Séries numériques

« Si je devais me réveiller après avoir dormi pendant mille ans, ma première question serait : l'hypothèse de Riemann a-t-elle été démontrée ? »
David Hilbert

Ce chapitre étudie certaines séries qui seront utiles pour l'étude des probabilités dénombrables. Une série est simplement une suite construite à partir d'une somme dont on ajoute les termes un à un.

Un exemple fondamental est l'étude des sommes de la forme

$$\zeta_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}.$$

Lorsque cette somme converge pour $n \to +\infty$, on note $\zeta(s)$ sa limite. La fonction $s \mapsto \zeta(s)$ est appelée la *fonction zêta de Riemann.*
Pour $s = 1$, c'est la série harmonique qui diverge (la fonction ζ n'est pas définie en 1).
Pour $s = 2$, on retrouve la fameuse somme

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

L'hypothèse de Riemann énoncée en 1859 porte sur des caractéristiques de ζ. C'est l'une des plus importantes conjectures mathématiques à ce jour. Elle fait partie des 23 problèmes présentés par Hilbert en 1900 et qui devaient marquer le cours des mathématiques du XX$^{\text{e}}$ siècle. Elle n'est toujours pas démontrée à ce jour.
C'est un des sept problèmes à un million de dollars de l'Institut Clay (un seul à été résolu).

1 Généralités

Définition 1.1 *(Série numérique)*

Soit une suite $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
On appelle **somme partielle** de terme général u_n, la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La **série numérique** de terme général u_n désigne la suite (S_n) des sommes partielles.
On note cette série $\sum u_n$. u_n est **terme général** de la série.

Remarque : Lorsque (u_n) est définie à partir de n_0, on peut définir la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$.

⚠ Le programme se restreint aux séries à termes positifs. Mais l'étude des probabilités nous conduira parfois à manipuler des séries de signe quelconque. Pour éviter de futures difficultés, nous élargissons donc un peu le champ d'étude par rapport au programme officiel. Concrètement, cela ne compliquera pas beaucoup les choses car nous nous ramènerons presque toujours, via *l'absolue convergence*, à des séries à termes positifs.

Définition 1.2 *(Nature de la série)*

La série $\sum u_n$ **converge** si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.
Dans la cas contraire, la série **diverge**.
La **nature** d'une série désigne sa convergence ou sa divergence.

Théorème 1.3

Toute série à termes positifs admet une limite dans $[0, +\infty]$. On note cette limite

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

Remarque : De même, toute série à termes négatifs admet une limite dans $[-\infty, 0]$.
⚠ Noter que l'intervalle est fermé en $+\infty$: la limite est finie ou infinie.
C'est **faux** si la série n'est pas à termes positifs.

Preuve

La suite des sommes partielles est croissante.
En effet, $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \geqslant 0$$

car le terme général est supposé positif.
D'après le théorème de la limite monotone, (S_n) admet une limite finie ou infinie.
La suite des sommes partielles étant positive, sa limite est nécessairement dans $[0, +\infty]$.
■

Exemple

Étudier la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ pour $n \geqslant 1$.

Solution :

On étudie la suite des sommes partielles (S_n) et on fait apparaître une somme télescopique.
$\forall n \geqslant 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

La série converge et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

Définition 1.4 *(Reste d'ordre n)*

Soit $\sum u_n$ une série *convergente*. Le **reste** d'ordre n de la série est défini par

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

⚠ Pour le reste d'ordre n, la somme commence à $n+1$.
Ceci n'a de sens que si la série converge.

Exemple

Donner le reste d'ordre n de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

Solution :

Pour $n \geqslant 1$,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}.$$

Propriété 1.5

On ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de termes.

Preuve

Si on note n_0 l'indice du dernier terme modifié entre u et v et $a = \sum_{k=0}^{n_0}(u_k - v_k)$, alors, on a pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_k + a.$$

Ainsi, les deux suites des sommes partielles ne diffèrent que d'une constante pour $n \geqslant n_0$.
Donc elles sont de même nature (et leur limite, si elle est finie, diffère de la valeur a).
■

Théorème 1.6 *(Condition nécessaire de convergence)*

Si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) converge vers 0.

La réciproque est **FAUSSE**.

Contraposée : Si u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.
On dit qu'elle diverge *grossièrement*.

Preuve

On suppose que la série converge.
Si on note (S_n) la suite des sommes partielles, alors il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $S_n \to \ell$.
Ainsi, par opération sur les limites, $u_n = S_n - S_{n-1} \to 0$. ■

Méthode

Si on demande la nature d'une série, commencer par étudier la limite de son terme général.

Exemple

Montrer que $\sum \sin n$ diverge.

Solution :

Si $\sin(n)$ tendait vers 0, alors $\sin(n+1)$ aussi.
Or $\sin(n+1) = \cos n \sin 1 + \cos 1 \sin n$.
Donc par opérations sur les limites, $\cos n \to 0$ (car $\sin 1 \neq 0$).
Or $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$. C'est absurde.
Donc $\sin n \not\to 0$, donc $\sum \sin n$ diverge grossièrement.

Exemple

Donner la nature de la série de terme général $u_n = n^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)$ pour $n \geqslant 1$.

Solution :

$$\begin{aligned}
u_n &= n^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)\\
&= n^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}} - 1\right)\\
&= n^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right)\\
&\sim -\frac{n^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n(n+1)}\\
&\sim -1.
\end{aligned}$$

Donc $u_n \to -1$: la série diverge grossièrement.

2 Liens suites - séries

Toute série peut s'étudier comme une suite : la suite des sommes partielles.
Réciproquement toute suite, peut également s'écrire sous la forme d'une série.
En présence d'une suite, il faut toujours garder à l'esprit que toutes les méthodes des séries sont applicables.

Méthode *(Série télescopique)*

Soit $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$,
la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Exemple

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + n$. Exprimer u_n en fonction de n.

Solution :

$\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = n$.
En sommant, on trouve donc $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} k$.
C'est-à-dire $u_n - u_0 = \frac{n(n-1)}{2}$.
Donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Méthode *(Retrouver le terme général)*

Si (S_n) est une suite de sommes partielles associée à la série $\sum u_n$, alors,

$$u_0 = S_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \; u_n = S_n - S_{n-1}.$$

3 Opérations sur les séries convergentes

Théorème 3.1 *(Produit par une constante)*

Si (u_n) est une suite réelle, et $\lambda \in$ **R non nul**, alors $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ ont la même nature.
Et si elles convergent, alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Remarque : Si $\lambda = 0$, alors la série $\sum \lambda u_n$ est simplement nulle et converge toujours vers 0.

Théorème 3.2 *(Somme des limites)*

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum (u_n + v_n)$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

La réciproque est fausse. On peut avoir la convergence de $\sum (u_n + v_n)$ sans avoir la convergence de $\sum u_n$ ni de $\sum v_n$.

Preuve

Par opération sur les limites des sommes partielles. ■

Méthode *(Changements d'indices)*

Les changements d'indices du type $j = j+p$, avec p une constante fixée, se réalisent de la même façon sur les sommes des séries **convergentes** que sur les sommes finies (mais la borne $+\infty$ ne change pas).
Par exemple, si $\sum u_n$ converge, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1}.$$

Preuve

Par passage aux limites sur les sommes partielles. ■

4 Séries usuelles

A Séries géométriques

Définition 4.1 *(Série géométrique)*

On appelle **série géométrique**, toute série dont le terme général est une suite géométrique.

Théorème 4.2 *(Critère de convergence des séries géométriques)*

La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.
Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Preuve

Trivial, $q^n \to 0$ sinon, la suite diverge grossièrement. ■

Propriété 4.3

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$, alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.
Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = u_0 \frac{1}{1-q}.$$

Exemple *(Paradoxe de Zénon ou Achille et la Tortue)*

« C'est chose incompréhensible pour l'esprit humain que la continuité absolue du mouvement. L'homme, ne saisit les lois de n'importe quel mouvement que lorsqu'il en examine des unités arbitrairement découpées. Mais en même temps c'est de cette division arbitraire de mouvement continu en unités discontinues que naissent la plus grande partie des erreurs humaines.
Chacun connaît le "sophisme" des Anciens selon lequel Achille ne rattrapera jamais la tortue qui va devant lui, quoique son allure soit dix fois plus rapide. Quand Achille aura franchi la distance qui le sépare de la tortue, celle-ci se trouvera avoir franchi en le dépassant, le dixième de cette distance. Pendant qu'Achille franchira ce dixième, la tortue avancera encore d'un centième, ainsi de suite à l'infini. Ce problème paraissait insoluble dans l'antiquité. L'absurdité de la conclusion (Achille ne rattrapera jamais la tortue) découlait seulement du fait qu'on admettait arbitrairement des unités discontinues de mouvement alors que le mouvement d'Achille comme celui de la tortue est continu.
Si nous prenons des unités de mouvement de plus en plus petites, nous parvenons seulement à nous approcher de la solution, mais jamais nous ne l'atteignons. Ce n'est qu'en admettant une quantité infinitésimale et sa progression ascendante jusqu'au dixième, et en faisant la somme de cette progression géométrique que nous arrivons à la solution du problème. La nouvelle branche des mathématiques, qui a découvert l'art d'opérer avec des infiniment petits, donne maintenant des réponses à des questions jugées insolubles, même dans des problèmes beaucoup plus compliqués de dynamique.
Cette branche nouvelle des mathématiques, inconnue de l'antiquité, en introduisant des infiniment petits dans l'étude de la dynamique, rétablit la condition fondamentale du mouvement, c'est-à-dire son absolue continuité, et redresse par là même l'erreur inévitable, que l'intelligence ne peut pas ne pas commettre lorsqu'elle remplace un mouvement continu pas des unités discontinues de mouvement. [...]
C'est seulement en soumettant à notre examen une unité infiniment petite, la différentielle de l'histoire, c'est-à-dire les courants homogènes de l'humanité, et en nous rendant maîtres de l'art de les intégrer (de faire la somme des infinitésimaux), que nous pouvons espérer atteindre les lois de l'histoire. »
Tolstoï, La Guerre et la Paix (traduction La Pléiade).
Livre III, chapitre premier.
Trouver la solution du problème : montrer qu'Achille rejoint la tortue en un temps fini.

Solution :
À chaque étape, la distance entre Achille et la tortue est divisée par dix. Mais le temps pour parcourir l'étape est aussi divisé par dix car Achille, fortifié par Athéna, ne connait pas la fatigue et court à vitesse constante.
S'il faut un temps t pour les 100 premiers mètres, il suffit de $t/10$ pour les 10m suivants...
Ainsi, à l'étape n, la distance restante entre Achille est la tortue est $d_n = \frac{100}{10^n}$, et le temps écoulé est $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t}{10^k}$.
Ce n'est qu'au bout d'un nombre infini d'étapes qu'Achille rattrape la tortue.
Mais, le temps pour réaliser ces étapes est fini car la série $\sum \frac{t}{10^n}$ converge.
Ainsi, Achille rattrape la tortue au bout d'un temps

$$T = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t}{10^n} = \frac{t}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10t}{9}.$$

La distance qu'il aura alors parcouru sera de $\frac{1000}{9}$m.

Théorème 4.4 *(Séries géométriques dérivées)*

La **série géométrique dérivée** $\sum nq^{n-1}$ converge si, et seulement si $|q| < 1$.
Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

La **série géométrique dérivée seconde** $\sum n(n-1)q^{n-2}$ converge si, et seulement si $|q| < 1$.
Dans ce cas,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Explications
On reconnaît à chaque fois des dérivations *formelles* par rapport à q :

« la somme des dérivées est égale à la dérivée de la somme. »

C'est ainsi qu'il faut retenir les formules — au brouillon — mais on ne peut pas (de façon simple et avec les outils dont nous disposons), les démontrer ainsi. En effet, il ne faut pas oublier que $\sum_{k=0}^{+\infty}$ désigne une limite et non une somme finie et la linéarité de la dérivation ne s'applique donc pas.

Preuve *(à savoir refaire)*

Pour des raisons de clarté dans le déroulé du cours, ce théorème et sa preuve sont placés ici, mais ils nécessitent des théorèmes vus plus loin.
Cette preuve est donc à étudier uniquement lors d'une deuxième lecture du cours.
$\star$ Étude de la convergence.
Si $q \geqslant 1$ ou $q \leqslant -1$, alors le terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.
Si $0 \leqslant q < 1$ alors $nq^{n-1} = o_{n\to+\infty}\left(q^{n/2}\right)$ car $\frac{nq^{n-1}}{q^{n/2}} = nq^{n/2-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.
Or $\sum q^{n/2}$ converge (série géométrique de raison $\sqrt{q} < 1$), donc par comparaison

$\sum nq^{n-1}$ converge.
Si $-1 < q < 0$, alors $0 < |q| < 1$, et la série converge absolument d'après le calcul précédent (donc converge).

$\star$ Pour tout $n \geqslant 1$, $S_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)q^k$ changement d'indice

$= \sum_{k=0}^{+\infty} kq^k + \sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ car les deux séries convergent

$= qS_1 + \frac{1}{1-q}$.

Donc $(1-q)S_1 = \frac{1}{1-q}$, ainsi $S_1 = \frac{1}{(1-q)^2}$.

Pour la série dérivée seconde, on obtient le critère de convergence de la même façon que pour la dérivée première.

$S_2 = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)q^{k-1}$ changement d'indice

$= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1+2)q^{k-1}$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} 2kq^{k-1}$ car les deux séries convergent

$= q\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} + 2S_1$

$= qS_2 + 2S_1$.

Donc $(1-q)S_2 = 2S_1 = \frac{2}{(1-q)^2}$, ainsi $S_2 = \frac{2}{(1-q)^3}$. ■

B Séries de Riemann

Définition 4.5 *(Séries de Riemann)*

On appelle **série de Riemann**, tout série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.
Pour $\alpha = 1$, la série $\sum \frac{1}{n}$ s'appelle la **série harmonique**.

Théorème 4.6 *(Séries de Riemann)*

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve

On donnera la preuve après le théorème de comparaison série intégrale à la page 6. ■

C Série exponentielle

Théorème 4.7 *(Série exponentielle)*

Pour $x \in \mathbf{R}$, la **série exponentielle** $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Explications

On peut définir ainsi la fonction exponentielle (à la fois sur **R** et sur **C**) et les autres propriétés en découlent. Mais cela nécessiterait des cours plus approfondis sur les séries.
Pour $x = 0$, on retrouve bien $\mathrm{e}^0 = 1$.

Preuve

On fera la preuve de la convergence un peu plus loin dans ce cours à la page 8. ■

5 Convergence absolue

Voici la notion qui permettra de se ramener presque toujours à une étude de série à termes positifs : on étudie la série des valeurs absolues.

Définition 5.1 *(Convergence absolue)*

Soit $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, on dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** (ou converge absolument) si la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 5.2

Une série absolument convergente est convergente :

« *la convergence absolue implique la convergence simple* »

Dans ce cas, $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

⚠ la réciproque est **fausse.**

Une série qui est convergente, sans être absolument convergente est dite *semi-convergente.*
Sauf quelques cas d'école, nous ne rencontrerons pas de telles séries qui n'entrent pas dans l'esprit du programme.

Preuve

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$.

u_n^+ représente la partie positive de u_n et u_n^- sa partie négative.
Ainsi, pour $u_n \geqslant 0$, $u_n = u_n^+$ et $u_n^- = 0$ et pour $u_n < 0$, $u_n = -u_n^-$ et $u_n^+ = 0$.
On obtient donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_n^+ - u_n^-$ avec (u_n^+) et u_n^- des suites positives.
$\forall n \in \mathbf{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_k^+ - \sum_{k=0}^n u_k^- = S_n^+ - S_n^-$.
Supposons que la série $\sum u_n$ converge absolument, c'est-à-dire $\sum |u_n|$ converge.
La suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^n |u_k|\right)$ est donc croissante et majorée par $\ell \in \mathbf{R}$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n^+ \leqslant |u_n|$, donc $S_n^+ \leqslant \sum_{k=0}^n |u_k| \leqslant \ell$.
La suite $\left(S_n^+\right)$ est croissante (somme de termes positifs) et majorée par ℓ, donc elle converge.
De même, la suite $\left(S_n^-\right)$ converge, et par opération sur les limites, (S_n) converge.
Donc $\sum u_n$ converge.
Et, par inégalité triangulaire, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\left|\sum_{k=0}^n u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^n |u_k|$.
D'où, par passage des inégalités à la limite, $\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$. ■

Exemple

Donner la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Solution :

$\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (car $2 > 1$).
Donc la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente, donc elle converge.

Dans toute la fin du chapitre, on ne traitera plus que des séries **à termes positifs.**

6 Critères de convergence des séries à termes positifs

A Comparaison série intégrale

⚠ Le théorème suivant n'est pas au programme, et doit donc être redémontré dans chaque cas particulier. Mais il est d'usage tellement commun qu'il n'est pas possible de le passer sous silence.

Théorème 6.1 *(Comparaison série intégrale)*

Soit f une fonction (continue) **positive** décroissante sur $\mathbf{R}_+$.
La série $\sum f(n)$ est de même nature que la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

Preuve *(à savoir refaire)*

f est décroissante, donc pour tout $t \in [n, n+1]$, $f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n)$.
Par croissance de l'intégrale, $f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} f \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}t = f(n)$.
En sommant des inégalités de même sens :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k).$$

La série est à termes positifs, et la suite des intégrales est croissante positive (par positivité de f).

- Si la suite des intégrales converge, alors elle est majorée par un réel $M \in \mathbf{R}$.
  Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f \leqslant M$. Donc la série est majorée : elle converge.
- Réciproquement, si la série converge, alors elle est majorée par un réel $M \in \mathbf{R}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\int_0^n f \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \leqslant M$. Donc la suite des intégrales est majorée, et comme elle est croissante, alors elle converge.

Donc la série et la suite des intégrales ont la même nature. ■

Exemple

Prouver le théorème sur la convergence/divergence des séries de Riemann.

Solution :

- Pour $\alpha \leqslant 0$, le terme général ne tend pas vers 0 : la série diverge grossièrement.
- Pour $\alpha > 0$, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est positive décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0. On peut donc appliquer le théorème de comparaison série intégrale (ici, il faut commencer à 1 pour pouvoir calculer l'intégrale).
  - Si $\alpha = 1$, alors $I_n = \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln n$ qui diverge. Donc la série diverge.
  - Si $\alpha \neq 1$, alors $I_n = \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = -\frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right)$ qui converge pour $\alpha - 1 > 0$, c'est-à-dire pour $\alpha > 1$.

B Théorèmes de comparaison

Théorème 6.2 *(Comparaison des séries à termes positifs)*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **positives** telles que $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leqslant v_n$.

- si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$
- si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Preuve *(à savoir refaire)*

$\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leqslant v_n$, donc par sommation d'inégalités de même sens : $\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k$.

- Si $\sum v_n$ converge, comme la série est à termes positifs, alors toutes les sommes partielles sont majorées par la limite $\sum_{k=0}^{+\infty} v_n$. Donc $\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.
  Donc la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ est majorée, et la série est à termes positifs, donc $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k$ tend vers $+\infty$. Donc par théorème de minoration sur les suites des sommes partielles, la série $\sum v_n$ diverge.

■

Remarque : Le critère de convergence est aussi vérifié si l'inégalité n'est vraie qu'à partir d'un certain rang n_0, mais alors, l'inégalité entre les limites n'est plus nécessairement vraie (il faut prendre en compte les premiers termes).

Exemple

Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n^n}$ converge.

Solution :

$\forall n \geqslant 2,\ \frac{1}{n^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$.

Or $\sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique à termes positifs convergente car $\frac{1}{2} < 1$.

$\sum \frac{1}{n^n}$ est aussi à termes positifs, donc par comparaison, $\sum \frac{1}{n^n}$ converge.

Théorème 6.3 *(Critère avec des équivalents)*

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites équivalentes à **positives**, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

⚠ Cela ne veut pas dire que les sommes partielles soient équivalentes ! En particulier, si elles convergent, la limite dépend fortement des premiers termes des suites.

Preuve *(à savoir refaire)*

Si $u_n \sim v_n$, alors il existe une suite α_n qui tend vers 1 telle que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \alpha_n v_n$.

Puisque (α_n) converge, elle est bornée. On note M un majorant de la suite (α_n).

Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leqslant M v_n$.

Supposons que $\sum v_n$ converge, alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant M \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant M \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Donc la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ est majorée : la série $\sum u_n$ converge.
Et par symtrie de la relation d'équivalence, nous en déduisons que si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge aussi. ■

Exemple

Donner la nature de la série de terme général $u_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1$.

Solution :

$u_n \sim \frac{1}{n}$, donc la série est équivalente à la série harmonique divergente.
Ainsi $\sum u_n$ diverge.

Théorème 6.4 *(Négligeablilité)*

Soit (u_n) et (v_n) sont deux suites **positives**.
Si $u_n = o\left(v_n\right)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Preuve *(à savoir refaire)*

Si $u_n = o\left(v_n\right)$, alors, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leqslant v_n$.
Donc si $\sum v_n$ alors, $\sum_{u_n}$ converge. ■

Théorème 6.5 *(Comparaison aux séries usuelles)*

Soit $\sum u_n$ une série à termes **positifs**,

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ majorée, alors $\sum u_n$ converge.
- S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ tend vers $\ell \in \mathbf{R}^* \cup \{\pm\infty\}$, alors $\sum u_n$ diverge.
- S'il existe $q > 1$ tel que $(q^n u_n)$ majorée, alors $\sum u_n$ converge.

Preuve *(à savoir refaire)*

Si $n^\alpha u_n$ majorée, alors on peut noter M un majorant. Donc $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n \leqslant \frac{M}{n^\alpha}$.
Or la série $\sum \frac{M}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ (série de Riemann), donc par comparaison, la série $\sum u_n$ converge.
De même pour les deux autres cas. ■

Corollaire 6.6 *(Critère de d'Alembert)*

Soit (u_n) est une suite à termes **strictement** positifs, telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \geqslant 0$.

- Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell = 1$, ce théorème ne permet pas de conclure, il faut une autre approche.
- Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Preuve

- Si $\ell < 1$, alors on peut trouver $q \in \mathbf{R}$, tel que $\ell < q < 1$ (par exemple $q = \frac{\ell+1}{2}$.
  Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers ℓ, il existe un certain rang n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$.
  Et par récurrence immédiate, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant q^{n-n_0} u_{n_0}$.
  Donc par comparaison à une série géométrique : $\sum_{u_n}$ converge.
- Si $\ell > 1$, alors la suite est croissante et ne tend pas vers 0.
  La série diverge donc grossièrement.
- Si $\ell = 1$, on peut avoir tous les cas : par exemple $\sum \frac{1}{n}$ diverge, mais $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

■

Exemple

Prouver la convergence de la série exponentielle pour $x > 0$.

Solution :

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $u_n = \frac{x^n}{n!}$.
La suite est strictement positive et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1} \to 0$.
D'après le critère de d'Alembert (à redémontrer sur une copie), la série converge.

Théorème 6.7 *(Séries doubles)*

Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2} \in (\mathbf{R}_+)^{\mathbf{N}^2}$, une suite positive à deux indices.
Alors
$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}.$$
Avec la convention que « $(+\infty) + a = +\infty$ » pour $a \in \mathbf{R}$.

Preuve

Admis. ■