

# SOMMES ET PRODUITS

« Jeune homme, en mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue. »  
J. von Neumann (1903-1957)

Ce chapitre est purement calculatoire. Il vise à introduire trois notations et à les manipuler.

## 1 LE SYMBOLE SOMME

Pour  $q \neq 1$  fixé, la somme des puissances de  $q$  a été vue au lycée :

$$q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

L'utilisation des points de suspension pour écrire cette somme rend l'écriture assez lourde et potentiellement ambiguë. Ce chapitre introduit une notation plus ramassée

$$\sum_{k=0}^n q^k = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \dots + q^n$$

Cette notation se lit comme une boucle **for** en informatique :

- $k$  va prendre toutes les valeurs successives de 0 (borne du bas) jusqu'à  $n$  (borne du haut)
- Pour chaque valeur de  $k$  on rajoute le nombre  $q^k$  (à droite du signe somme) au résultat précédent.

$k$	$q^k$	somme partielle jusqu'à $k$
0	$q^0 = 1$	1
1	$q^1 = q$	$1 + q$
2	$q^2$	$1 + q + q^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$q^n$	$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

On peut ensuite varier les plaisirs :

### Exemple

$$\sum_{k=0}^n 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n+1 \text{ fois}} = n + 1$$

Si on veut sommer les  $q^k$  à partir de  $-5$  et jusqu'à  $n - 1$  pour  $q \neq 0$ , on écrit :

$$\sum_{k=-5}^{n-1} q^k = q^{-5} + q^{-4} + \dots + q^0 + q^1 + \dots + q^{n-1}$$

**Notation** (Utilisation du symbole  $\sum$ )

Soient  $m \in \mathbf{Z}$  et  $n \in \mathbf{Z}$ , avec  $m \leq n$ ,

Soit  $(a_m, a_{m+1}, \dots, a_n)$  une liste de nombres<sup>1</sup>.

On définit la somme des  $a_k$  pour  $k$  variant de  $m$  à  $n$  par

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

On note également :

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{m \leq k \leq n} a_k = \sum_{k \in \llbracket m, n \rrbracket} a_k$$

Pour  $m > n$ , la somme est vide et vaut 0 :  $\sum_{k=m}^n a_k = 0$

L'usage des points de suspension pour définir la notation somme n'est pas parfaitement satisfaisante.

D'un point de vue purement formel, on préférerait donc une définition qui s'appuie sur le caractère récursif de la somme. En effet, si on sait définir une somme jusqu'au rang  $n$ , alors il suffit de rajouter un seul élément pour avoir une somme jusqu'au rang  $n + 1$ .

Ainsi, on peut formuler une définition équivalente de la somme à l'aide du principe de récurrence :

**Définition 1.1** (Définition d'une somme par récurrence)

*Initialisation - somme vide* : Pour tout  $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$  avec  $m > n$ ,  $\sum_{k=m}^n a_k = 0$ .

*Hérédité* : Pour tout  $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$  avec  $m \leq n + 1$ ,  $\sum_{k=m}^{n+1} a_k = \sum_{k=m}^n a_k + a_{n+1}$ .

**Exemple**

Soit  $a \in \mathbf{R}$ , calculer  $\sum_{k=0}^n a$ .

**Solution :**

Remarques :

1. L'indice **ne recule pas** : si  $m > n$ , c'est-à-dire si la borne du bas est plus grande que celle du haut, alors la somme est vide et vaut 0 par convention.

Exemple :  $\sum_{k=7}^5 2^k = 0$ .

2.  $k$  est l'**indice de sommation**, on dit que l'indice est **muet**. Cela veut dire qu'il ne sert qu'à l'intérieur de la somme et qu'on peut changer son nom sans changer la valeur de la somme.

Exemple :  $\sum_{k=0}^n 2^k = \sum_{i=0}^n 2^i = \sum_{j=0}^n 2^j$

On utilise souvent une des lettres  $i, j$  ou  $k$  comme indice.

3. L'indice n'a de sens qu'à l'**intérieur** de la somme ; en dehors, il n'est plus défini. S'il vous reste un indice dans l'expression après le calcul de la somme, c'est que vous vous êtes trompé<sup>2</sup>.

**Exemple**

Chercher l'erreur :  $\sum_{n=0}^n q^n$ .

**Solution :**

**Propriété 1.2** (Relation de Chasles)

Pour tout  $(m, n, p) \in \mathbf{Z}^3$  avec  $m \leq p \leq n$ ,  $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k$ .

Cette relation permet simplement de faire une petite pause au milieu du calcul. Attention néanmoins à bien recommencer à l'indice  $p + 1$ , et non à l'indice  $p$  pour ne compter qu'une seule fois  $a_p$ .

1. Cette notation est valable pour tout objet mathématique pour lequel une opération associative « somme » a été définie (pour certaines formules, la commutativité est aussi nécessaire). Ce n'est pas spécifique aux nombres : cette notation sera utilisée plus loin pour sommer des vecteurs par exemple.

2. Ce n'est pas le cas en Python où on peut récupérer la valeur du dernier indice d'une boucle **for** après la fin de la boucle.

## 2 MÉTHODES DE CALCUL

### A Linéarité

#### Propriété 2.1 (Linéarité de la somme)

La somme est linéaire, c'est-à-dire que pour toutes les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ , et pour toute constante  $\lambda$ , on a

$$\forall (m, n) \in \mathbf{Z}^2, \quad \sum_{k=m}^n (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=m}^n u_k + \sum_{k=m}^n v_k$$

#### Preuve

Pour tout  $m \in \mathbf{Z}$ , on prouve le résultat par récurrence sur  $n$ , à partir de la définition de la somme.

*Remarque :* Dans la récurrence, seul «  $n$  » doit varier. on ne fait jamais de récurrence sur un couple de valeurs, mais seulement sur un nombre entier.

#### Rédaction formelle :

Pour  $m \in \mathbf{Z}$  quelconque fixé,

- Si  $n < m$ , alors le résultat est vrai (toutes les sommes sont vides et donc nulles).
- On démontre le résultat pour  $n \geq m$  par récurrence sur  $n$ .  
Pour tout  $n \geq m$ , on définit la propriété

$$\mathcal{P}_m(n) : \ll \sum_{k=m}^n (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=m}^n u_k + \sum_{k=m}^n v_k \gg$$

**Initialisation :** pour  $n = m$ , le résultat est vrai.

**Hérédité :** on suppose que le résultat est vrai pour un certain  $n \geq m$  quelconque fixé, et on le montre alors pour  $n + 1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n+1} (\lambda u_k + v_k) &= \sum_{k=m}^n (\lambda u_k + v_k) + (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) \\ &= \lambda \sum_{k=m}^n u_k + \sum_{k=m}^n v_k + \lambda u_{n+1} + v_{n+1} \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \lambda \left( \sum_{k=m}^n u_k + u_{n+1} \right) + \sum_{k=m}^n v_k + v_{n+1} \\ &= \lambda \sum_{k=m}^{n+1} u_k + \sum_{k=m}^{n+1} v_k \end{aligned}$$

D'où le résultat vrai au rang  $n + 1$ .

Ainsi, par principe de récurrence,  $\forall n \geq m$ ,  $\mathcal{P}_m(n)$  est vraie.

Par disjonction des cas, on a prouvé ce résultat pour tout  $n \in \mathbf{Z}$  (à  $m$  fixé).

Et comme  $m$  était supposé quelconque, le résultat est vrai pour tout  $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$ . ■

#### Corollaire 2.2

Avec les notations précédentes,

$$\sum_{k=m}^n (u_k + v_k) = \sum_{k=m}^n u_k + \sum_{k=m}^n v_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=m}^n \lambda u_k = \lambda \sum_{k=m}^n u_k$$

#### Exemple

$$\text{Calculer } \sum_{k=0}^n 3^k - 2^k.$$

**Solution :**

### B Changements d'indices

Commençons par un exemple :

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \sum_{j=1}^{n+1} j^2$$

Dans cet exemple, nous avons changé d'indice : au lieu de calculer pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , nous avons posé  $j = k + 1 \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$  ce qui simplifie l'expression de la somme.

$$k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \overset{j=k+1}{\iff} \quad j \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$$

*Remarque :* Comme l'indice est muet, on peut garder la lettre  $k$  dans la seconde somme. On n'est pas obligé de la remplacer par  $j$  (même si c'est plus facile au début).

**Méthode** (*Décalage d'indice*)

Le décalage d'indice revient à utiliser un indice translaté d'une valeur fixe.

Par exemple  $j = k - 1$  ou  $j = k + 1$ .

⚠ Les bornes sont aussi translattées.

$$\sum_{k=m}^n a_{k+1} = \sum_{j=m+1}^{n+1} a_j$$

Pour ne pas se tromper :

- On repère le changement d'indice que l'on souhaite réaliser, par exemple  $j = k + 1$  dans le cas ci-dessus pour transformer  $a_{k+1}$  en  $a_j$ .
- On cherche à la main les premières et dernières valeurs de la somme. par exemple, on commence pour  $k = m$  avec  $a_{k+1} = a_{m+1} = a_j$ , il faut donc que la nouvelle somme commence à  $j = m + 1$ , la somme se termine avec  $k = n$ , c'est-à-dire  $a_{k+1} = a_{n+1} = a_j$ , donc la nouvelle somme finit avec  $j = n + 1$ .
- Il doit y avoir le même nombre d'éléments dans les deux sommes : si je repousse la borne inférieure de 1, alors la borne supérieure doit être repoussée d'autant.

**Exemple**

Calcul de la somme géométrique :  $\sum_{k=0}^n q^k$  avec  $q \neq 1$ .

**Solution :****Méthode** (*Inversion de l'ordre de sommation*)

Pour inverser l'ordre de sommation (lire la somme en sens contraire) pour  $k$  variant de 0 à  $n$ , on remplace  $k$  par  $j = n - k$  qui varie de 0 à  $n$ .

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} = \sum_{j=0}^n a_j$$

Tester les bornes à la main pour ne pas se tromper.

⚠ On doit conserver une borne de début de somme qui est inférieure à la borne de fin de somme pour ne pas avoir une somme vide. Dans le cas général, pour  $k$  variant de  $m$  à  $n$ , on pose  $j = n + m - k$  :

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=m}^n a_{n+m-j}$$

Mais ceci n'est pas à apprendre par cœur, on le retrouve facilement à la main sur les cas concrets.

**Exemple**

Calculer la somme arithmétique :  $S_n = \sum_{k=0}^n k$ .

**Solution :**

### C Sommes télescopiques

Le principe des sommes télescopiques s'appuie sur le changement d'indices. La méthode en elle-même est très simple. La vraie difficulté est d'y penser et de repérer les sommes télescopiques en les mettant sous la bonne forme.

**Méthode** (*Somme télescopique*)

$$\sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m$$

⚠ Il faut être vigilant sur les termes qui restent et ne pas hésiter pas à faire le détail à la main aux deux extrémités de la somme.

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k) = & \cancel{a_{m+1}} & - a_m \\ & + \cancel{a_{m+2}} & - \cancel{a_{m+1}} \\ & + \cancel{a_{m+3}} & - \cancel{a_{m+2}} \\ & + \dots & \\ & + \cancel{a_n} & - \cancel{a_{n-1}} \\ & + a_{n+1} & - \cancel{a_n} \\ = & a_{n+1} & - a_m \end{array}$$

**Preuve**

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k) &= \sum_{k=m}^n a_{k+1} - \sum_{k=m}^n a_k \quad (\text{linéarité}) \\ &= \sum_{k=m+1}^{n+1} a_k - \sum_{k=m}^n a_k \quad (\text{chang. d'indice } k+1 \text{ remplacé par } k) \\ &= a_{n+1} + \sum_{k=m+1}^n a_k - \left( \sum_{k=m+1}^n a_k + a_m \right) \\ &\quad (\text{on sort les termes extrémaux pour obtenir les mêmes bornes}) \\ &= a_{n+1} - a_m \end{aligned}$$

Pour aller un peu plus vite dans la rédaction, nous avons coupé une étape dans le changement d'indice. On aurait pu commencer par poser  $j = k + 1$  puis ensuite  $k = j$ . Nous avons fait les deux manipulations d'un coup. ■

**Exemple**

Calcul de la somme des  $\frac{1}{k(k+1)}$ .

**Solution :**

**Exemple**

Le calcul de la somme géométrique donné plus haut faisait aussi intervenir une somme télescopique.

**Exemple**

Soit  $r \in \mathbf{R}$ , et  $u$ , la suite définie par  $u_0 \in \mathbf{R}$ , et  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + r$ .  
Montrer que  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = u_0 + nr$ .

**Solution :**

### D Indices pairs/impairs

**Méthode**

Lorsque le signe change en fonction de la parité de  $n$ , il est parfois intéressant de séparer la somme des indices pairs de celle des indices impairs.

**Exemple**

Calculer  $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$ .

**Solution :**

**3 SOMMES USUELLES**

Voici quelques sommes usuelles dont il faut connaître les valeurs et que l'on doit pouvoir recalculer rapidement (connaître la preuve).

⚠ Être attentif aux bornes de sommation : si on change les bornes, la valeur de la somme est modifiée.

**A Sommes arithmétiques et géométriques****Propriété 3.1** (Somme de constantes)

Soit  $a \in \mathbf{C}$ , soient  $m \leq n$  deux entiers,

$$\sum_{k=m}^n a = (n - m + 1)a$$

(nombre de termes)  $\times a$

⚠ L'intervalle d'entiers  $\llbracket m, n \rrbracket$ , contient  $n - m + 1$  entiers.

En particulier, pour  $m = 0$ ,  $\llbracket 0, n \rrbracket$  contient  $n + 1$  entiers.

**Théorème 3.2**

Soient  $m$  et  $n$  deux entiers avec  $m \leq n$ ,

$$\sum_{k=m}^n k = \frac{(m - n + 1)(m + n)}{2} \quad \text{et en particulier : } \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n + 1)}{2}$$

**Preuve** (avec les notations « intuitives »)

On pose  $S = m + (m + 1) + \dots + n$

On écrit deux fois la somme, en sens contraire.

$$2S = \begin{array}{cccccccc} m & + & m+1 & + & m+2 & + \dots & + & n-1 & + & n \\ + & ( & n & + & n-1 & + & n-2 & + \dots & + & m+1 & + & m) \\ \hline & & (m+n) & + & (m+n) & + & (m+n) & + \dots & + & (m+n) & + & m+n \end{array}$$

Or dans la somme, il y a  $n - m + 1$  termes, donc  $2S = (n - m + 1) \times (m + n)$ .

Ainsi

$$S = \frac{(n - m + 1)(m + n)}{2}$$

**Preuve** (formelle)

On pose  $S = \sum_{k=m}^n u_k$

$$\begin{aligned} 2S &= 2 \sum_{k=m}^n k = 2 \sum_{k=m}^n k = \sum_{k=m}^n k + \sum_{k=m}^n k \\ &= \sum_{k=m}^n k + \sum_{j=m}^n (n + m - j) \quad (\text{changement d'indice pour retourner la somme}) \\ &= \sum_{k=m}^n k + \sum_{j=m}^n (n + m) - \sum_{j=m}^n j \quad (\text{linéarité de la somme}) \\ &= \sum_{k=m}^n (n + m) = (n - m + 1)(n + m) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=m}^n k = (n - m + 1) \frac{n + m}{2}$$

**Théorème 3.3** (*Rappel : somme arithmétique*)

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique,  
Soient  $m$  et  $n$  deux entiers avec  $m \leq n$ ,

$$\sum_{k=m}^n u_k = (n - m + 1) \frac{u_n + u_m}{2} \quad \text{et en particulier :} \quad \sum_{k=0}^n u_k = (n + 1) \frac{u_n + u_0}{2}$$

(nombre de termes)  $\times$  (moyenne des termes extrêmes)

*Remarque :* Pour  $r = 0$ , on retrouve la somme d'une constante.

**Preuve**

On pose  $S = \sum_{k=m}^n u_k$

$$\begin{aligned} 2S &= 2 \sum_{k=m}^n u_k = 2 \sum_{k=m}^n (u_0 + kr) = 2 \sum_{k=m}^n u_0 + 2r \sum_{k=m}^n k && \text{(linéarité)} \\ &= 2(n - m + 1)u_0 + r(n - m + 1)(n + m) \\ &= (n - m + 1)(2u_0 + r(n + m)) = (n - m + 1)(u_n + u_m) \\ &\sum_{k=m}^n u_k = (n - m + 1) \frac{u_n + u_m}{2} \end{aligned}$$

**Théorème 3.4**

Soit  $q \neq 1$ ,  
Soient  $m$  et  $n$  deux entiers avec  $m \leq n$ ,

$$\sum_{k=m}^n q^k = q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q} \quad \text{et en particulier :} \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**!** Ne pas se tromper sur le nombre de termes pour l'exposant.

**Preuve** (*avec les notations « intuitives »*)

Si on note la somme  $S_n = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \dots + q^n$ ,  
alors  $qS_n = qq^0 + qq^1 + qq^2 + qq^3 + \dots + qq^n$

$$= q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^{n+1}$$

Lorsqu'on calcule la différence  $S_n - qS_n$ , beaucoup de termes s'annulent :

$$S_n - qS_n = \frac{q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n}{q^0} - \frac{q^1 + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}}{q^{n+1}}$$

Donc en factorisant par  $S_n$  :  $(1 - q)S_n = 1 - q^{n+1}$ .

Comme  $q \neq 1$ , on peut diviser par  $1 - q$  de chaque côté de l'égalité :

$$S_n = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**Preuve** (*formelle*)

(déjà faite à la page 4, mais ici, on peut adopter une preuve plus rapide).

On pose  $S = \sum_{k=0}^n q^k$ .

$$(1 - q)S = S - qS = \sum_{k=0}^n q^k - q^{k+1} = q^0 - q^{n+1} \quad \text{(somme télescopique).}$$

Or  $q \neq 1$ , donc  $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ .

**Théorème 3.5** (*Rappel : somme géométrique*)

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q \neq 1$ ,  
Soient  $m$  et  $n$  deux entiers avec  $m \leq n$ ,

$$\sum_{k=m}^n u_k = u_m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q} \quad \text{et en particulier :} \quad \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**!** Ne pas oublier de mettre le premier terme en facteur.

Au numérateur, l'exposant correspond au nombre de termes de la somme.

**Preuve**

$$\sum_{k=m}^n u_k = \sum_{k=m}^n u_m q^{k-m} = u_m \sum_{k=m}^n q^{k-m} = u_m \sum_{k=0}^{n-m} q^k = u_m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}$$

*Remarque :* Dans le cas où la raison vaut 1, on additionne simplement  $n + 1$  fois le même terme  $u_0$ .

**B Sommes d'Euler**

Ces trois sommes sont à connaître par cœur.

**Théorème 3.6** (*Sommes d'Euler*)

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

**Preuve**

On peut faire la preuve par récurrence à condition de connaître les formules au préalable.

Il existe aussi une preuve qui permet de retrouver facilement cette formule et qui se généralise à  $\sum_{k=0}^n k^3, \sum_{k=0}^n k^4 \dots$

Cela évite alors d'avoir recours à des formules « tombées du ciel ». Cette méthode sera vue en exercice.

## C Égalité de Bernoulli

L'égalité de Bernoulli est une généralisation de l'identité remarquable  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ . On peut aussi la voir comme une généralisation de la somme géométrique. Elle est surtout utile dans le sens de la factorisation.

### Propriété 3.7 (Égalité de Bernoulli)

Soient  $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ , soit  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} = (a - b) \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k$$

⚠ La somme ne va que jusqu'à  $n$  contrairement aux puissances.

### Preuve

La deuxième égalité s'obtient directement à partir de la première par changement d'indice :  $k \rightarrow n - k$ , ou simplement en remarquant une symétrie entre  $a$  et  $b$  au signe «  $-$  » près. Pour la première égalité, nous proposons ici deux preuves.

#### Preuve directe :

Le plus simple est de partir de l'expression avec la somme (il est plus simple de développer que de factoriser) :

$$\begin{aligned} (a - b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} &= a \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} - b \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n a^{k+1} b^{n-k} - \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n a^{k+1} (b^{n+1-(k+1)} - a^k b^{n+1-k}) \\ &= a^{n+1} - b^{n+1} \quad (\text{somme télescopique}) \end{aligned}$$

#### Autre preuve avec la somme géométrique :

Si  $a = b$ , le résultat est trivial (les deux membres valent 0).

Si  $a = 0$ , le résultat se vérifie de façon élémentaire en remplaçant dans la somme.

Dans les autres cas,

$$\begin{aligned} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{b - a} &= a^n \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{b}{a}} \quad (\text{car } a \neq 0) \\ &= a^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{b}{a}\right)^k \quad (\text{somme géométrique}) \\ &= \sum_{k=0}^n b^k a^{n-k} \end{aligned}$$

La première preuve est plus simple, mais la seconde a l'avantage de montrer que la formule de Bernoulli n'est qu'une généralisation de la somme géométrique et valable sans restriction. ■

*Remarque :* Pour  $a = 1$  et  $b = q$  on retrouve l'expression de la somme géométrique, mais avant la division par  $1 - q$ , ce qui explique que la formule est aussi valable pour  $q = 1$ .

## 4 SOMMES DOUBLES

### A Somme sur un rectangle

#### Propriété 4.1 (Échange des signes somme)

Si les deux champs d'indice sont indépendants<sup>3</sup>, on peut échanger les signes somme.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_{i,j}$$

### Explications

Cela revient à échanger l'ordre de sommation.

		j						Σ
		j=1	j=2	⋯	j	⋯	j=p	
i	i=1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	⋯	$a_{1,j}$	⋯	$a_{1,p}$	$S_1$
	i=2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	⋯	$a_{2,j}$	⋯	$a_{2,p}$	$S_2$
	⋮				⋮			⋮
	i	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	⋯	$a_{i,j}$	⋯	$a_{i,p}$	$S_i$
	⋮				⋮			⋮
	i=n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	⋯	$a_{n,j}$	⋯	$a_{n,p}$	$S_n$
Σ	$\widetilde{S}_1$	$\widetilde{S}_2$	⋯	$\widetilde{S}_j$	⋯	$\widetilde{S}_p$	$\rightarrow \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^p \widetilde{S}_j$	

↓  
 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} = \sum_{i=1}^n S_i$

Pour  $i$  fixé,  $S_i = \sum_{j=1}^p a_{i,j}$ , correspond à la somme suivant la  $i^{\text{ème}}$  ligne.

Pour  $j$  fixé,  $\widetilde{S}_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j}$ , correspond à la somme suivant la  $j^{\text{ème}}$  colonne.

La somme double  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j}$  correspond à la somme de toutes les cases du tableau.

On peut l'obtenir :

- En sommant d'abord suivant les colonnes, puis en faisant la somme des  $\widetilde{S}_j$  obtenus,
- En sommant d'abord suivant les lignes, puis en faisant la somme des  $S_i$  obtenus,
- En sommant en diagonale<sup>4</sup> ou de tout autre manière...

3. C'est-à-dire lorsque les bornes de la somme intérieure ne dépendent pas de l'indice défini dans la somme extérieure.

4. La sommation suivant des diagonales sera vue plus tard avec les polynômes.

L'ordre de sommation n'a pas d'importance et on peut adopter la notation compacte :

### Notation

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_{i,j}$$

Et lorsqu'on somme sur la même plage d'indices :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j}$$

*Remarque* : Même s'il n'y a qu'un seul signe  $\sum$ , il s'agit bien d'une somme double car on y définit deux indices :  $i$  et  $j$ .

## B Somme sur un triangle

### Propriété 4.2 (Somme sur un triangle)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j}$$

⚠ Contrairement à la somme sur un rectangle, les bornes de la somme intérieure dépendent de l'indice de la somme extérieure.

### Explications

La somme consiste à additionner les éléments d'un triangle :

		j						Σ
		j=1	j=2	...	j	...	j=n	
i	i=1	a <sub>1,1</sub>	a <sub>1,2</sub>	...	a <sub>1,j</sub>	...	a <sub>1,n</sub>	S <sub>1</sub>
	i=2		a <sub>2,2</sub>	...	a <sub>2,j</sub>	...	a <sub>2,n</sub>	S <sub>2</sub>
	⋮			⋱	⋮		⋮	
	i				a <sub>i,j</sub>	...	a <sub>i,n</sub>	S <sub>i</sub>
	⋮					⋱	⋮	
	i=n						a <sub>n,n</sub>	S <sub>n</sub>
Σ		$\widetilde{S}_1$	$\widetilde{S}_2$	...	$\widetilde{S}_j$	...	$\widetilde{S}_n$	

$\rightarrow \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \widetilde{S}_j$

$\downarrow$   
 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} = \sum_{i=1}^n S_i$

### Méthode (Pour sommer facilement sur un triangle)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{i,j} = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq i} a_{i,j} = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j}$$

On peut lire la dernière somme de 2 façons différentes.

- Pour chaque  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  **fixé**, on a  $j$  tel que  $1 \leq j \leq i$ . Cela donne la somme :

$$\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{i,j}$$

- Ou, pour chaque  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  **fixé**, on a  $i$  tel que  $j \leq i \leq n$ . Cela donne la somme :

$$\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{i,j}$$

*Remarque* : On peut adapter la règle pour le triangle inférieur ou en cas d'inégalités strictes entre  $i$  et  $j$ .

### Exemple

Calculer  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}$ .

**Solution** :

## C Somme à indices séparables sur un rectangle

### Propriété 4.3 (Indices séparables)

Pour une somme sur un rectangle, quand l'élément sommé s'écrit comme produit de deux facteurs dont chacun ne dépend que d'un indice, on peut séparer les sommes :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_i b_j = \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{j=1}^p b_j \right)$$

### Preuve

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\sum_{j=1}^p a_i b_j = a_i \left( \sum_{j=1}^p b_j \right)$  car, pour  $i$  fixé,  $a_i$  est constante.

Or  $B = \sum_{j=1}^p b_j$  est une constante par rapport à  $i$  (ne dépend pas de  $i$ ), donc

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_i b_j = \sum_{i=1}^n a_i \left( \sum_{j=1}^p b_j \right) = \sum_{i=1}^n a_i B = \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) B = \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{j=1}^p b_j \right).$$

## 5 PRODUITS ET FACTORIELLE

## A Notations

**Notation** (Utilisation du symbole  $\prod$ )

Soient  $m \in \mathbf{Z}$  et  $n \in \mathbf{Z}$ , avec  $m \leq n$ ,

Soit  $(a_m, a_{m+1}, \dots, a_n)$  une suite de nombres<sup>5</sup>.

On définit le produit des  $a_k$  pour  $k$  variant de  $m$  à  $n$  par

$$\prod_{k=m}^n a_k = a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n$$

On note également :

$$\prod_{k=m}^n a_k = \prod_{m \leq k \leq n} a_k = \prod_{k \in \llbracket m, n \rrbracket} a_k$$

Par **convention**, si  $m > n$  le produit est vide et vaut 1.

*Remarque* : Comme pour la somme, l'indice est **muet**.

**Explications**

Lorsqu'une somme est vide, elle vaut 0, cela correspond à l'élément neutre pour le +. En effet, additionner 0 ne change pas la valeur d'un nombre.

De même, lorsqu'un produit est vide, il vaut l'élément neutre de  $\times$ , c'est-à-dire 1 car si on multiplie un nombre par 1, il est inchangé.

Parfois, l'utilisation d'une somme ou d'un produit vide peut simplifier l'expression de certaines propriétés en évitant de traiter des cas particuliers à part.

**Propriété 5.1** (Définition d'un produit par récurrence)

*Initialisation - Produit vide* : Pour tout  $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$ , avec  $m > n$ ,  $\prod_{k=m}^n a_k = 1$ .

*Hérédité* : Pour tout  $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$  avec  $m \leq n$ ,  $\prod_{k=m}^{n+1} a_k = \left( \prod_{k=m}^n a_k \right) \times a_{n+1}$ .

**Exemple**

Résoudre  $\prod_{k=1}^n a_k = 0$ .

**Solution** :

**Exemple**

Calculer  $\prod_{k=0}^n a_k$ .

**Solution** :

**Propriété 5.2** (Relation de Chasles)

Pour tout  $(m, n, p) \in \mathbf{Z}^3$  avec  $m \leq p \leq n$ ,

$$\prod_{k=m}^n a_k = \left( \prod_{k=m}^p a_k \right) \left( \prod_{k=p+1}^n a_k \right).$$

**Définition 5.3** (Factorielle)

Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on définit la **factorielle** de  $n$  par

$$n! = \prod_{k=1}^n k$$

On lit « *factorielle n* ». D'après la convention sur le produit vide,  $0! = 1$ .

**Exemple**

$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$  et  $(n+1)! = (n+1)n!$

## B Règles de calcul

**Propriété 5.4**

- Multiplicativité

$$\prod_{k=m}^n a_k b_k = \left( \prod_{k=m}^n a_k \right) \left( \prod_{k=m}^n b_k \right)$$

- Passage à la puissance<sup>6</sup>  $\alpha$

$$\prod_{k=m}^n a_k^\alpha = \left( \prod_{k=m}^n a_k \right)^\alpha$$

- Constante

$$\prod_{k=m}^n \lambda a_k = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^n a_k$$

5. Remarque similaire à la somme. On a changé le nom de l'opération mais les propriétés sont les mêmes.

6. Ceci n'a un sens que si les éléments peuvent être mis à la puissance  $\alpha$ . Par exemple, si un  $a_k$  est négatif, on exige que  $\alpha \in \mathbf{N}$ .

⚠ Le produit n'est **pas linéaire** :

$$\prod_{k=m}^n \lambda a_k = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^n a_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=m}^n (a_k + b_k) \neq \left( \prod_{k=m}^n a_k \right) + \left( \prod_{k=m}^n b_k \right).$$

**Exemple**

Calculer  $\prod_{k=1}^n 5\sqrt{k}(k+3)$ .

**Solution :**

*Remarque :* Les **changements d'indice** se réalisent de la même façon qu'avec les sommes.

**Propriété 5.5** (*Produit télescopique*)

Si les  $(a_k)$  sont tous non nuls, alors

$$\prod_{k=m}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}$$

**Preuve**

$$\prod_{k=m}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\cancel{a_{m+1}}}{a_m} \frac{\cancel{a_{m+2}}}{\cancel{a_{m+1}}} \cdots \cdots \frac{\cancel{a_n}}{\cancel{a_n}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_m} \quad \blacksquare$$

**Exemple**

Calculer  $\prod_{k=1}^n \frac{k+3}{k}$ .

**Solution :**

## 6 COEFFICIENTS BINOMIAUX

Les coefficients binomiaux ont déjà été rencontrés en classe de 1<sup>re</sup> avec les probabilités discrètes. Le programme se limitait à une interprétation probabiliste du coefficient à partir de la loi binomiale, à l'exclusion de toute formule explicite de ce coefficient. Le seul moyen de calculer ce coefficient était d'avoir recours au triangle de Pascal ou à la calculatrice.

Les coefficients binomiaux ont aussi une place importante en probabilités dans le programme de BCPST, mais ceci sera abordé dans des chapitres ultérieurs. Dans ce chapitre, on ne s'intéresse qu'à l'aspect calculatoire sans se soucier d'une quelconque interprétation probabiliste.

La logique est donc à l'inverse de ce qui a été fait en 1<sup>re</sup> : on commence par les calculs puis on étudie les probabilités *ensuite*.

*Nota :* Pour le triangle de Pascal et le binôme de Newton énoncés plus loin, le dénombrement fournit des preuves plus élégantes que celles proposées ici. Elles sont présentées dans le chapitre en question.

**Définition 6.1** (*Coefficient binomial*)

Soit  $(n, k) \in \mathbf{N}^2$  avec  $n \geq k$ .

On appelle **coefficient binomial** de paramètres  $n, k$ , le nombre

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

On lit «  $k$  parmi  $n$  »

**Par convention :** si  $n < k$ , alors  $\binom{n}{k} = 0$

**Propriété 6.2**

$\forall (n, k) \in \mathbf{N}^2$  avec  $k \leq n$ ,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^k \frac{n-k+i}{i}$$

Valeurs remarquables :  $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$  et  $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$

Symétrie :  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Pour  $k \neq 0$  :  $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$  ("formule sans nom")

**Preuve**

Élémentaire, chers étudiants ! Il suffit d'écrire les coefficients binomiaux avec les factorielles. ■

*Remarque* : La « formule sans nom » est sans doute celle qui en possède le plus. On l'appelle également « petite formule » ou « formule du pion ».

**Théorème 6.3** (*Triangle de Pascal*)

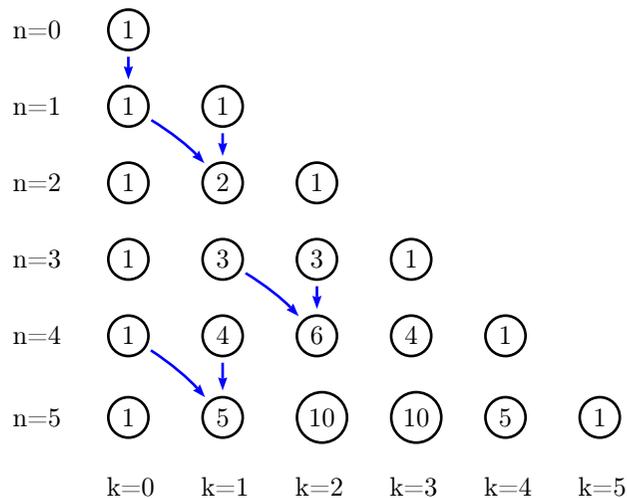
Pour  $(k, n) \in \mathbf{N}^2$ ,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

**Explications**

Cette formule à l'immense intérêt de donner une relation sommatoire entre les coefficients binomiaux (qui sont exprimés à partir de produit). Elle permet d'obtenir facilement les coefficients binomiaux par récurrence.

Elle s'illustre et se mémorise à travers le triangle de Pascal.



Pour trouver un coefficient binomial, on fait la somme de celui juste au dessus et de celui au dessus à gauche. Et si l'un des deux n'existe pas pour la somme, on prend seulement la valeur de celui qui existe.

Par exemple, pour obtenir  $\binom{5}{1} = 5$ , on fait la somme du 1 et du 4 au dessus (eux-mêmes obtenus à partir des éléments supérieurs). Cela revient à faire le calcul :

$$\binom{5}{1} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1}$$

**Preuve**

Pour  $0 \leq k < n$ ,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left( \frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left( \frac{k+1 + (n-k)}{(n-k)(k+1)} \right) \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \frac{n+1}{(n-k)(k+1)} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\ &= \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

Dans les autres situations,  $k \geq n$ , voire  $k < 0$  et  $n \in \mathbf{Z}$ , on vérifie facilement que la formule reste valable. ■

**Corollaire 6.4**

Les coefficients binomiaux sont des entiers.

**Preuve**

Par récurrence simple à partir du triangle de Pascal. L'hypothèse de récurrence est

$$\mathcal{P}(n) = \text{« } \forall k \leq n, \binom{n}{k} \in \mathbf{N} \text{ »}. \quad \blacksquare$$

Le théorème qui suit généralise les identités remarquables  $(a+b)^2$  et  $(a-b)^2$  à n'importe quelle puissance entière (positive).

**Théorème 6.5** (*Formule du binôme de Newton*)

$\forall (a, b) \in \mathbf{C}^2, \forall n \in \mathbf{N}$ ,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

**Preuve**

La preuve se fait par récurrence.

*Initialisation* : Pour  $n = 0$ , on a  $(a+b)^0 = 1$  et  $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$

Donc l'égalité est bien vérifiée.

*Hérédité* : On suppose la formule vérifiée au rang  $n \in \mathbf{N}$  fixé.

On cherche à démontrer la formule au rang  $n+1$  (cela ressemble à la preuve de la formule de Bernoulli).

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (\text{hyp. de récurrence}) \\
&= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \quad (\text{chang. d'indice } k \text{ par } k-1) \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} b^{n+1} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} \quad (\text{Triangle de Pascal}) \\
&= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1}
\end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang  $n+1$ .

*Conclusion* : Par principe de récurrence, la formule du binôme de Newton est vraie pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

La deuxième égalité s'obtient simplement par symétrie des rôles entre  $a$  et  $b$ . ■

### Corollaire 6.6

Pour  $n \in \mathbf{N}^*$ ,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

⚠ La deuxième égalité est fautive pour  $n=0$  (la somme vaut  $0^0=1$ ).

### Preuve

Utilisation du binôme de Newton avec  $a=b=1$  pour la première relation et  $a=-1$  et  $b=1$  pour la seconde. ■