1}{n} |q| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |q| < 1$.

D'après le critère de d'Alembert, la série converge.

★ Pour tout $n \geq 1$, $S_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)q^k$ changement d'indice

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{+\infty} kq^k + \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \quad \text{car les deux séries convergent} \\ &= qS_1 + \frac{1}{1-q}. \end{aligned}$$

Donc $(1-q)S_1 = \frac{1}{1-q}$, ainsi $S_1 = \frac{1}{(1-q)^2}$.

Pour la série dérivée seconde, on obtient le critère de convergence de la même façon que pour la dérivée première.

$S_2 = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)q^{k-1}$ changement d'indice

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1+2)q^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} 2kq^{k-1} \quad \text{car les deux séries convergent} \\ &= q \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} + 2S_1 \\ &= qS_2 + 2S_1. \end{aligned}$$

Donc $(1-q)S_2 = 2S_1 = \frac{2}{(1-q)^2}$, ainsi $S_2 = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Explications

On reconnaît à chaque fois des dérivations *formelles* par rapport à q :

« la somme des dérivées est égale à la dérivée de la somme. »

C'est ainsi qu'il faut retenir les formules — au brouillon — mais on ne peut pas (de façon simple et avec les outils dont nous disposons actuellement) les démontrer ainsi. En effet, il ne faut pas oublier que $\sum_{k=0}^{+\infty}$ désigne une limite et non une somme finie et la linéarité de la dérivation ne s'applique donc pas.

9 APPLICATION : LE DÉVELOPPEMENT DÉCIMAL

Le premier théorème justifie que tout réel peut s'écrire sous forme décimale (éventuellement infinie) et que cette écriture est unique si on interdit les nombres du type $0,99999\dots = 1$.

Théorème 9.1

Soit $x \in [0, 1[$, alors il existe une unique suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ telle que

- $\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$,
- la suite n'est pas stationnaire à 9,
-

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n}.$$

Réciproquement, toute suite de ce type définit un unique réel.

Preuve (*Non exigible*)

Unicité :

Soit $x \in [0, 1[$, on suppose qu'une telle suite (a_n) existe.

Supposons qu'une autre suite (b_n) existe et vérifie les mêmes propriétés.

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n 10^{-n}$$

On suppose par l'absurde que (a_n) et (b_n) sont différentes.

Alors, il existe un plus petit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $a_{n_0} \neq b_{n_0}$, par exemple $b_{n_0} > a_{n_0}$.

Par opération sur les limites,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n) 10^{-n} \\ &= \sum_{n=n_0}^{+\infty} (a_n - b_n) 10^{-n} \\ &= 10^{-n_0} \left(a_{n_0} - b_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} (a_n - b_n) 10^{-(n-n_0)} \right) \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} (a_n - b_n) 10^{-(n-n_0)} = b_{n_0} - a_{n_0} \geq 1.$$

Or pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n - b_n \leq 9$, donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} (a_n - b_n) 10^{-(n-n_0)} &\leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-(n-n_0)} \\ &\leq 9 \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} 10^{-(n-n_0)} \\ &\leq 9 \sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-n} \quad (\text{changement d'indice}) \\ &\leq 9 \frac{1}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \quad (\text{série géométrique}) \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Ces deux inégalités donnent donc

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} (a_n - b_n) 10^{-(n-n_0)} = 1.$$

Or, la deuxième inégalité est stricte sauf dans le cas où la suite $(a_n - b_n)$ est stationnaire à 9. Ceci n'est possible que si (a_n) est stationnaire à 9 et (b_n) stationnaire à 0. C'est impossible par hypothèse : absurde. Donc la suite est définie de façon unique.

Existence :

a_n correspond à la n -ième décimale après 0, c'est-à-dire que l'on peut construire la suite par récurrence :

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$A_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}.$$

Visuellement, cela revient à tronquer x après la n -ième décimale.

Alors on définit pour $n \geq 1$,

$$a_n = 10^n (A_n - A_{n-1}).$$

a_n correspond bien à la n -ième décimale de x .

Montrons ces trois points :

1. que la suite (a_n) est bien à valeurs dans $\llbracket 0, 9 \rrbracket$,
2. que la série $\sum_{n \geq 1} a_n 10^{-n}$ converge vers x ,
3. que la suite n'est pas stationnaire à 9.

1. Le premier point revient à montrer que pour tout $y \in \mathbf{R}$, $\lfloor 10y \rfloor - 10\lfloor y \rfloor \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y \\ \text{et } 10y - 1 < \lfloor 10y \rfloor \leq 10y \end{cases} \\ \text{donc } &\begin{cases} 10y - 10 < 10\lfloor y \rfloor \leq 10y \\ \text{et } 10y - 1 < \lfloor 10y \rfloor \leq 10y \end{cases} \\ \text{donc } &\begin{cases} -10y \leq -10\lfloor y \rfloor < -10y + 10 \\ \text{et } 10y - 1 < \lfloor 10y \rfloor \leq 10y \end{cases} \end{aligned}$$

et par somme :

$$-1 < [10y] - 10[y] < 10.$$

Comme les inégalités sont strictes et que le résultat est entier, on en déduit donc, en prenant $y = 10^n x$ que pour tout $n \geq 1$, $a_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$.

2. Pour tout $n \geq 1$, on pose $x_n = \sum_{k=1}^n a_k 10^{-k}$ la n -ième somme partielle.

$$x - x_n = x - \sum_{k=1}^n a_k 10^{-k} = x - \sum_{k=1}^n A_k - A_{k-1} = x - A_n + A_0 = x - A_n$$

Or $|10^n(x - A_n)| = |10^n x - [10^n x]| = 10^n x - [10^n x] < 1$.

Donc

$$\forall n \geq 1, \quad |x - x_n| < 10^{-n}.$$

Donc la série converge vers x .

3. Si, par l'absurde, la suite (a_n) était stationnaire à 9 à partir d'un certain rang n_0 , alors pour tout $n \geq n_0$,

$$x_n - x_{n_0} = 9 \sum_{k=n_0+1}^n 10^{-k} = 10^{-n_0} - 10^{-n}$$

Si $n \rightarrow +\infty$, alors on obtient $x - x_0 = 10^{-n_0}$.

Or au point 2. nous avons montré que

$$x - x_{n_0} < 10^{-n_0}.$$

C'est une inégalité stricte : impossible.

Donc la suite n'est pas stationnaire à 9. ■

Corollaire 9.2

Tout nombre $x \in \mathbf{R}_+$ admet un développement décimal unique avec la suite définie comme au théorème précédent et en ajoutant $a_0 = [x]$.

si $x \in \mathbf{R}_-$, on prend le développement de $-x$ et on remplace a_0 par $-a_0$.

Propriété 9.3 (Développement des rationnels - Hors programme.)

Un nombre est rationnel si, et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.

Preuve

sens direct : (sans formalisme)

Par définition, un nombre rationnel s'écrit sous la forme $\frac{p}{q}$.

Donc si on effectue la division euclidienne « infinie » de p , par q , on obtient une suite de décimales et des restes successifs à chaque fois compris entre 0 et $q - 1$.

Il y a donc un nombre fini de restes possibles et on doit donc nécessairement avoir deux fois un même reste dans le développement décimal infini.

Alors, les décimales entre ces deux occurrences se retrouveront exactement après la deuxième, puis on retrouvera le même reste...

sens réciproque :

En oubliant les premières décimales (quitte à multiplier par 10^n) et à enlever la partie entière, on obtient un nombre du type $x = 0, b_1 \dots b_p b_1 b_2 \dots$

Alors $10^p x = N + x$.

Donc

$$x = \frac{N}{10^p - 1} \in \mathbf{Q}.$$

■

10 LE PROBLÈME DE LA SEMI-CONVERGENCE

Nous allons voir à travers un exemple, une difficulté liée à la semi-convergence.

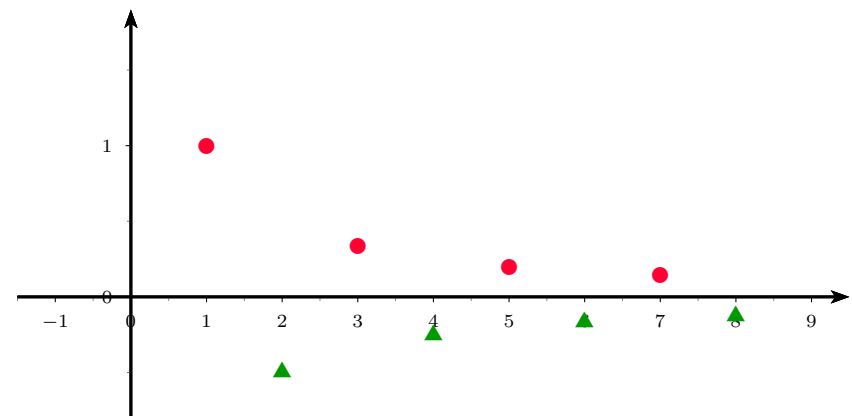
Ce problème justifiera toutes les précautions que nous prendrons au moment des familles sommables.

Nous allons nous intéresser à la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Par application du critère spécial des séries alternées, cette série converge. Par contre, la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge (cela a déjà été vu de nombreuses fois, par exemple avec comparaison série-intégrale).

La série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est donc **semi-convergente**.

On a un effet de compensation entre les termes positifs et négatifs dans la somme. Représentons donc les termes que l'on somme :



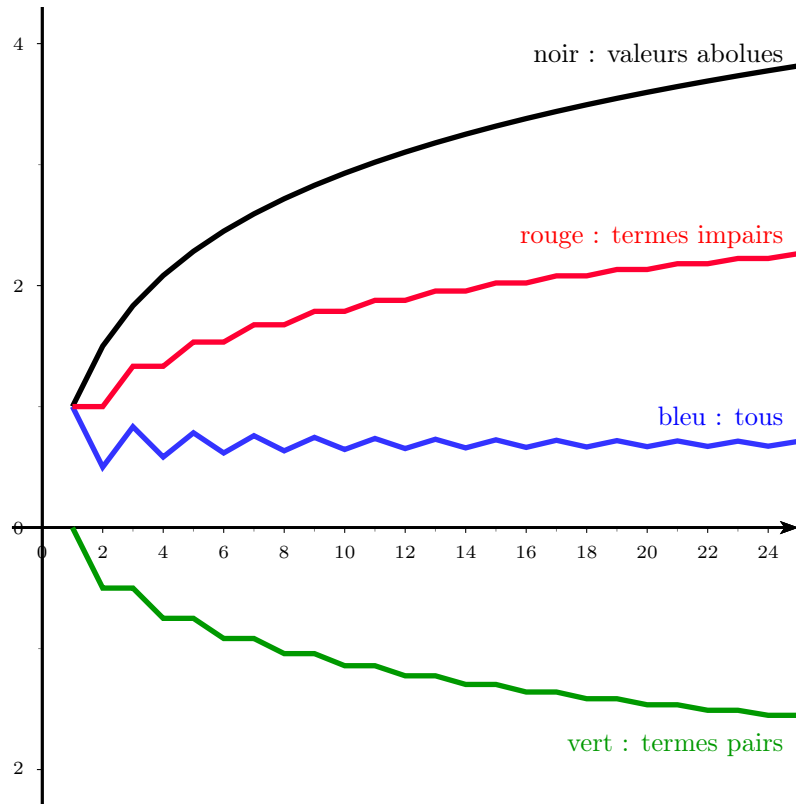
échelle double pour les ordonnées par rapport aux abscisses.

Les termes positifs (d'indice impair), sont représentés par des ronds rouges, et les termes négatifs par des triangles verts.

Faisons à présent quatre sommes que l'on représente dans le graphique ci-dessous :

- (bleu) la somme complète (ronds rouges & triangles verts) qui converge ;

- (noir) la somme des valeurs absolues qui diverge ;
- (rouge) la somme des termes d'indices impairs (ronds rouges), dont on pressent qu'elle diverge ;
- (vert) la somme des termes d'indices pairs (triangles verts), dont on pressent aussi qu'elle diverge.



échelle quadruple pour les ordonnées par rapport aux abscisses.

On voit bien que la série harmonique alternée (courbe bleue) est semi-convergente avec un phénomène d'oscillation qui traduit la preuve du critère spécial des séries alternées (deux suites adjacentes).

La série des valeurs absolues $\sum \frac{1}{k}$ diverge avec l'allure d'un logarithme (noir). On a vu en effet que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Les deux autres séries, pour lesquelles on ne prend que les termes pairs, ou les termes impairs en oubliant les autres, semblent aussi diverger avec une allure logarithmique (la moitié de la somme harmonique). C'est ce que nous allons démontrer.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

Somme des termes d'indices pairs (courbe verte)

$$P_{2n} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{-1}{2k} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \ln(n).$$

On voit que $P_{2n+1} = P_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \ln(n)$ ce qui donne finalement

$$P_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \ln(n/2) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \ln(n).$$

On retrouve bien la conjecture faite avec les courbes.

Somme des termes d'indices impairs (courbe rouge)

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k+2} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} H_{n+1} \\ &= H_{2n+2} - \frac{1}{2} H_{n+1} \\ &= \ln(2n+1) - \frac{1}{2} \ln(n) + O(1) \\ &= \frac{1}{2} \ln(n) + O(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln(n). \end{aligned}$$

On en déduit comme pour les termes pairs que

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln(n).$$

Interprétation : Les sommes des indices pairs et des indices impairs divergent toutes les deux, ce qui empêche la convergence absolue (les effets divergents se cumulent). Par contre, les deux divergences se font à même vitesse, et par effet de compensation, l'écart entre les deux converge. Pour montrer cela rigoureusement, il suffit de pousser un peu plus loin les développements :

Effet de compensation :

$$P_{2n} = -\frac{1}{2} \ln(n) - \frac{1}{2} \gamma + o(1) \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \ln(2n+1) + \gamma - \frac{1}{2} \ln(n) - \frac{1}{2} \gamma + o(1).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= P_{2n} + I_{2n+1} \\ &= -\frac{1}{2} \ln(n) - \frac{1}{2} \gamma + \ln(2n+1) + \gamma - \frac{1}{2} \ln(n) - \frac{1}{2} \gamma + o(1) \\ &= \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) + o(1) \sim \ln(2). \end{aligned}$$

On obtient ainsi la convergence de la série harmonique alternée et même la valeur de sa somme.

Mais que se passe-t-il si on somme les termes dans le désordre ?

La somme est commutative sur \mathbf{R} ou \mathbf{C} , mais l'est-elle encore lorsque l'on passe à la limite ?

L'important est de sommer tous les termes une et une seule fois, mais on peut les sommer dans un autre ordre et voir ce que cela représente.

Par exemple, on peut à chaque fois, prendre deux termes d'indices pairs et un terme d'indice impair de la façon suivante :

$$2, 4, 1, 6, 8, 3, 10, 12, 5, \dots$$

Cette façon de sommer permet bien d'obtenir exactement tous les termes comme précédemment, mais en mettant un peu plus tôt les termes pairs.

Formellement, on établit une bijection $\sigma : \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{N}^*$ avec

$$\forall n \geq 1, \sigma(3n-2) = 4n-2, \sigma(3n-1) = 4n, \sigma(3n) = 2n-1.$$

En réalisant la somme, par exemple à l'aide des développements asymptotiques vus plus haut, on obtient que la série converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\sigma(k)}}{\sigma(k)} = \frac{1}{2} \ln(2).$$

(voir exercice de TD).

Par un simple changement d'ordre, on a divisé la somme par 2 !

On se retrouve alors en prise aux mêmes paradoxes de l'infini que ceux d'Achille et de la tortue : on somme les mêmes termes, mais on obtient un résultat différent.

Dans le fond, cela ne devrait pas beaucoup nous étonner et nous rappelle le problème des immeubles de Hilbert :

On dispose d'un immeuble avec une infinité de chambres numérotées par les entiers naturels : 0, 1, 2, ...

C'est la saison haute et l'immeuble est plein, mais un nouveau voyageur se présente à l'hôtel. Le maître d'hôtel lui indique donc qu'il ne peut l'accueillir car son hôtel est complet, mais le voyageur lui propose une petite combine :

Que chaque occupant de l'hôtel se déplace d'une chambre $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2, \dots, n \rightarrow n+1, \dots$. Ainsi chaque personne obtient bien une chambre qui a été libérée par son occupant précédent, la chambre 0 est libérée⁵ et peut accueillir le nouveau venu. Pire encore, si l'immeuble d'à côté qui était sur le même modèle et lui-même plein n'a plus d'eau chaude, alors tous ses occupants voudront passer à l'hôtel voisin.

Le maître d'hôtel oppose un refus catégorique. Il n'a déjà pas très bien compris comment le voyageur précédent a réussi à trouver une chambre vide, et s'inquiète des contrôles du fisc, mais de là à doubler le nombre de personnes sans en mettre deux par chambre, non !

Cependant, le voyageur en question passe par là, et propose une nouvelle combine.

Que chaque personne de l'immeuble passe dans la chambre avec le double de son numéro : $n \rightarrow 2n$ (ce qui lui permet au passage de garder sa chambre sans bouger).

Alors toutes les chambres d'indice impair seront libérées.

À présent, il demande à chaque nouveau venu son ancien numéro de chambre n et l'affecte alors à la chambre $2n+1$ qui est libre.

L'hôtel est à nouveau rempli, chacun a sa chambre.

Conclusion ? En voyant cela, le plus étrange n'est donc pas que la valeur de la somme harmonique alternée puisse changer quand on déplace chacun de ses termes de chambre (avec σ), mais que, quand une série est absolument convergente, toute réorganisation des termes conserve la valeur de la somme. On dit que la série est **commutatiquement convergente**.

Des cas encore plus extrêmes ?

On a réussi à faire converger la série harmonique (en changeant l'ordre) vers $\frac{1}{2} \ln(2)$ au lieu de $\ln(2)$ comme on l'avait précédemment.

Peut-on s'amuser à essayer de la faire converger vers une autre valeur $\ell \in \mathbf{R}$ (quelconque), voir diverger vers $+\infty$ ou $-\infty$?

Rien de plus simple en pratique :

Par exemple pour $\ell = 0$, on commence par le premier terme 1 et on rajoute ensuite les termes d'indice pair, par ordre d'indice croissant jusqu'à ce que la somme repasse sous ℓ (on sait que ça arrivera car la série des termes pairs diverge vers $+\infty$), puis on place ensuite les termes impairs toujours en commençant par l'indice le plus petit non encore utilisé pour revenir au dessus la valeur de ℓ , et on continue avec les termes positifs...

⁵ Ceci n'est qu'un exercice de pensée et il est tout à fait irréaliste. On peut douter de la possibilité d'avoir un hôtel avec une infinité de chambre, encore plus d'avoir une infinité d'occupants, mais par dessus tout, il est strictement impossible que parmi tous ces occupants, il n'y ait pas au moins un râleur qui refuse de changer de chambre !

Pour $\ell = 0$, on obtient

$$\begin{array}{ll} a_0 = 1 & S_0 \approx 1.0 \\ a_1 = -1/2 & S_1 \approx 0.5 \\ a_2 = -1/4 & S_2 \approx 0.25 \\ a_3 = -1/6 & S_3 \approx 0.083 \\ a_4 = -1/8 & S_4 \approx -0.042 \\ a_5 = 1/3 & S_5 \approx 0.292 \\ a_6 = -1/10 & S_6 \approx 0.192 \\ a_7 = -1/12 & S_7 \approx 0.108 \\ a_8 = -1/14 & S_8 \approx 0.037 \\ a_9 = -1/16 & S_9 \approx -0.026 \\ a_{10} = 1/5 & S_{10} \approx 0.174 \\ a_{11} = -1/18 & S_{11} \approx 0.119 \\ a_{12} = -1/20 & S_{12} \approx 0.069 \\ & \vdots \end{array}$$

De cette façon, on place un à un tous les termes de la somme et comme ils tendent vers 0 en valeur absolue, alors on « sent » que la somme oscille avec des variations de plus en plus faibles autour de 0 et finalement converge vers cette valeur.

On peut faire de même pour $+\infty$ ou $-\infty$, l'algorithme est simple à écrire mais la formalisation est un peu lourde.

Avant de partir, posons nous une dernière question :

L'exemple de la série harmonique est-il généralisable ?

OUI.

En effet, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut noter $a_n = a_n^+ - a_n^-$ avec a_n^+ la partie positive et a_n^- la partie négative.

Si la série est seulement semi-convergente, supposons par l'absurde que la série des termes positif $\sum a_n^+$ converge.

Dans ce cas $\sum a_n^-$ converge aussi (car $a_n^- = a_n^+ - a_n$ et on obtient la somme de deux séries convergentes).

Donc la série $\sum a_n^+ + a_n^-$ converge aussi, et on reconnaît la série $\sum |a_n|$, ce qui est absurde (la série est supposée ne pas être absolument convergente).

On voit donc que nécessairement $\sum a_n^+$ et $\sum a_n^-$ sont divergentes ce qui permet de reprendre tout ce qui a été fait avec la série harmonique alternée.

11 FAMILLES SOMMABLES À TERMES POSITIFS

Les familles sommables généralisent les séries mais avec un ensemble d'indices autre que \mathbf{N} , ou pour des suites dépendant de plusieurs indices.

Ces ensembles d'indices peuvent être $I = \mathbf{Z}$, $I = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ pour des sommes à deux indices, ou même $I = \mathbf{Q}$. Cela amène deux remarques :

- La somme est « discrète » : ce n'est pas une intégrale. Ainsi, l'ensemble d'indices constitue un ensemble infini, mais que l'on peut

énumérer à l'instar des entiers naturels. On dit que l'ensemble est dénombrable. Par exemple, la théorie des familles sommables n'est pas valable pour \mathbf{R} qui n'est pas dénombrable : intuitivement, il contient « trop » d'éléments. Dans ce cas, on fait appel à l'intégrale.

En effet, vous verrez en deuxième année qu'une famille ne peut être sommable qu'à condition que son support soit dénombrable.

L'intégrale de Lebesgue permet de rapprocher la notion d'intégrale et celle de somme discrète, mais ce n'est pas au programme.

- En général, l'ensemble d'indices ne contient pas de relation d'ordre totale naturelle.

Ainsi, contrairement au cas des séries que nous avons vu précédemment, l'ordre de sommation ne doit pas avoir d'importance sur le résultat et on vient de voir que cela exige l'absolue convergence.

A Dénombrabilité

Une présentation plus approfondie de la dénombrabilité est proposée en annexe.

On reste ici sur l'idée intuitive pour ne pas alourdir notre propos.

Explications

Un ensemble **dénombrable** est un ensemble infini, dont on peut « numéroter » les éléments sous la forme d'une suite $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ indicée par \mathbf{N} ou éventuellement⁶ par $\mathbf{Z} : \dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \dots$.

Il existe des ensembles infinis non dénombrables. Intuitivement, ces ensembles non dénombrables ont « beaucoup plus d'éléments » que les ensembles dénombrables : ils sont trop touffus pour que l'on puisse compter les éléments un à un. Par exemple, \mathbf{R} est un ensemble non dénombrable.

Propriété 11.1 (Ensembles de référence)

1. Un ensemble fini n'est pas dénombrable.
2. \mathbf{N} et tous ses sous-ensembles infinis sont dénombrables.
3. \mathbf{Z} et \mathbf{Q} sont dénombrables.
4. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, \mathbf{N}^k , \mathbf{Z}^k , \mathbf{Q}^k (et leurs parties infinies) sont dénombrables.

B Demi-droite positive achevée :

On travaille dans un premier temps avec des termes *tous* positifs, et il est donc plus confortable de ne pas mettre à part le cas où la somme tend vers $+\infty$.

On dit alors que la somme *est égale* à $+\infty$.

Cela demande de compléter $[0, +\infty[$ avec un nouveau nombre : $+\infty$.

⁶ \mathbf{Z} est lui-même dénombrable : on peut numéroter ses éléments par les entiers naturels. On comprend donc que par transitivité, tout ensemble « numérotable » par \mathbf{Z} l'est aussi par \mathbf{N} .

Définition 11.2 (*demi-droite positive achevée*)

On note $[0, +\infty]$, l'ensemble $[0, +\infty[$ auquel est ajouté l'élément $+\infty$.
Il est muni d'une relation d'ordre totale naturelle qui étend celle sur $[0, +\infty[$ par :
 $\forall (x, y) \in [0, +\infty]^2$,

$$x \leq y \iff \begin{cases} \text{si} & (x, y) \in [0, +\infty]^2 \text{ et } x \leq y, \\ \text{ou} & y = +\infty. \end{cases}$$

En d'autres termes, $+\infty$ est le maximum de $[0, +\infty]$.

Propriété 11.3

Toute partie non vide de $[0, +\infty]$ admet une borne supérieure dans $[0, +\infty]$.

Explications

Ici, plus besoin d'exiger que l'ensemble soit majoré : dans le cas non majoré, on prend $\sup(A) = +\infty$. C'est déjà ce que l'on faisait naturellement.

C Séries à termes positifs

Pour parler de familles sommables, il faut donc que l'ordre n'intervienne plus.
Avant de traiter le cas général, on peut s'intéresser à celui des séries et chercher une définition de la convergence et de la limite pour lesquelles l'ordre n'intervient pas.
Bien sûr, cela nécessite de travailler avec des séries à termes positifs ou d'étudier l'absolue convergence pour éviter les problèmes de changement de nature ou de limite en fonction de l'ordre de sommation pour les séries semi-convergentes.

La clef, se trouve être le **théorème de la limite monotone** : la limite est une borne supérieure.

La borne supérieure ne dépend d'aucun ordre, mais considère simplement l'ensemble de toutes les valeurs possibles et en trouve le plus petit majorant. Cette nouvelle définition (équivalente à la précédente) permet de généraliser la somme des séries aux familles sommables.

Théorème 11.4

Toute série à termes *tous* positifs admet une limite dans $[0, +\infty]$.

On note cette limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k &= \sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_{k=0}^n u_k \\ &= \sup_J \sum_{k \in J} u_k, \end{aligned}$$

où J parcourt l'ensemble des parties finies de \mathbf{N} .

La série converge si, et seulement si la suite des sommes partielles est majorée, c'est-à-dire si la somme est finie.

Preuve

La série étant à termes positifs, donc la suite des sommes partielles est croissante, et elle admet donc une limite dans $[0, +\infty]$ qui est sa borne supérieure d'après le théorème de la limite monotone.

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_{k=0}^n u_k.$$

De plus, pour toute partie finie $J \subset \mathbf{N}$, on note $N = \max J$, alors, par positivité de la suite,

$$\sum_{k \in J} u_k \leq \sum_{k=0}^N u_k \leq \sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Ainsi on obtient

$$\sup_J \sum_{k \in J} u_k \leq \sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Pour $J_n = \llbracket 1, n \rrbracket$, on sait par définition que $\sum_{k \in J_n} u_k \leq \sup_J \sum_{k \in J} u_k$, or on vient de voir

$$\text{que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \in J_n} u_k = \sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_{k=0}^n u_k.$$

On obtient donc par passage à la limite (qui existe) :

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_{k=0}^n u_k \leq \sup_J \sum_{k \in J} u_k.$$

Ainsi par double inégalité on trouve bien :

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_{k=0}^n u_k = \sup_J \sum_{k \in J} u_k.$$

Corollaire 11.5 (Convergence commutative)

Pour toute permutation σ de \mathbf{N} et $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite à termes positifs.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

En d'autres termes :

la valeur de la somme ne dépend pas de l'ordre de sommation.

Preuve

Heureusement ! Cela découle simplement de l'expression donnée au théorème précédent à partir de la borne supérieure sur les parties finies de \mathbf{N} où l'ordre n'intervient pas.

Formellement on peut rédiger ainsi :

Soit σ une permutation de \mathbf{N} , on note \mathcal{F} l'ensemble des parties finies de \mathbf{N} .

Pour tout $J \in \mathcal{F}$, $\sum_{k \in J} u_{\sigma(k)} = \sum_{k \in \sigma(J)} u_k$. Or $\sigma(J) \in \mathcal{F}$, donc

$$\sum_{k \in J} u_{\sigma(k)} \leq \sup_{i \in J} u_i.$$

En appliquant le même résultat à u_σ avec la permutation σ^{-1} , on trouve $\sum_{k \in J} u_k \leq \sup_{i \in J} u_{\sigma(i)}$, donc par double inégalité, on a le résultat cherché. ■

D Sommes finies à termes positifs

Le résultat précédent sur les séries à termes positifs s'applique également aux sommes finies.

En effet, toute somme finie peut s'interpréter à l'aide des séries en complétant le terme général par la valeur nulle.

Par exemple, si $n \in \mathbf{N}$ et $I = \llbracket 1, n \rrbracket$.

On considère une suite finie $(u_i)_{i \in I}$ à termes positifs.

On peut alors compléter I avec $I' = I \cup \{n+1, n+2, \dots\} = \mathbf{N}^*$. en posant pour tout $i \geq n+1$, $u_i = 0$.

Alors $\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i \in \mathbf{N}} u_i$, la seconde somme ayant été définie avec le formalisme des séries à termes positifs comme plus haut.

E Familles sommables à termes positifs

On généralise simplement la définition.

Définition 11.6 (Somme d'une famille)

Soit I un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$ indicée par I .

La somme de la famille est définie par

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup_J \left(\sum_{i \in J} u_i \right)$$

où J décrit l'ensemble des parties finies de I .

Cette somme est finie ou *infinie*.

Lorsque la somme est **finie**, on dit que la famille est **sommable**.

⚠ Les termes de la famille sont tous positifs (voir infinis).

Exemple (Croissance)

Soit I un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs.

On note \mathcal{F} l'ensemble des parties finies de I muni de la relation d'ordre d'inclusion.

Montrer que $\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{F}, \subset) \rightarrow (\mathbf{R}, \leq) \\ J \mapsto \sum_{i \in J} u_j \end{array} \right.$ est croissante

Solution :

Soient F_1 et F_2 deux parties finies de I telles que $F_1 \subset F_2$.

$$\text{alors } \sum_{i \in F_2} u_i = \sum_{i \in F_1} u_i + \sum_{i \in F_2 \setminus F_1} u_i.$$

Or les termes sont positifs, donc $\sum_{i \in F_2 \setminus F_1} u_i \geq 0$, ce qui donne

$$\sum_{i \in F_1} u_i \leq \sum_{i \in F_2} u_i.$$

Propriété 11.7

Si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de termes positifs, alors pour tout σ permutation de I ,

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_{\sigma(i)}.$$

Preuve

C'est la même preuve que pour les séries faite un peu plus haut. ■

Propriété 11.8

Pour une famille de réels positifs, le changement d'un nombre fini de termes ne modifie pas sa nature.

Remarque : ici, on interdit la valeur infinie aux éléments de la famille.

Preuve

En exercice. ■

Termes tous positifs ou presque tous ?

Pour les séries, nous avons défini que les séries à termes positifs sont les séries dont tous les termes sont positifs à partir d'un certain rang.

En effet, les théorèmes de convergence et de divergence s'appliquent de la même façon aux séries à termes *tous* positifs et aux séries à termes *presque tous* positifs car la modification d'un nombre fini de termes ne change pas la nature de la série ; seules les inégalités sur les sommes s'en trouvent altérées.

De la même façon, on peut définir une famille à terme positif, comme une famille dont *presque tous* les termes sont positifs, c'est-à-dire que seul un nombre fini de termes ne l'est pas. *Par contre, les termes non positifs doivent néanmoins être finis.* Tous les théorèmes de sommabilité s'appliquent à ces familles à termes *presque tous* positifs de la même façon qu'ils s'appliquent aux familles à termes *tous* positifs.

Dans un souci de simplification, les énoncés qui suivent se mentionneront que les familles à termes *tous* positifs, mais chacun pourra étendre ces énoncés à l'aide de cette remarque.

Propriété 11.9

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable à termes positifs.

Si $(a_i)_{i \in I}$ possède une sous-famille qui n'est pas sommable, alors $(a_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable.

Remarque : La réciproque est évidemment vraie en prenant la sous famille égale à la famille elle-même.

Preuve

S'il existe une sous-famille non sommable, alors on peut trouver une suite de sous-familles finies de celle-ci dont les sommes correspondantes divergent.

Or, ces sous-familles finies sont aussi des sous-familles de I , ce qui justifie la non-sommabilité de $(a_i)_{i \in I}$. ■

Méthode

Pour montrer qu'une famille n'est **pas** sommable, il suffit de trouver une suite de familles finies J_n de I telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j \in J_n} u_j = +\infty$.

Exemple

Étudier successivement la sommabilité de

1. la famille $(\frac{1}{x})_{x \in \mathbf{Q} \cap [1, +\infty[}$
2. la famille $(\frac{1}{x^2})_{x \in \mathbf{Q} \cap]0, 1]}$
3. la famille $(\frac{1}{x^2})_{x \in \mathbf{Q} \cap [1, +\infty[}$

Solution :

1. On veut montrer que la première famille n'est pas sommable.

Pour cela, il suffit de trouver une suite de parties finies $J_n \in \mathbf{Q}$ telles que les sommes $\sum_{x \in J_n} \frac{1}{x}$ soient non bornées.

Ici, comme $\mathbf{N}^* \subset \mathbf{Q} \cap [1, +\infty[$ et que la série harmonique diverge, alors on pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $J_n = \llbracket 1, n \rrbracket$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$ donc la famille $(\frac{1}{x})_{x \in \mathbf{Q} \cap \mathbf{R}_+^*}$ n'est pas sommable.

2. On considère le sous-ensemble d'indices $F = \{\frac{1}{k}, k \geq 1\}$.

Alors $\sum_{k \in F} \frac{1}{x^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 = +\infty$, donc la famille n'est pas sommable.

3. Il existe une infinité de nombres rationnels dans l'intervalle $[1, 2]$.

Ainsi, on peut trouver une suite d'ensembles finis $J_n \subset \mathbf{Q} \cap [1, 2]$ tels que $\forall n \geq 1$, $\text{Card}(J_n) = n$.

$$\sum_{x \in J_n} \frac{1}{x^2} \geq \sum_{x \in J_n} \frac{1}{2^2} = \frac{n}{4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc la famille n'est pas sommable.

Propriété 11.10 (Linéarité et croissance)

Soit I un ensemble dénombrable.

Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles à termes positifs.

- $\forall (\lambda, \mu) \in (\mathbf{R}_+)^2$, $\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i$.

En particulier, si $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ sont sommables alors $(\lambda a_i + \mu b_i)_{i \in I}$ l'est aussi.

- Si $\forall i \in I$, $a_i \leq b_i$, alors $\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$.

En particulier, si $(b_i)_{i \in I}$ est sommable alors $(a_i)_{i \in I}$ l'est également, et si $(a_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable alors $(b_i)_{i \in I}$ ne l'est pas non plus.

Preuve

- Pour toute partie finie J de I ,

$$\sum_{i \in J} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in J} a_i + \mu \sum_{i \in J} b_i \leq \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i.$$

Donc, si les deux familles sont sommables, alors la famille obtenue par combinaison linéaire est sommable.

On peut obtenir l'inégalité dans l'autre sens. Pour deux parties finies J et J' , on trouve la chaîne d'inégalités :

$$\lambda \sum_{i \in J'} a_i + \mu \sum_{i \in J} b_i \leq \lambda \sum_{i \in J \cup J'} a_i + \mu \sum_{i \in J \cup J'} b_i \leq \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i.$$

Le membre de droite est donc un majorant indépendant de J ce qui permet de passer à la borne supérieure sur J finie :

$$\lambda \sum_{i \in J'} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i \leq \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i.$$

Cette fois-ci, on passe à la borne sur J' (majorant indépendant de J') ce qui donne

$$\lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i \leq \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i.$$

La double inégalité donne le résultat cherché.

- Pour toute partie finie $J \subset I$, on a $\sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in J} b_i \leq \sum_{i \in I} b_i$.

Donc par définition de la borne supérieure (plus petit des majorants) :

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i.$$

■

Exercice

On peut généraliser au cas où les familles ne sont pas indicées par les mêmes familles d'indices :

Si $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I'}$ sont deux familles à termes positifs, et si pour tout $i \in I' \setminus I$, on pose $a_i = 0$ et pour tout $i \in I \setminus I'$ on pose $b_i = 0$, alors pour tout λ, μ réels positifs,

$$\sum_{i \in I \cup I'} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i.$$

Théorème 11.11 (Somme par paquets)

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable de réels positifs.

Soit $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un recouvrement disjoint de I .

La famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si

- $\forall n \in \mathbf{N}$, $(a_i)_{i \in I_n}$ est sommable,
- et $\sum_{n \geq 0} \sum_{i \in I_n} a_i$ converge.

Dans tous les cas

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{n \geq 0} \sum_{i \in I_n} a_i.$$

Explications

Cela veut dire qu'une famille qui est sommable, l'est suivant n'importe quel « chemin ». Réciproquement, pour montrer qu'une famille n'est pas sommable, il suffit de trouver un ordre de sommation qui fait diverger pour conclure.

Preuve

Admis.

Pour les curieux :

(\Leftarrow) On suppose que $\forall n \in \mathbf{N}$, $(a_i)_{i \in I_n}$ est sommable et $\sum_{n \in \mathbf{N}} \sum_{i \in I_n} a_i$ converge.

Soit J une partie finie de I . On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $J_n = J \cap I_n$, on obtient alors un nombre fini de J_n non vides (et finies) et on peut écrire

$$\sum_{i \in J} a_i = \sum_{n \in \mathbf{N}} \sum_{i \in J_n} a_i.$$

Ici, la somme est finie bien qu'elle soit indicée par $n \in \mathbf{N}$.

Or, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{i \in J_n} a_i \leq \sum_{i \in I_n} a_i$, donc

$$\sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{n \in \mathbf{N}} \sum_{i \in I_n} a_i.$$

Ceci prouve bien que la famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable.

(\Rightarrow) On suppose à présent que la famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable, alors toute sous famille $(a_i)_{i \in I_n}$ est aussi sommable.

Montrons à présent que la série indicée par n : $\sum_{n \in \mathbf{N}} \sum_{i \in I_n} a_i$ converge.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut poser J_n une partie finie de I_n telle que

$$\sum_{i \in I_n} a_i \leq \sum_{i \in J_n} a_i + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

$\forall N \in \mathbf{N}$

$$\sum_{n=0}^N \sum_{i \in I_n} a_i \leq \sum_{n=0}^N \left(\sum_{i \in J_n} a_i + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) = \sum_{i \in \bigcup_{n=0}^N J_n} a_i + \varepsilon \leq \sum_{i \in I} a_i + \varepsilon.$$

Donc la suite des sommes partielles est majorée (et croissante), donc elle converge.

On obtient alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i + \varepsilon.$$

D'après l'autre inégalité montrée plus haut, on a finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} a_i = \sum_{i \in I} a_i.$$

■

Remarque : Ici, on a indicé les ensembles (I_n) par les entiers naturels, mais il peut arriver qu'ils soient plus facilement indicés par d'autres ensembles au plus dénombrables comme \mathbf{Q} par exemple, c'est ce qui donnera le théorème de Fubini.

Si la famille est finie, il suffit de la compléter par des ensembles vides pour obtenir une famille dénombrable.

Exemple

Étudier la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{(a+b)^3}\right)_{(a,b) \in (\mathbf{N}^*)^2}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbf{R}$ pour que

$\left(\frac{1}{(a+b)^\alpha}\right)_{(a,b) \in (\mathbf{N}^*)^2}$ soit sommable.

Solution :

Méthode à retenir avec les produits de Cauchy.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $C_n = \{(a, b) \in (\mathbf{N}^*)^2, a + b = n\}$. $(C_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ forme un recouvrement disjoint de $(\mathbf{N}^*)^2$.

On peut donc écrire :

$$\sum_{(a,b) \in (\mathbf{N}^*)^2} \frac{1}{(a+b)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(a,b) \in C_n} \frac{1}{(a+b)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(a,b) \in C_n} \frac{1}{n^3}.$$

Or $\text{Card}(C_n) = n - 1$ car pour chaque $a \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, il existe un unique $b \geq 1$ tel que $a + b = n$ et pour $a \geq n$, il n'existe aucun couple qui convienne.

Ainsi $\sum_{(a,b) \in C_n} \frac{1}{n^3} = \frac{n-1}{n^3} \sim \frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente.

Donc la famille $\left(\frac{1}{(a+b)^3}\right)_{(a,b) \in (\mathbf{N}^*)^2}$ est sommable.

Plus généralement, on voit que $\sum_{(a,b) \in C_n} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ est sommable si, et seulement si

$\alpha - 1 > 1$ (comparaison aux séries de Riemann) c'est-à-dire $\alpha > 2$.

Exemple

À l'aide d'une comparaison simple, montrer que la famille $\left(\frac{1}{a^2 + b^2}\right)_{(a,b) \in (\mathbf{N}^*)^2}$

n'est pas sommable.

Un exercice du TD proposera une autre approche.

Solution :

Ici, les produits de Cauchy ne sont pas faciles à exhiber.

Par contre, on sait que $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$, donc $\frac{1}{a^2 + b^2} \geq \frac{1}{(a+b)^2}$.

D'après l'exemple précédent, on voit que la famille n'est pas sommable.

Théorème 11.12 (Théorème de Fubini : Famille produit)

Soit I et J des ensembles dénombrables d'indices.

Si $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ sont deux familles positives, alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

En particulier si les deux familles sont sommables, alors la famille produit est aussi sommable. Plus généralement : si I_1, I_2, \dots, I_n sont des ensembles dénombrables d'indices.

et si $(a_i^{(1)})_{i \in I_1}, (a_i^{(2)})_{i \in I_2}, \dots, (a_i^{(n)})_{i \in I_n}$ sont des familles positives, alors

$$\sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \prod_{k=1}^n I_k} \prod_{k=1}^n a_{i_k}^{(k)} = \prod_{k=1}^n \left(\sum_{i \in I_k} a_i^{(k)} \right).$$

Preuve

Pour deux familles, c'est un cas particulier de la sommation par paquets avec la famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ où la partition est indiquée par J .

Par récurrence sur le nombre de familles. ■

12 FAMILLE SOMMABLES DE NOMBRES COMPLEXES**Définition 12.1** (Famille sommable)

Soit $(a_i)_I$ une famille de \mathbf{C}^I , avec I fini ou dénombrable.

La famille est dite **sommable**, si la famille $(|a_i|)_{i \in I}$ est elle-même sommable, c'est-

à-dire si $\left\{ \sum_{i \in J} |a_i|, J \subset I, J \text{ finie} \right\}$ est majorée dans \mathbf{R} .

On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles sommables indicées par I .

Théorème 12.2

Cas réel : Si une famille $(a_i)_{i \in I} \in \mathbf{R}^I$ est sommable, alors les familles à termes positifs $(a_i^+)_{i \in I}$ et $(a_i^-)_{i \in I}$ sont sommables et on définit la somme de la famille par

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in I} a_i^-.$$

Cas complexe : Si une famille $(a_i)_{i \in I} \in \mathbf{C}^I$ est sommable, alors les familles à termes réels $(\Re(a_i))_{i \in I}$ et $(\Im(a_i))_{i \in I}$ sont sommables et on définit la somme de la famille par

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} \Re(a_i) + i \sum_{i \in I} \Im(a_i).$$

On rappelle que pour un nombre réel x , les partie positive x^+ et partie négative x^- , sont définies respectivement $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = \max(-x, 0)$ de sorte que $x = x^+ - x^-$, un seul des deux étant non nul.

Preuve

On suppose la famille sommable, alors $\forall i \in I, 0 \leq a_i^+ \leq |a_i|$, donc par comparaison, la famille $(a_i^+)_{i \in I}$ est sommable.

De même pour la famille $(a_i^-)_{i \in I}$.

On remarque de plus que si (a_i) est à termes positifs, alors $\forall i \in I, a_i^+ = a_i$ et $a_i^- = 0$, ainsi, la somme définie dans ce théorème coïncide avec la somme définie pour les familles à termes positifs.

Pour une famille à termes complexes, on utilise que $0 \leq |\Re(a_i)| \leq |a_i|$, donc la famille $(\Re(a_i))$ est sommable au sens des familles à termes réels quelconques (ce que l'on vient de faire) et on peut donc définir sa somme.

De même pour la famille des parties imaginaires.

On remarque également que la définition pour une famille complexe coïncide avec le cas réel si tous les termes de la famille sont réels. ■

Remarque : La définition de la sommabilité pour une famille correspond donc bien à **l'absolue convergence** pour une série.

On remarque également que si la famille ne possède qu'un nombre fini de termes non nuls alors elle est toujours sommable.

Propriété 12.3

Si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille sommable, alors toute famille extraite est encore sommable.

Preuve

C'est simplement la reprise de de la propriété 11.9 sous forme de contraposée que l'on applique à la famille des modules. ■

Théorème 12.4

Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbf{C}^I$ une famille complexe et $(v_i)_{i \in I}$ une famille **sommable à termes positifs**.

Si $\forall i \in I, |u_i| \leq v_i$ alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.

Preuve

C'est le théorème de comparaison des familles à termes positifs. ■

- Dans le cas où les hypothèses du théorème sont vérifiées, on a alors

$$\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} v_i.$$

- Comme la remarque en a déjà été faite plus tôt, on peut alléger les hypothèses du théorème précédent et supposer que la majoration est vraie sauf sur une partie finie $F \subset I$.

Mais dans ce cas, l'inégalité triangulaire généralisée sur les sommes n'est plus vraie.

Propriété 12.5

Une famille sommable $(a_i)_{i \in I} \in \mathbf{C}^I$ converge vers sa somme :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists F \subset I, F \text{ partie finie, } \left| \sum_{i \in F} a_i - \sum_{i \in I} a_i \right| \leq \varepsilon.$$

Explications

On retrouve la généralisation de la convergence d'une série vue comme une suite de somme partielles.

En effet, si une série converge alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0, \left| \sum_{i=0}^n a_i - \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \right| \leq \varepsilon.$$

donc en particulier pour $n = n_0$, on considère $F = \llbracket 0, n_0 \rrbracket$ partie finie de \mathbf{N} et on

obtient $\left| \sum_{i \in F} a_i - \sum_{i \in \mathbf{N}} a_i \right| \leq \varepsilon$.

Preuve

On le montre dans le cas réel, la preuve se prolonge ensuite naturellement au cas complexe.

D'après la définition de la somme des familles à termes positifs : $\sum_{i \in I} a_i^+ =$

$$\sup_J \left(\sum_{i \in J} a_i^+ \right).$$

Donc par caractérisation de la borne supérieure $\forall \varepsilon > 0$, il existe une partie de I finie, notée F_+ telle que

$$0 \leq \sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in F_+} a_i^+ \leq \varepsilon.$$

De plus, comme la famille est à termes positif, pour toute famille finie F qui contient F_+ , on a $\sum_{i \in F} a_i^+ \geq \sum_{i \in F_+} a_i^+$.

et par définition de la borne supérieure, on trouve donc $\sum_{i \in I} a_i^+ \geq \sum_{i \in F} a_i^+ \geq \sum_{i \in F_+} a_i^+$,

ce qui donne finalement

$$\left| \sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in F_+} a_i^+ \right| \leq \varepsilon.$$

On fait de même pour $(a_i^-)_{i \in I}$ et on trouve une famille F_- telle que pour toute famille F contenant F_- on ait

$$\left| \sum_{i \in I} a_i^- - \sum_{i \in F_-} a_i^- \right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, on obtient, grâce à l'inégalité triangulaire que pour $F = F_+ \cup F_-$

$$\left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in F} a_i \right| \leq 2\varepsilon.$$

Quitte à remplacer ε par $\varepsilon/2$ dans les deux sommes précédentes, on obtient le résultat voulu. ■

Théorème 12.6 (Convergence commutative)

Soit I un ensemble dénombrable d'indices et $(u_k)_{k \in I}$ une famille **sommable**.

Pour toute permutation σ de I

$$\sum_{k \in I} u_{\sigma(k)} = \sum_{k \in I} u_k$$

Preuve

En utilisant le formalisme des familles sommables (et non celui des séries semi-convergentes), on a pour une famille réelle :

$$\sum_{k \in I} u_{\sigma(k)} = \sum_{k \in I} u_{\sigma(k)}^+ - \sum_{k \in I} u_{\sigma(k)}^-.$$

Or, les deux familles $(u_{\sigma(k)}^+)_{k \in I}$ et $(u_{\sigma(k)}^-)_{k \in I}$ étant des familles à termes positifs sommables, elles sont commutativement convergentes, donc

$$\sum_{k \in I} u_{\sigma(k)} = \sum_{k \in I} u_{\sigma(k)}^+ - \sum_{k \in I} u_{\sigma(k)}^- = \sum_{k \in I} u_k^+ - \sum_{k \in I} u_k^- = \sum_{k \in I} u_{\sigma(k)}.$$

■

Théorème 12.7

Les théorèmes de sommation par paquets et théorèmes de Fubini (famille produit) sont également vrais pour les familles sommables à termes complexes.

Théorème 12.8 (Produit de Cauchy pour les séries)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux séries **absolument** convergentes : c'est-à-dire sommables.

On définit alors le produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$ par $\sum c_n$ où

$$\forall n \in \mathbf{N}, c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^n a_{n-i} b_i.$$

La série $\sum c_i$ est absolument convergente (sommable) et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_i = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \right) \left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_i \right).$$

Preuve

Si les séries $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont absolument convergentes, alors les familles correspondantes sont sommables et d'après Fubini, la famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in \mathbf{N}^2}$ est aussi sommable avec

$$\sum_{(i,j) \in \mathbf{N}^2} a_i b_j = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j \right).$$

De plus pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit $I_n = \{(i, j) \in \mathbf{N}^2, i + j = n\}$ et on remarque que $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ forme une partition dénombrable de \mathbf{N}^2 , donc par le théorème de sommation par paquets, la série $\sum c_i$ est sommable et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_i = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \right) \left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_i \right).$$

■

Exemple

La fonction exponentielle complexe est un morphisme de groupes de $(\mathbf{C}, +)$ dans (\mathbf{C}^*, \times) .

Solution :

Soit $(x, y) \in \mathbf{C}^2$.

$$\begin{aligned} e^x e^y &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{(i,j) \in \mathbf{N}^2} \frac{x^i y^j}{i! j!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i+j=n} \frac{x^i y^j}{i! j!} \quad \text{produit de Cauchy} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} x^i y^{n-i} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \quad \text{binôme de Newton} \\ &= e^{x+y}. \end{aligned}$$

On voit ensuite assez simplement d'après cette équation fonctionnelle, que s'il existait $x \in \mathbf{C}$ tel que $e^x = 0$, alors $\forall y \in \mathbf{C}$, $e^{x+y} = 0$, ce qui indiquerait que la fonction est nulle sur \mathbf{C} .

13 COMPLÉMENT : GROUPER LES TERMES

Cette partie est un complément réservé aux étudiants les plus à l'aise avec les notions vues précédemment.

On s'intéresse dans un premier temps au théorème de sommation par paquets, appliqué aux séries absolument convergentes, puis on en cherche ensuite une version *faible* pour les séries semi-convergentes.

A En cas d'absolue convergence

On a vu que la sommabilité pour une série était équivalente à l'absolue convergence. On peut donc appliquer le théorème de sommation par paquets pour les séries absolument convergentes :

Propriété 13.1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

On suppose que $\sum u_n$ est absolument convergente (équivalent à $(u_n) \in \ell^1(\mathbf{N})$).

Pour tout recouvrement disjoint $(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de \mathbf{N} ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j \in J_n} u_j = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Typologie des paquets :

- On peut faire des paquets de type $I_1 = \{n \in \mathbf{N}, u_n \geq 0\}$ et $I_2 = \{n \in \mathbf{N}, u_n < 0\}$

ce qui revient à calculer deux séries à termes positifs.

C'est d'ailleurs exactement ainsi qu'a été définie la somme pour une famille sommable de réels au théorème 12.2.

- On peut aussi faire des paquets avec des termes consécutifs (paquets de 2 termes, 3 termes, n termes...) par exemple en fonction du signe ou pour gérer des effets de compensation.

Contrairement à ce qui suit avec les séries semi-convergentes, la taille des paquets n'est pas nécessairement majorée.

B En cas de semi-convergence

Remarque : ce qui suit marche aussi en cas de convergence absolue mais n'est qu'un cas particulier du théorème de sommation par paquets que l'on vient de revoir.

On s'intéressera donc plus spécifiquement aux séries semi-convergentes.

Ces propriétés servent surtout pour des exercices théoriques.

Pour la semi-convergence, l'ordre de sommation ne peut pas être modifié et le théorème de sommation par paquets n'est pas utilisable.

Cependant, cela ne nous empêche pas de grouper quelques termes.

Exemple (Série harmonique alternée)

Prenons un exemple avec la série harmonique alternée :

Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

On montre (voir l'exercice de TD) que $S_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(2)$.

À partir de là, on peut conclure que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ converge vers $\ln(2)$.

En effet, comme le **terme général tend vers 0**,

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ln(2).$$

Les suites extraites d'indices pairs (S_{2n}) et d'indices impairs (S_{2n+1}) tendent vers la même limite donc (S_n) converge vers cette limite commune : $\ln(2)$.

On peut généraliser cette idée, tant que le terme général tend vers 0 :

Soit (u_n) est une suite **de limite nulle**, on note (S_n) la suite des sommes partielles.

Si $S_{3n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $\sum u_n$ converge vers ℓ .

On obtient la propriété :

Propriété 13.2

Soit (u_n) est une suite **de limite nulle**.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Soit $p \in \mathbf{N}^*$.

$\sum u_n$ converge si, et seulement si $(S_{pn})_{n \in \mathbf{N}}$ converge

Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{pn}$.

Preuve

À faire en exercice pour voir si vous avez compris ce qui précède.

Détail de la preuve :

On sait que si une suite est convergente, alors toutes ses suites extraites le sont aussi.

Par contraposée, cela donne que si $(S_{pn})_{n \in \mathbf{N}}$ diverge, alors la suite (S_n) diverge, donc la série $\sum u_n$ diverge.

Réciproquement, si $(S_{pn})_{n \in \mathbf{N}}$ converge, alors on note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{pn}$.

Soit $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$S_{pn+k} = S_{pn} + \sum_{j=pn+1}^{pn+k} u_j = S_{pn} + \sum_{j=1}^k u_{pn+j}.$$

Or $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{pn+j} = 0$ (car la suite u est de limite nulle), donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^k u_{pn+j} = 0.$$

 on a sommé un nombre **fini fixé** de limites.

Donc par somme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{pn+k} = \ell.$$

Ainsi les suites extraites (S_{pn}) , (S_{pn+1}) , ..., (S_{pn+p-1}) sont toutes de même limite ℓ , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ell$ ce qui justifie que la série $\sum u_n$ converge vers ℓ . ■

On peut encore généraliser :

Il est important de prendre des paquets avec des termes consécutifs pour préserver l'ordre (une série semi-convergente n'étant pas commutativement convergente). Par contre, on peut s'autoriser une certaine souplesse sur la taille des « paquets ». Dans l'énoncé précédent, tous les « paquets » étaient de même taille finie p , mais on peut admettre de faire des sommes avec des tailles de paquets qui varient **tant que** la taille desdits paquets reste majorée par un nombre p fixé.

En effet, lors de la preuve, on a vu que l'argument essentiel était de faire une *somme finie* de limites nulles.

Propriété 13.3

Soit (u_n) est une suite **de limite nulle**.

Soient $p \in \mathbf{N}^*$ et $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ une fonction strictement croissante qui vérifie

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \forall n \in \mathbf{N}, \varphi(n+1) - \varphi(n) \leq p \end{cases} \quad (\text{taille des paquets uniformément bornée}).$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $c_n = \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$.

$\sum u_n$ converge si, et seulement si $\sum c_n$ converge

Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$.

Preuve

(\Rightarrow) On suppose que $\sum u_n$ converge et on note (S_n) la suite des sommes partielles. alors $(S_{\varphi(n)-1})$ est une suite extraite qui converge et on voit que $\forall n \geq 1$,

$$S_{\varphi(n)-1} = \sum_{k=0}^{\varphi(n)-1} u_k = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=\varphi(j)}^{\varphi(j+1)-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k.$$

On a donc bien que $\sum c_n$ converge.

(\Leftarrow) On suppose que $\sum c_n$ converge vers $\ell \in \mathbf{C}$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, donc

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2p}.$$

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n c_k = \ell$, donc il existe $n_1 \in \mathbf{N}$, $\forall n \geq n_1$, $\left| \sum_{k=0}^n c_k - \ell \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $k \in \mathbf{N}$, on définit $\varphi^{-1}(k) = \min(i \in \mathbf{N}, \varphi(i) > k)$, c'est-à-dire l'unique entier i tel que

$$\varphi(i-1) \leq k < \varphi(i).$$

Soit $n \geq \max(\varphi(\varphi^{-1}(n_0)), \varphi(n_1+2))$.

On note $n' = \varphi^{-1}(n)$ ce qui donne $\varphi(n'-1) \leq n \leq \varphi(n') - 1$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
 |S_n - \ell| &= \left| \sum_{k=0}^{\varphi(n')-1} u_k + \sum_{k=\varphi(n')}^n u_k - \ell \right| \\
 &\leq \left| \sum_{k=0}^{\varphi(n')-1} u_k - \ell \right| + \sum_{k=\varphi(n')}^n |u_k| \quad \text{inégalité triangulaire} \\
 &\leq \left| \sum_{k=0}^{n'-2} c_k - \ell \right| + \sum_{k=\varphi(n')}^n |u_k|
 \end{aligned}$$

Or, $n \geq \varphi(n_1 + 2)$, donc par définition de φ^{-1} :

$$\varphi(n') > n \geq \varphi(n_1 + 2)$$

et par croissance de φ , on a bien $n' > n_1 + 2$, ce qui justifie que

$$\left| \sum_{k=0}^{n'-2} c_k - \ell \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs, $n \geq \varphi(\varphi^{-1}(n_0))$, donc

$$\varphi(n') > n \geq \varphi(\varphi^{-1}(n_0)),$$

et par croissance de φ , $n' > \varphi^{-1}(n_0)$, donc $n' - 1 \geq \varphi^{-1}(n_0)$.

D'après la définition de φ^{-1} , on obtient bien : $\varphi(n' - 1) \geq n_0$.

Ainsi on trouve la deuxième inégalité

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=\varphi(n')}^n |u_k| &\leq \sum_{k=\varphi(n')}^n \frac{\varepsilon}{2p} \\
 &\leq (n - \varphi(n') + 1) \frac{\varepsilon}{2p} \\
 &\leq (\varphi(n') - \varphi(n' - 1)) \frac{\varepsilon}{2p} \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2}.
 \end{aligned}$$

En rassemblant le tout, on peut donc conclure :

$$|S_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que $\sum u_n$ converge vers ℓ . ■

Remarque : On peut encore généraliser, en ne supposant plus les paquets de taille uniformément bornée, mais en s'assurant que les paquets tendent vers 0, c'est-à-dire avec les notations précédents que $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$.

En effet, exiger que les paquets soient de taille uniformément majorée par p , permettait simplement d'avoir que $|c_n| \leq p \frac{\varepsilon}{p} = \varepsilon$ à partir d'un certain rang.

Si on suppose cela, sans utiliser des paquets de taille bornée, la preuve précédente, s'adapte sans difficultés.

Exemple

Discuter de la convergence, en fonction de α de la série $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n^\alpha}$.

Solution :

- Si $\alpha < 0$, alors la série diverge grossièrement.
- Si $\alpha > 1$, alors par comparaison à une série de Riemann, on voit que la série converge absolument, donc converge.
- Si $\alpha \in]0, 1]$, alors on peut réaliser des paquets en fonction du signe de $(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$, mais on voit bien ici que la taille des paquets sera non majorée, et il convient de vérifier que ces paquets tendent vers 0.

Les termes qui constituent un même paquet correspondent à tous les $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ qui prennent la même valeur p .

On note le paquet correspondant

$$c_p = \sum_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor = p} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n^\alpha} = \sum_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor = p} \frac{(-1)^p}{n^\alpha}.$$

Or $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = p \iff p \leq \sqrt{n} < p+1 \iff p^2 \leq n < p^2 + 2p + 1 \iff p^2 \leq n \leq p^2 + 2p$.

On en déduit que $c_p = (-1)^p \sum_{n=p^2}^{p^2+2p} \frac{1}{n^\alpha}$.

On peut réaliser une comparaison série-intégrale pour estimer $|c_p|$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ étant continue et décroissante (par $\alpha > 0$), on obtient pour $p \geq 2$,

$$\int_{p^2}^{p^2+2p+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq |c_p| \leq \int_{p^2-1}^{p^2+2p} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

– Si $\alpha = 1$, alors on obtient l'encadrement

$$\ln \left(\frac{p^2 + 2p + 1}{p^2} \right) \leq |c_p| \leq \ln \left(\frac{p^2 + 2p}{p^2 - 1} \right).$$

$$\text{Or } \ln \left(\frac{p^2 + 2p + 1}{p^2} \right) = \ln \left(1 + \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2} \right) = \frac{2}{p} + O \left(\frac{1}{p^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } \ln \left(\frac{p^2 + 2p}{p^2 - 1} \right) &= \ln \left(\frac{p^2 - 1 + 2p + 1}{p^2 - 1} \right) = \ln \left(1 + \frac{2p + 1}{p^2 - 1} \right) \\
 &= \ln \left(1 + \frac{2p + 1}{p^2 - 1} \right) \\
 &= \frac{2p + 1}{p^2 - 1} + O \left(\frac{1}{p^2} \right) \\
 &= \frac{2}{p} + O \left(\frac{1}{p^2} \right).
 \end{aligned}$$

Donc par encadrement

$$|c_p| \underset{p \rightarrow +\infty}{=} \frac{2}{p} + O \left(\frac{1}{p^2} \right).$$

Ceci justifie que $\lim_{p \rightarrow +\infty} c_p = 0$ et permet de sommer par paquets.

De plus $c_p = (-1)^p \frac{2}{p} + O \left(\frac{1}{p^2} \right)$, or $\sum \frac{(-1)^p}{p}$ est convergente (critère spécial de

séries alternées), et $\sum \frac{1}{p^2}$ est absolument convergente, donc $\sum c_p$ converge.

On a donc prouvé que

$$\sum \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n} \text{ converge.}$$

– Si $\alpha \in]0, 1[$, alors l'encadrement donne

$$\frac{1}{1-\alpha} \left((p^2 + 2p + 1)^{1-\alpha} - (p^2)^{1-\alpha} \right) \leq c_p \leq \frac{1}{1-\alpha} \left((p^2 + 2p)^{1-\alpha} - (p^2 - 1)^{1-\alpha} \right).$$

On obtient alors

$$c_p = (-1)^p \frac{2}{p^{2\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{p^{2\alpha}}\right).$$

Cela donne donc la divergence pour $\alpha \leq \frac{1}{2}$ et la convergence pour $p > \frac{1}{2}$ (détails à faire en exercice).

C Pour résumer

- Si on **sait** que la série converge absolument,
 - on peut faire des paquets de taille quelconque (voire infinie), et y mettre les termes dans n'importe quel ordre.
 - Pas besoin de faire des paquets avec des termes consécutifs.
- Si on **sait** que la série est semi-convergente,
 - on peut faire des paquets de termes *consécutifs*, en se fixant un majorant uniforme pour la taille des paquets (ou en s'assurant qu'ils tendent vers 0).
- Si on **ne sait pas** si la série converge.
 - Si on veut faire des paquets de taille arbitrairement grande, alors on commence par le faire avec $\sum |u_n|$ pour obtenir la sommabilité de la famille, puis refaire le calcul sans les modules.
 - Si, on n'a besoin que de « petits » paquets, alors, en s'assurant que le terme général tend vers 0 et en majorant uniformément la taille des paquets, la limite de la somme par paquets est égale à la limite de la série (qui converge si elle est finie).

14 ANNEXE HORS PROGRAMME : DÉNOMBRABILITÉ.

Définition 14.1 (Ensemble dénombrable)

Un ensemble E est **dénombrable** s'il peut être mis en bijection avec \mathbf{N} .
Un ensemble est **au plus dénombrable**, s'il est fini ou dénombrable.

Propriété 14.2 (Ensembles dénombrables de référence)

1. Un ensemble fini n'est pas dénombrable.
2. \mathbf{N} et tous ses sous-ensembles infinis sont dénombrables.
3. \mathbf{Z} et \mathbf{Q} sont dénombrables.

Preuve

1. Soit E un ensemble fini. Si par l'absurde, il était dénombrable, alors, on pourrait construire une bijection $\varphi : E \rightarrow \mathbf{N}$. Donc $\varphi(E)$ est une partie non vide de \mathbf{N} .
 E étant finie, $\varphi(E)$ aussi et elle contient un plus grand élément n .
Donc $n + 1 \notin \varphi(E)$. Donc φ n'est pas surjective. Absurde.
Donc E n'est pas dénombrable.
2. Si E est un sous-ensemble de \mathbf{N} infini, alors, on peut construire une bijection de $\mathbf{N} \rightarrow E$, en posant $\varphi(0) = \min E$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n + 1) = \min \{k \in E, k > \varphi(n)\}$.
Cette construction consiste simplement à énumérer les éléments de E un à un dans l'ordre du plus petit au plus grand : à chaque fois, on rajoute le plus petit élément que l'on n'a pas encore compté.
 E étant infini, φ est bien définie.
 φ est injective (strictement croissante).
Montrons par l'absurde qu'elle est surjective. Cette preuve est très simple à condition de bien la visualiser.
L'idée est donc de supposer par l'absurde qu'elle n'est pas surjective et de prendre le plus petit élément p qui n'appartient pas à son image :
 - Soit c'est le premier élément de E : impossible car on l'a utilisé pour $\varphi(0)$.
 - Sinon, l'élément qui le précède dans E peut s'écrire $k = \varphi(n)$ et par construction, p devrait être $\varphi(n + 1)$ puisque c'est le suivant.

Donc φ est surjective. Ainsi c'est une bijection entre \mathbf{N} et E : E est dénombrable.

Il en est de même pour tout sous-ensemble infini d'un ensemble dénombrable.

3. Pour \mathbf{Z} , on pose φ tel que $\varphi(n) = n/2$ si n est pair, et $\varphi(n) = -\frac{n+1}{2}$ si n est impair. On montre (exercice facile) que φ est bijective de \mathbf{N} dans \mathbf{Z} : \mathbf{Z} est dénombrable. La dénombrabilité de \mathbf{Q} s'obtient avec le théorème suivant (produit cartésien) et le fait que toute partie infinie d'un ensemble dénombrable est encore dénombrable. On montre alors qu'il existe une injection (naturelle) $\mathbf{Q} \mapsto \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ à partir de la forme irréductible de la fraction donc que \mathbf{Q} est en bijection avec une partie (infinie) de $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$, donc lui-même dénombrable. ■

Propriété 14.3 (Produit cartésien)

Si E et F sont dénombrables, alors $E \times F$ est dénombrable.

Si E est un ensemble dénombrable, alors $\forall n \in \mathbf{N}^*$, E^n est dénombrable.

Remarque : c'est faux en général pour un produit cartésien *infini*.

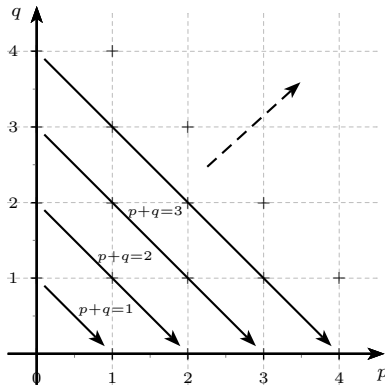
Preuve

On le montre déjà dans le cas particulier où $E = F = \mathbf{N}$.

La généralisation sera très simple ensuite.

L'idée est de compter tous les couples (p, q) du carré infini \mathbf{N}^2 . Cela suppose de définir un ordre dans lequel on les compte tous, une et une fois.

Une bonne méthode est de les compter en diagonale depuis $(0, 0)$ et en s'écartant de plus en plus.



Chaque diagonale correspond à $p + q = n = \text{cste}$ (quand on augmente de 1 la valeur de p vers la droite, on diminue de 1 celle de q vers le bas).

Et la diagonale n contient exactement $n + 1$ points (aller de $p = 0, q = n$ à $p = n$ et $q = 0$). Ainsi, pour que la numérotation d'une diagonale à l'autre se suive sans trou ni chevauchement, on commence la diagonale n par la valeur $d_n = d_{n-1} + n$.

Comme la numérotation commence à 0, on pose $d_0 = 0$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}, d_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(p+q)(p+q+1)}{2}$.

Ensuite, quand on avance sur la diagonale, on part de $p = 0$ à $p = n$: on ajoute la valeur de p pour indiquer le numéro du point sur la diagonale.

$$\frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + p$$

On définit donc l'application $\psi : \begin{cases} \mathbf{N}^2 & \rightarrow \mathbf{N} \\ (p, q) & \mapsto \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + p \end{cases}$ qui est bijective par construction. Ainsi \mathbf{N}^2 est dénombrable.

Passons au cas général de E et F dénombrables.

Il existe deux bijections $\varphi_1 : \mathbf{N} \rightarrow E$ et $\varphi_2 : \mathbf{N} \rightarrow F$.

Ainsi, l'application $\Phi : (p, q) \mapsto (\varphi_1(p), \varphi_2(q))$ est une bijection de \mathbf{N}^2 dans $E \times F$.

\mathbf{N}^2 étant dénombrable, $E \times F$ est dénombrable.

Pour E^n , on procède par récurrence. ■

Propriété 14.4

Si E contient un sous-ensemble infini non dénombrable, alors E n'est pas dénombrable.

Explications

Un ensemble n'est pas dénombrable, s'il est soit « trop petit » (c'est-à-dire fini) ou s'il est « trop gros » (on ne peut pas énumérer ses éléments un à un).

On comprend donc que si E contient un ensemble « trop gros », alors il est lui-même trop gros pour être dénombré.

Preuve

C'est la contraposée de : « si E est dénombrable, alors tout sous ensemble infini de E est dénombrable ».

On l'a démontré pour $E = \mathbf{N}$, mais par bijectivité entre E dénombrable et \mathbf{N} , la preuve

précédente peut aussi s'appliquer à tout autre ensemble dénombrable. ■

Propriété 14.5

Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Preuve

On note $(A_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une famille dénombrable d'ensembles dénombrables, et $A = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} A_i$.

Dans un premier temps, on suppose que tous les A_i sont disjoints.

Dans ce cas, pour chaque $i \in \mathbf{N}$, on considère la bijection $\varphi_i : \mathbf{N} \rightarrow A_i$.

On peut donc construire une bijection : $\varphi : \begin{cases} \mathbf{N}^2 & \rightarrow A \\ (i, j) & \mapsto \varphi_i(j) \end{cases}$.

φ est évidemment surjective par surjectivité des φ_i et elle est injective car les applications φ_i le sont et les A_i disjoints.

Donc A est en bijection avec \mathbf{N}^2 qui est dénombrable (propriété 14.3), donc A est dénombrable.

Si l'union n'est pas disjointe, alors on sait tout d'abord que A ne peut pas être fini car il contient un ensemble A_0 qui est dénombrable.

Ainsi A est au moins dénombrable.

On pose alors $B_0 = A_0$ et pour chaque $i \geq 1, B_i = A_i \setminus B_{i-1}$. On vérifie ainsi facilement par récurrence que $A = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i$ et que les B_i sont deux à deux disjoints.

Quitte à rajouter des éléments dans chaque B_i qui serait fini, on peut définir une union disjointe : $\tilde{A} = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \tilde{B}_i$ avec $\forall i \in \mathbf{N}, B_i \subset \tilde{B}_i$ et \tilde{B}_i dénombrable.

Donc $A \subset \tilde{A}$ qui est lui-même dénombrable d'après la première étude.

Donc A est au plus dénombrable (propriété 14.4), donc A est dénombrable. ■

Propriété 14.6

Tout intervalle de \mathbf{R} est non dénombrable.

En particulier, \mathbf{R} n'est pas dénombrable.

Explications

Sur \mathbf{R} , les nombres sont trop « serrés » les uns contre les autres pour que l'on puisse les dénombrer.

\mathbf{Q} peut être dénombré, mais l'ajout des irrationnels rend l'ensemble trop « touffu » pour qu'il reste dénombrable.

Ce caractère « touffu » de \mathbf{R} ne dépend pas de son étendue : même dans un petit intervalle, il y a trop de nombres pour pouvoir les isoler un à un en les dénombrant.

Preuve

On commence par montrer que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable, puis que tout intervalle contenant au moins de deux points peut être mis en bijection avec $[0, 1[$.

Cette deuxième étape revient simplement à considérer $[0, 1[$ comme un élastique que l'on comprimerait ou étirerait pour obtenir n'importe quel autre intervalle de la même forme.

Remarque : Si I ne contient pas au moins deux points distincts, alors il est fini, donc non dénombrable.

1. La non dénombrabilité de $[0, 1[$ peut être prouvée avec l'argument de la diagonale de Cantor. Le voici :

$[0, 1[$ contient tous les nombres qui s'écrivent sous forme décimale $0, x x x x \dots$ où la suite des décimales n'est pas stationnaire à 9.

Si par l'absurde $[0, 1[$ était dénombrable, alors il existerait une bijection $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$. et on pourrait écrire les nombres dans l'ordre donné par la bijection $\varphi(0), \varphi(1) \dots$

On construit alors le nombre x dont la n -ième décimale est égale à 1 la n -ième décimale de $\varphi(n)$ est différente de 1 et 2 sinon.

Ainsi $x \in [0, 1[$, montrons que $x \notin \varphi(\mathbf{N})$.

Si par l'absurde $x \in \varphi(\mathbf{N})$, alors il existerait $k \in \mathbf{N}$ tel que $x = \varphi(k)$.

En particulier, la k -ième décimale de x serait celle de $\varphi(k)$ ce qui est impossible par construction de x . Donc $x \notin \varphi(\mathbf{N})$.

Donc φ n'est pas surjective, donc non bijective : c'est absurde. $[0, 1[$ n'est pas dénombrable.

2. L'idée est de se ramener à un intervalle de la même forme que $[0, 1[$ (semi-ouvert à droite) pour construire la bijection.

Soit I un intervalle de \mathbf{R} contenant au moins 2 points $a < b$. Il contient donc $[a, b[$.

On va montrer que $[a, b[$ n'est pas dénombrable en le mettant en bijection avec $[0, 1[$.

On construit

$$f : \begin{cases} [0, 1[& \mapsto [a, b[\\ x & \mapsto (b-a)x + a \end{cases}$$

Comme $b > a$, f réalise bien une bijection de $[0, 1[$ dans $[a, b[$.

Ainsi $[a, b[$ n'est pas dénombrable.

(sinon, on composerait $\varphi : [a, b[\rightarrow \mathbf{N}$ avec f et on obtiendrait une bijection entre $[0, 1[$ et \mathbf{N} , ce qui n'est pas possible car $[0, 1[$ n'est pas bijectif).

Donc I contient un sous-ensemble infini non dénombrable.

Donc I n'est pas dénombrable. ■

Ceci permet en particulier de voir qu'au contraire de l'union, un produit cartésien dénombrable d'ensemble dénombrables, n'est en général pas dénombrable.

En effet en considérant l'écriture décimale, $[0, 1[\subset \prod_{n \in \mathbf{N}^*} [0, 9]$, ce qui prouve que l'ensemble produit n'est pas dénombrable.