

# COMPARAISON ASYMPTOTIQUE DES SUITES

## 1 NÉGLIGEABILITÉ ET CROISSANCES COMPARÉES

Le terme de négligeabilité que nous utiliserons est celui du programme. On parle également de relation de prépondérance, ce qui à l'avantage d'être un terme français !

### Définition 1.1 (Suite négligeable devant une autre)

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles.

Si  $(v_n)$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang, et si  $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$ , alors on note *au voisinage* de  $+\infty$  :

$$u_n = o(v_n).$$

On dit que  $(u_n)$  est **négligeable** devant  $(v_n)$  au voisinage de  $+\infty$ .

Cette notation se lit souvent  $u_n$  « est un petit  $o$  » de  $v_n$  en  $+\infty$ .

### Explications

D'un point de vue intuitif,  $(u_n)$  est négligeable devant  $(v_n)$  au voisinage de  $+\infty$ , si  $u_n$  devient infiniment petit (en valeur absolue) par rapport à  $v_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

La notation adoptée est dite notation de Landau, en référence au mathématicien allemand qui l'a introduite au début du XX<sup>e</sup> siècle. C'est la notation la plus couramment utilisée bien qu'il en existe d'autres (notation de Hardy  $u_n \prec v_n$ , ou encore la notation Vinogradov que privilégient les physiciens :  $u_n \ll v_n$ ).

La négligeabilité désigne une *limite*, et elle n'a donc aucun sens à  $n$  fixé : ce sont les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  que l'on compare et non les nombres  $u_n$  et  $v_n$ . Ainsi, ce n'est pas  $u_n$  qui est beaucoup plus petit que  $v_n$  (il faudrait savoir ce que veut dire « beaucoup »), mais c'est une limite qui tend vers 0.

La comparaison asymptotique des suites est toujours pour  $n \rightarrow +\infty$ . Nous verrons plus loin des comparaisons asymptotiques pour des fonctions avec d'autres voisinages.

### Exemple

Si  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = \frac{1}{n^2}$  et  $v_n = \frac{1}{n}$ , alors  $u_n = o(v_n)$ .

### Exemple

Que veut dire  $u_n = o(1)$  pour la suite  $u$  ?

#### Solution :

Écrire  $u_n = o(1)$  veut dire que  $u_n$  tend vers 0. C'est équivalent à écrire  $u_n = o(\lambda)$  avec  $\lambda \neq 0$ .

*Remarque :* On pourrait donner une définition quantifiée de la négligeabilité :

$$u_n = o(v_n) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, |u_n| \leq \varepsilon |v_n|.$$

L'avantage d'une telle définition est qu'elle prolonge celle du programme au cas où la suite  $v$  s'annule une infinité de fois.

**Théorème 1.2** (*Croissances comparées*)

Soient  $\alpha, \beta, \gamma, a, b$  des réels

1. Si  $\alpha < \beta$  alors  $n^\alpha = o(n^\beta)$ ,
2. Si  $|a| < |b|$ , alors  $a^n = o(b^n)$ ,
3. Si  $\beta > 0$ , alors  $\ln^\alpha(n) = o(n^\beta)$ ,
4. Si  $a > 1$ , alors  $n^\beta = o(a^n)$ .
5.  $a^n = o(n!)$ .

⚠ Les inégalités strictes de la proposition ne peuvent pas être remplacées par des inégalités larges.

**Preuve**

1. Le quotient tend vers 0
2. Le quotient tend vers 0 car  $|\frac{a}{b}| < 1$
3. (**méthode à retenir**) Il suffit de montrer le résultat pour  $\alpha = 1$  et  $\beta > 0$ .  
En effet, si  $\alpha < 0$ , pour  $n \geq 1$ ,  $\ln^\alpha(n) \leq \ln(n)$ , et si  $\alpha > 1$ , cela revient à étudier  $\frac{\ln(n)}{n^{\beta/\alpha}}$  avec  $\beta/\alpha > 0$ . Si la limite est nulle, elle reste nulle, une fois mise à la puissance  $\alpha > 1$ .  
On suppose donc  $\alpha = 1$ .  
On sait que  $\frac{1}{t} \leq 1$  pour  $t \geq 1$ , donc par croissance de l'intégrale entre 1 et  $t$ ,  $\ln(t) \leq t$  pour tout  $t \geq 1$ .  
En particulier, si on choisit  $\gamma \in ]0; \beta[$ , alors pour  $n \geq 1$ , on a  $n^\gamma \geq 1$ .

Donc

$$\begin{aligned} \gamma \ln(n) &= \ln(n^\gamma) \leq n^\gamma \quad \text{pour } n \geq 1 \\ \Rightarrow \quad 0 &\leq \frac{\ln n}{n^\beta} \leq \frac{1}{\gamma n^{\beta-\gamma}} \quad (\text{car } \gamma > 0). \end{aligned}$$

Comme  $\beta - \gamma > 0$ , alors par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n^\beta} = 0.$$

4. C'est une conséquence directe du point précédent.

$$\frac{n^\beta}{a^n} = e^{\beta \ln n - n \ln a} = e^{n(\beta \frac{\ln n}{n} - \ln a)}.$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta \frac{\ln n}{n} - \ln a = -\ln(a)$  (d'après le point précédent).

Donc par produit des limites, comme  $a > 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( \beta \frac{\ln n}{n} - \ln a \right) = -\infty.$$

Donc par composition des limites, on a le résultat voulu.

5.  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n > 0$ . On peut donc passer au quotient, qui est lui-même strictement positif.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}.$$

Pour  $n \geq n_0 = \lfloor 2a \rfloor$ , on a

$$0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}.$$

Par récurrence immédiate, on en déduit que

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad 0 < u_{n_0+p} \leq \frac{1}{2^p} u_{n_0} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

Donc par le théorème d'encadrement  $u_n \rightarrow 0$ . Ainsi  $a^n = o(n!)$ . ■

**Théorème 1.3** (*Croissances comparées simplifiées*)

Soient  $(\alpha, \beta) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$  et  $a > 1$ .

Au voisinage de  $+\infty$ , on a les relations suivantes :

$$\left( \ln^\beta n \right) \ll (n^\alpha) \ll (a^n) \ll (n!).$$

Avec la notation de Landau :

$$\ln^\beta n = o(n^\alpha), \quad n^\alpha = o(a^n), \quad a^n = o(n!).$$

**Se souvenir :** Les factorielles l'emportent sur les exponentielles qui l'emportent sur les puissances, qui l'emportent sur les logarithmes.

**Exemple**

Étudier la convergence de la suite définie pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , par  $u_n = \frac{2^n}{n!}$ .

**Solution :**

$2^n = o(n!)$  donc  $u_n \rightarrow 0$ .

On peut généraliser les relations précédentes :

**Propriété 1.4** (*Cas des suites divergeant vers  $+\infty$* )

Soit  $(u_n)$  une suite à valeurs strictement positives qui diverge vers  $+\infty$ .

1. Si  $\alpha < \beta$  alors  $u_n^\alpha = o(u_n^\beta)$ .
2. Si  $\beta > 0$ , alors

$$\ln^\alpha(u_n) = o(u_n^\beta) \quad \text{et} \quad u_n^\alpha = o(e^{\beta u_n}).$$

**Propriété 1.5** (*Transitivité de la relation de négligeabilité*)

Soient  $u, v, w$  trois suites réelles,

Si  $u_n = o(v_n)$  et  $v_n = o(w_n)$ , alors  $u_n = o(w_n)$

**Preuve**

Évident en revenant à la définition :  $\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n}$ . ■

⚠ La relation de négligeabilité n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas réflexive.

**Exemple**

Montrer que la relation de négligeabilité n'est pas réflexive.

Si on la rend réflexive, devient-elle une relation d'ordre (en d'autres termes, peut-on la considérer comme une relation d'ordre stricte).

**Solution :**

N'importe quelle suite non nulle à partir d'un certain rang n'est pas négligeable devant elle-même (car le quotient tend vers 1 et non vers 0).

Si on définit la relation  $u \mathcal{R} v \iff (u = v \text{ ou } u = o(v))$ , alors la relation  $\mathcal{R}$  définit une relation d'ordre si on ne considère que les suites non nulles à partir d'un certain rang. Par contre, si on accepte les suites qui s'annulent une infinité de fois (avec les définitions prolongées données dans un exemple plus haut), la relation n'est pas une relation d'ordre.

$\mathcal{R}$  est évidemment transitive (par transitivité de la négligeabilité) et réflexive par construction.

Montrons qu'elle est antisymétrique si les suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

Si  $u \mathcal{R} v$  et  $v \mathcal{R} u$ , supposons par l'absurde que  $u \neq v$ , alors  $u_n = o(v_n)$  et  $v_n = o(u_n)$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ , donc il existe  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0, \left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq \frac{1}{2}$ , donc  $\left| \frac{v_n}{u_n} \right| \geq 2$  ce qui contredit le fait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$ .

Ainsi pour  $u \mathcal{R} v$  et  $v \mathcal{R} u$ , on a nécessairement  $u = v$ .

La relation de négligeabilité est une relation d'ordre stricte (partielle) si les suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

Par contre, si les suites peuvent s'annuler une infinité de fois, alors l'argument précédent ce n'est plus valable.

Par exemple si on considère la suite  $u$  qui est nulle et la suite  $v$  telle que  $v_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbf{N}^*, v_n = 0$ , alors on a  $u_n = o(v_n)$  et  $v_n = o(u_n)$  (on utilise la deuxième définition, car avec n'importe quel  $\varepsilon > 0$ , l'inégalité est vraie à condition de prendre  $n \geq 1$ ) : la relation n'est pas transitive.

**Propriété 1.6 (Opérations sur les petits o)**1. *Combinaisons linéaires :*

Si  $u_n = o(v_n)$  et  $u'_n = o(v_n)$ , alors  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2, \lambda u_n + \mu u'_n = o(v_n)$ .

2. *Produit :*

Si  $u_n = o(v_n)$  et  $u'_n = o(v'_n)$ , alors  $u_n u'_n = o(v_n v'_n)$ .

3. *Produit par une même suite :*

Si  $u_n = o(v_n)$ , et  $(a_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  (ne s'annule pas à partir d'un certain rang), alors  $a_n u_n = o(a_n v_n)$ .

4. *Passage à la puissance :*

Si  $u_n = o(v_n)$  et  $\alpha > 0$ , alors  $u_n^\alpha = o(v_n^\alpha)$ .

5. *Suites extraites :*

Si  $u_n = o(v_n)$  et  $\varphi$  une fonction d'extraction, alors  $u_{\varphi(n)} = o(v_{\varphi(n)})$ .

**Preuve**

Utiliser la définition. ■

*Remarque :* Ces propriétés ne sont pas à apprendre par cœur, elles doivent être suffisamment bien comprises pour vous paraître naturelles.

⚠ La relation de négligeabilité **ne passe pas au quotient**. C'est évident si on réfléchit à sa signification. Par contre, on observe que la relation est « inversée » lors du passage à l'inverse.

**Méthode (Suites puissances)**

Lorsque  $n$  est dans l'exposant, il faut en général repasser par la définition de la puissance avec l'exponentielle.

**Exemple**

Étudier la convergence de la suite définie pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , par  $u_n = \frac{e^{\sqrt{\ln n}}}{n^2}$

**Solution :**

Pour  $n \geq 2, u_n = \frac{e^{\sqrt{\ln n}}}{n^2} = \frac{e^{\sqrt{\ln n}}}{e^{2 \ln n}} = e^{\sqrt{\ln n} - 2 \ln n} = e^{\ln n \left( \frac{1}{\sqrt{\ln n}} - 2 \right)}$  car  $\sqrt{\ln n} \neq 0$  si  $n \geq 2$ .

Or  $\frac{1}{\sqrt{\ln n}} - 2 \rightarrow -2$ , donc par produit  $\ln n \left( \frac{1}{\sqrt{\ln n}} - 2 \right) \rightarrow -\infty$ .

En composant par l'exponentielle,  $u_n \rightarrow 0$ .

**2 SUITES ÉQUIVALENTES**

Deux suites sont dites équivalentes si elles ont le même comportement à l'infini, c'est-à-dire si leur différence est négligeable par rapport à chacune (ce que nous verrons dans le théorème de caractérisation).

**Définition 2.1** (*Relation d'équivalence*)

Soient deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que  $(v_n)$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

$(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites **équivalentes**, si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

On note alors  $u_n \sim v_n$ .

**Exemple**

Soit  $\lambda \neq 0$ , alors  $u_n \sim \lambda$  si et seulement si  $u_n$  converge vers  $\lambda$ .

⚠ c'est **faux** si  $\lambda = 0$ .

Si  $u_n \sim \frac{1}{n}$ , alors  $u_n$  converge vers 0 « à la même vitesse » que la suite  $\frac{1}{n}$ .

Si  $u_n \sim n$ , alors  $u_n$  diverge vers  $+\infty$  « à la même vitesse » que la suite  $n$ .

**Théorème 2.2**

La relation  $\sim$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

**Preuve**

- *symétrie* :  $u_n \sim v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1 \iff \frac{v_n}{u_n} \rightarrow 1 \iff v_n \sim u_n$ .
- *reflexive* :  $\frac{u_n}{u_n} = 1 \rightarrow 1$ .
- *transitive* :  $u_n \sim v_n \implies \frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$  et  $v_n \sim w_n \implies \frac{v_n}{w_n} \rightarrow 1$  ; donc par produit,  $\frac{u_n}{w_n} \rightarrow 1$ .  
Donc  $u_n \sim w_n$ .

**Théorème 2.3** (*Propriétés conservées par la relation d'équivalence*)

1. Deux suites équivalentes sont de même signe (strict) à partir d'un certain rang.
2. Deux suites équivalentes ont le même comportement asymptotique : elles sont de même nature et si l'une admet une limite finie ou infinie, alors l'autre possède la même limite.

**Explications**

L'intérêt des équivalents est de se ramener à des suites plus simples ayant le même comportement asymptotique.

**Preuve**

1. Si  $u_n \sim v_n$ , alors  $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$ , ainsi, il existe  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0, \frac{u_n}{v_n} \geq \frac{1}{2} > 0$ .  
Donc  $u_n$  et  $v_n$  sont strictement du même signe à partir de  $n_0$  (au moins).
2. Si  $(v_n)$  admet une limite, alors par produit des limites  $(u_n) = (\frac{u_n}{v_n} v_n)$  admet la même limite.

La relation étant symétrique, si  $(v_n)$  n'admet pas de limite, alors  $(u_n)$  n'en admet pas non plus (sinon, on reprendrait le raisonnement précédent à partir de  $(u_n)$  pour en déduire que  $(v_n)$  admet une limite).

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \in \mathbf{R}$ , alors par produit sur les limites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} v_n = \ell$ , donc  $(u_n)$  converge aussi vers  $\ell$ .

Si  $(v_n)$  diverge vers  $+\infty$ , alors par produit des limites  $u_n$  diverge également vers  $+\infty$ .

**Théorème 2.4** (*Caractérisation des suites équivalentes*)

Soient deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ ,

$u_n \sim v_n$  si et seulement si  $u_n - v_n = o(v_n)$

si et seulement si  $u_n - v_n = o(u_n)$

**Explications**

Cette caractérisation donne une interprétation quantitative à la proximité des deux suites. C'est elle qui justifie ce qui a été dit en début de partie : que la différence entre les deux suites est négligeable devant chacune d'elle.

**Preuve**

$$\begin{aligned} u_n \sim v_n &\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \\ &\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - v_n}{v_n} = 0 \\ &\iff u_n - v_n = o(v_n). \end{aligned}$$

De même avec  $(u_n)$  par symétrie.

**Exemple**

- $n^3 + n^2 \sim n^3$  car  $n^2 = o(n^3)$ .

Les deux suites sont équivalentes car leur écart reste négligeable par rapport à chacune d'entre elles. Par contre, cela ne veut pas dire que l'écart soit « petit » : on voit ici que l'écart entre les suite diverge ( $n^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ ).

- $n^2 \not\sim 2n^2$  car l'écart entre les deux suites est du même ordre que les suites elles-mêmes.

**Exemple**

$$n^\alpha \sim n^\beta \iff \alpha = \beta.$$

**Exemple**

Dans le chapitre sur les limites de suites, on a vu que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$ .

donc  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + o(\ln(n))$ .

En fait, on peut écrire plus précisément que :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ .

### Propriété 2.5 (Opérations sur les suites équivalentes)

1. On peut **multiplier** les équivalents :

$$\begin{array}{lll} \text{si } u_n \sim v_n \text{ et } u'_n \sim v'_n & \text{alors,} & u_n u'_n \sim v_n v'_n. \\ \text{si } u_n \sim v_n \text{ et } \lambda \in \mathbf{R} & \text{alors,} & \lambda u_n \sim \lambda v_n. \\ \text{si } u_n \sim v_n \text{ et } \alpha \in \mathbf{R} & \text{alors,} & u_n^\alpha \sim v_n^\alpha. \end{array}$$

2. Si  $u_n \sim v_n$  alors leurs suites extraites sont aussi équivalentes.

3. On ne peut **pas additionner** des équivalents,

4. On ne peut **pas composer les équivalents avec une fonction**.

*Remarque* :  $\alpha$  est quelconque, en particulier les équivalents passent à l'inverse avec  $\alpha = -1$ .

### Preuve

Pour le dernier point : contre-exemple avec la composition avec exponentielle pour les suites de terme général  $n$  et  $n+1$ . ■

### Propriété 2.6

Une suite polynomiale est équivalente à son terme de plus haut degré :

$$\text{si } a_p \neq 0, \quad \sum_{k=0}^p a_k n^k \sim a_p n^p.$$

Le théorème suivant liste les équivalents à connaître.

### Théorème 2.7 (Équivalents usuels)

Si  $u_n \rightarrow 0$ ,

$$\begin{array}{lll} e^{u_n} - 1 \sim u_n & \sin u_n \sim u_n & \text{sh}(u_n) \sim u_n \\ \ln(1 + u_n) \sim u_n & \cos u_n - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2} & \text{ch}(u_n) - 1 \sim \frac{u_n^2}{2} \\ \sqrt{1 + u_n} - 1 \sim \frac{u_n}{2} & \tan u_n \sim u_n & \text{th}(u_n) \sim u_n \\ (1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n & \text{Arctan } u_n \sim u_n & \end{array}$$

avec  $\alpha \neq 0$ .

⚠ Si  $(u_n)$  ne converge pas vers 0, alors ces équivalents sont faux.

### Preuve

Sauf pour cosinus, et cosinus hyperbolique, ce sont des limites de taux d'accroissement. Pour le cosinus, on écrit  $\cos^2 u_n - 1 = -\sin^2(u_n) \sim -u_n^2$ .

Or

$$\cos^2 u_n - 1 = (\cos u_n - 1)(\cos u_n + 1) \sim 2(\cos u_n - 1).$$

Ainsi par quotient  $\cos u_n - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$ .

On fait de même pour ch avec  $\text{ch}^2 - 1 = \text{sh}^2$ . ■

### Propriété 2.8 (Montrer une équivalence par encadrement)

Si les suites  $u, v, w$  vérifient  $v_n \leq u_n \leq w_n$  à partir d'un certain rang et si  $v_n \sim w_n$ , alors  $u_n \sim v_n$ .

### Preuve

À partir d'un rang  $n_0$  pour lequel l'encadrement est vérifié :

$$0 \leq u_n - v_n \leq w_n - v_n = o(v_n).$$

En supposant que  $v_n$  ne s'annule pas au voisinage de  $+\infty$ , On obtient donc que  $0 \leq \frac{|u_n - v_n|}{|v_n|} \leq o(1)$

donc par encadrement  $u_n - v_n = o(v_n)$  donc  $\frac{u_n}{v_n}$ . ■

### Théorème 2.9 (Formule de Stirling)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}.$$

### Preuve

Admis provisoirement. ■

## 3 RELATION DE DOMINATION

La relation de domination indique qu'une suite est *au plus* du même ordre de grandeur qu'une autre, qu'elle ne la dépassera pas de beaucoup.

### Définition 3.1 (Suite dominée par une autre)

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles.

Si  $(v_n)$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang, et si  $\frac{u_n}{v_n}$  est bornée, alors on note *au voisinage* de  $+\infty$  :

$$u_n = O(v_n).$$

On dit que  $(u_n)$  est **dominée** par  $(v_n)$  au voisinage de  $+\infty$ .

Cette notation se lit souvent  $u_n$  « est un grand O » de  $v_n$  en  $+\infty$ .

*Remarque* : La définition sous-entend :  $\frac{u_n}{v_n}$  borné à partir du rang où le quotient est défini (c'est-à-dire quand la suite  $v$  est non nulle).

**Exemple**

Dire que  $u_n = O(1)$ , c'est dire que  $(u_n)$  est bornée.

*Remarque* : On pourrait donner une définition quantifiée de la domination :

$$u_n = O(v_n) \iff \exists K > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0, \quad |u_n| \leq K|v_n|.$$

L'avantage d'une telle définition est qu'elle prolonge celle du programme au cas où la suite  $v$  s'annule une infinité de fois.

**Explications**

Pour la relation de négligeabilité, le rapport tend vers 0, la définition quantifiée fait donc intervenir un «  $\forall \varepsilon > 0$  ». En revanche pour la relation de domination, il s'agit uniquement d'un rapport borné. Pour montrer cette relation, il suffit de trouver un «  $K > 0$  », pour lequel  $|u_n| \leq K|v_n|$ .

**Propriété 3.2 (Propriétés de la domination)**

Les propriétés vues pour la négligeabilité sont aussi valables pour la domination. (transitivité, opérations sur les  $o$ .)

**Propriété 3.3**

Si  $u_n = o(v_n)$  alors  $u_n = O(v_n)$ . La réciproque est fautive.

Si  $u_n \sim v_n$  alors  $u_n = O(v_n)$ . La réciproque est fautive.

**Preuve**

Revenir à la définition, une suite qui tend vers 0 est bornée mais la réciproque est fautive. De même pour l'équivalence. ■

**Explications**

La notion de négligeabilité est plus forte que celle de domination.

*Remarque* : La relation de domination est réflexive et transitive mais n'est pas symétrique, ni antisymétrique.

En informatique, on utilise encore une autre relation de comparaison notée  $\Theta(v_n)$  lors des calculs de complexité.

Il s'agit de la relation  $O$  symétrisée : la suite quotient est supposée majorée, mais aussi minorée par un nombre strictement positif.

La relation  $\Theta$  est une *relation d'équivalence*, contrairement à la relation de domination.

Par exemple, un algorithme de complexité en  $\Theta(n)$  demandera de l'ordre de  $n$  opérations pour traiter un problème de taille  $n$  (peut-être  $5n$ ,  $1000n$ ... mais la constante multiplicative ne dépend pas de  $n$ , cela veut dire que le temps de traitement est proportionnel au nombre de données à traiter).

**4 SUITES COMPLEXES****Définition 4.1**

Soient  $(z_n)$  et  $(z'_n)$  deux suites complexes qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

- $(z_n)$  est négligeable devant  $(z'_n)$  si, et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z_n}{z'_n} = 0$ ,  
si, et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{z_n}{z'_n} \right| = 0$ ,  
si, et seulement si  $|z_n| = o(|z'_n|)$ .
- $(z_n)$  est dominée par  $(z'_n)$  si, et seulement si  $\left| \frac{z_n}{z'_n} \right|$  est bornée,  
si, et seulement si  $|z_n| = O(|z'_n|)$ .
- $(z_n)$  est équivalence par  $(z'_n)$  si, et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z_n}{z'_n} = 1$ ,  
si, et seulement si  $|z_n - z'_n| = o(|z'_n|)$ ,  
si, et seulement si  $|z_n - z'_n| = o(|z_n|)$ .

Les théorèmes précédents vus sur les suites réelles s'appliquent.