Trigonométrie

« Dieu donna au monde la forme la plus convenable et la plus appropriée à sa nature. [...] C'est pourquoi, jugeant le semblable infiniment plus beau que le dissemblable, il donna au monde la forme sphérique, ayant partout les extrémités également distantes du centre, ce qui est la forme la plus parfaite et la plus semblable à elle-même. »
Platon dans Timée

Ce chapitre introduit les fonctions trigonométrique en lien avec le cercle trigonométrique.
Avant d'être des fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, continues... , le cosinus, le sinus et la tangente sont des objets géométriques. C'est ainsi qu'ils avaient été introduits au collège.
Nous reprenons ici la même démarche : on construit ces fonctions à travers des relations dans le triangle rectangle (que l'on choisira d'hypoténuse égale à 1).
Tous les aspects analytiques (continuité, dérivabilité, monotonie...) sont relégués à un chapitre ultérieur sur les fonctions usuelles.

1 Angles en radians

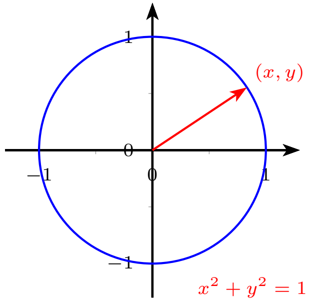
Définition 1.1 *(Cercle trigonométrique)*

Le **cercle trigonométrique** est un cercle du plan de rayon 1 et de centre 0.

Propriété 1.2 *(Paramétrage cartésien du cercle trigonométrique)*

Dans le plan $\mathbf{R}^2$, le cercle trigonométrique est décrit par l'ensemble des points :

$$\mathcal{C}(0,1) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2, x^2+y^2=1\right\}$$



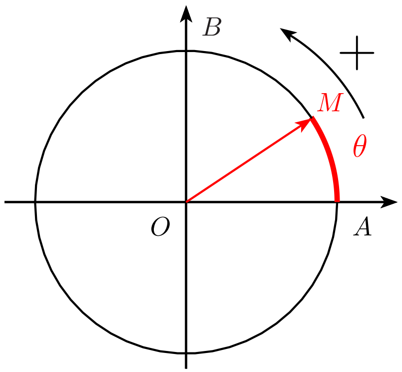
Explications
Ce cercle correspond aux points du plan qui sont situés à la distance 1 de l'origine : $\sqrt{x^2+y^2}=1$, ce qui est équivalent à $x^2+y^2=1$.

Définition 1.3 *(Angle orienté)*

On considère un repère orthonormé (O,A,B).

Pour un point $M(x,y)$ sur le cercle trigonométrique,
on définit l'**angle** $\theta = \widehat{AOM}$ par la longueur algébrique de l'arc de cercle entre le point A et le point M.

Le sens positif est tel que $\widehat{AOB} = +\frac{\pi}{2}$.
L'angle est exprimé en **radians**.



Remarque : L'angle d'un point ainsi défini n'est pas unique, mais il est exprimé à 2π près.

Explications
C'est une façon astucieuse de mesurer un angle : sur votre disque de rayon 1, vous enroulez un fil et vous mesurez la longueur qu'il vous faut pour faire l'angle (en positif si vous enroulez dans le bon sens, en négatif sinon). C'est beaucoup plus simple que l'histoire des 360^o qui tombent du ciel sans qu'on sache trop pourquoi. La difficulté vient néanmoins de la longueur de fil nécessaire pour faire un tour exact : 2π qui est un nombre irrationnel. Et cela, avouons que ce n'est pas très pratique.

La non unicité de l'argument provient du fait que pour aller de 0 à z, je peux rajouter autant de tours complets que je le souhaite dans un sens ou dans l'autre. Cela revient à ajouter ou enlever autant de fois le nombre 2π.

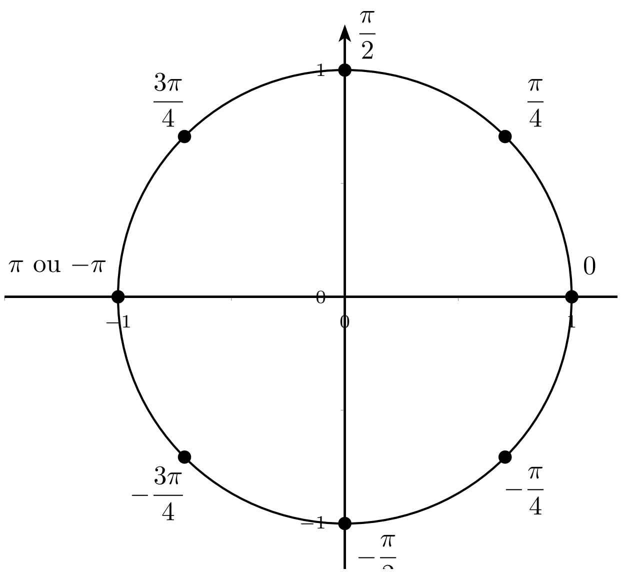
Le sens positif appelé aussi **sens trigonométrique** est opposé au sens des aiguilles d'une montre.
complexe.

Propriété 1.4 *(Correspondance avec les degrés)*

Pour passer d'une mesure en degrés à une mesure en radians, on multiplie l'angle en degrés par $\dfrac{2\pi}{360}$.

Remarque : Les unités sont proportionnelles.

Quelques angles remarquables :



On complètera cette liste d'angles remarquables un peu plus tard.

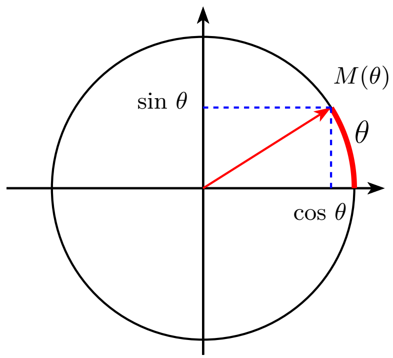
2 Fonctions trigonométriques

Nous présentons ici la base de la trigonométrie. Ces notions seront complétées dans le chapitre sur les nombres complexes.

Définition 2.1 *(cosinus et sinus)*

Pour $\theta \in \mathbf{R}$, on définit

- le **cosinus** de θ par l'abscisse du point du cercle trigonométrique d'angle θ,
- le **sinus** de θ par l'ordonnée du point du cercle trigonométrique d'angle θ.



Explications

Ces définitions sont tout à fait cohérentes avec celles qui ont été vues au collège et au lycée. On y apprend par exemple que

$$\cos\theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

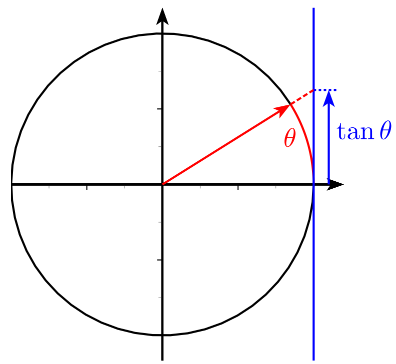
C'est vrai, mais c'est trop compliqué pour nous, alors on se contente de n'apprendre la formule que lorsque la longueur de l'hypoténuse vaut 1. C'est-à-dire, lorsque l'hypoténuse est le rayon du cercle trigonométrique. Le côté adjacent correspond alors à la partie réelle sur l'axe des abscisses.
Pour retrouver la formule du collège avec une longueur d'hypoténuse quelconque, on applique le théorème de Thalès. Il en est de même pour le sinus.

Définition 2.2 *(Tangente)*

Pour[1] $\theta \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$,

on considère la droite d'angle θ par rapport à l'axe des abscisses,

et on définit la **tangente** de θ par l'ordonnée du point d'intersection de cette droite avec l'axe vertical $x = 1$.



1. La droite ne doit pas être verticale pour pouvoir couper l'axe $x = 1$.

3 Propriétés élémentaires

Voici à présent quelques propriétés géométriques élémentaires que l'on retrouve très simplement en dessinant le cercle trigonométrique. En particulier, les dernières ne sont pas forcément à connaître par cœur, mais à savoir retrouver très rapidement avec un petit croquis au brouillon.

Propriété 3.1 *(Cosinus : propriétés trigonométriques élémentaires)*

1. Le cosinus est défini sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $[-1,1]$: $\forall\theta\in\mathbf{R},\ -1\leqslant\cos\,\theta\leqslant 1\,.$
2. Le cosinus est 2π-périodique : $\forall\theta\in\mathbf{R},\ \cos\,(\theta+2\pi)=\cos\,\theta\,.$

   Par conséquent : $\forall\theta\in\mathbf{R},\ \forall k\in\mathbf{Z},\ \cos\,(\theta+2k\pi)=\cos\,\theta\,.$
3. Le cosinus est *pair* : $\forall\theta\in\mathbf{R},\ \cos\,(-\theta)=\cos\,\theta\,.$
4. $\forall\theta\in\mathbf{R}$, $\cos\,(\pi-\theta)=-\cos\,\theta$

   $\cos\,(\pi+\theta)=-\cos\,\theta$

Propriété 3.2 *(Sinus : propriétés trigonométriques élémentaires)*

1. Le sinus est défini sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $[-1,1]$: $\forall\theta\in\mathbf{R},\ -1\leqslant\sin\,\theta\leqslant 1\,.$
2. Le sinus est 2π-périodique : $\forall\theta\in\mathbf{R},\ \sin\,(\theta+2\pi)=\sin\,\theta\,.$

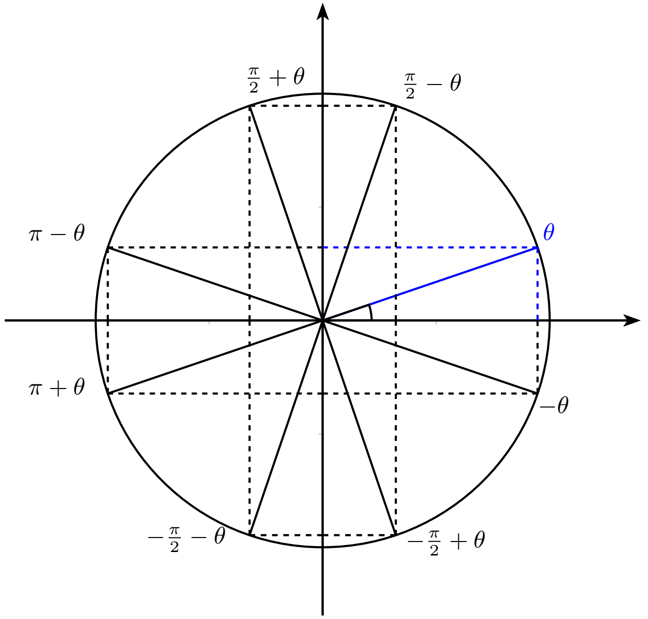
   Par conséquent : $\forall\theta\in\mathbf{R},\ \forall k\in\mathbf{Z},\ \sin\,(\theta+2k\pi)=\sin\,\theta\,.$
3. Le sinus est *impair* : $\forall\theta\in\mathbf{R},\ \sin\,(-\theta)=-\sin\,\theta\,.$
4. $\forall\theta\in\mathbf{R}$, $\sin\,(\pi-\theta)=\sin\,\theta$

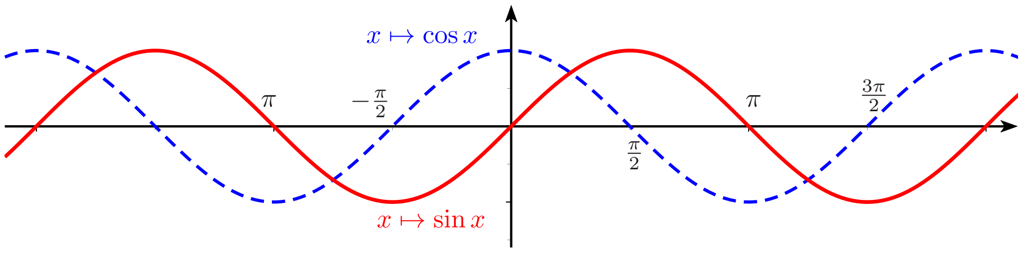
   $\sin\,(\pi+\theta)=-\sin\,\theta$

Propriété 3.3 *(Relations entre sinus et cosinus)*

$\forall\theta\in\mathbf{R}$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\,\theta \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\,\theta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\,\theta \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\,\theta$$

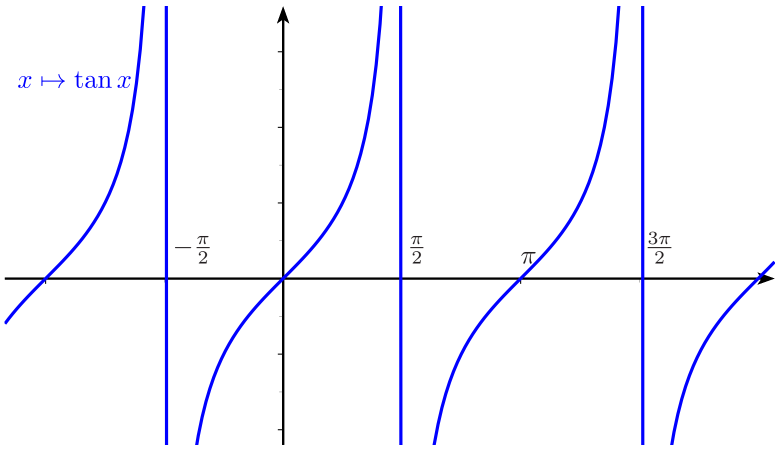




Explications
Le décalage de $\pi/2$ entre les deux courbes s'interprète en voyant que si on ajoute $\pi/2$, cela revient à faire un quart de tour, et l'axe des abscisses devient celui des ordonnées. Le cosinus auquel on ajoute $\pi/2$ devient un sinus.

Propriété 3.4 *(Tangente : propriétés trigonométriques élémentaires)*

1. La tangente est définie sur $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbf{Z}\right\}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.
2. La tangente est π-périodique :
$$\forall \theta \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbf{Z}\right\}, \quad \tan(\theta + \pi) = \tan\,\theta\,.$$
Par conséquent : $\forall \theta \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbf{Z}\right\},\ \forall k \in \mathbf{Z},\ \tan(\theta + k\pi) = \tan\,\theta\,.$
3. La tangente est *impaire* : $\forall \theta \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbf{Z}\right\},\ \tan(-\theta) = -\tan\,\theta\,.$
4. $\forall \theta \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbf{Z}\right\},\ \tan(\pi - \theta) = -\tan\,\theta$
$\tan(\pi + \theta) = \tan\,\theta$
5. $\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{1}{\tan\,\theta}\,.$
6. $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} \tan\theta = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan\theta = -\infty$



Nota : Les lignes verticales ne correspondent pas au tracé de la fonction, mais à ses asymptotes verticales.

Théorème 3.5 *(Théorème de Pythagore)*

$\forall \theta \in \mathbf{R}$, $$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1\,.$$

Utilisation de cette formule :
Cette formule est particulièrement utile sous la forme
$$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \sin^2\theta} \qquad \text{ou} \qquad \sin\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}\,.$$

⚠ Attention, le signe devant la racine dépend de θ. Il ne faut pas l'oublier. On peut s'aider du cercle trigonométrique pour le déterminer.

Exemple

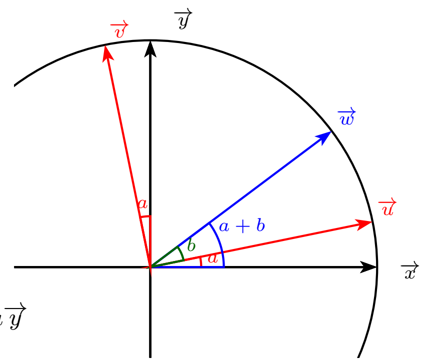
Si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$.
Si $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, alors $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x}$.

Propriété 3.6 *(Formules trigonométriques d'addition)*

$\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2$,
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Preuve

On raisonne géométriquement dans le plan $\mathbf{R}^2$.
On note $\overrightarrow{x}$ le vecteur unitaire $(1, 0)$ qui oriente l'axe des abscisses et $\overrightarrow{y}$ le vecteur $(0, 1)$ qui oriente l'axe des ordonnées.
On définit
$$\overrightarrow{u} = \cos a\,\overrightarrow{x} + \sin a\,\overrightarrow{y}$$
qui correspond au point d'affixe complexe $\cos a + i \sin a$.
On définit le vecteur orthogonal
$$\overrightarrow{v} = \cos(a + \frac{\pi}{2})\overrightarrow{x} + \sin(a + \frac{\pi}{2})\overrightarrow{y} = -\sin a\,\overrightarrow{x} + \cos a\,\overrightarrow{y}$$



$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ forme un nouveau repère orthonormé tourné d'un angle a par rapport au repère initial $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$.

On pose $\overrightarrow{w}$ le vecteur unitaire d'angle $a + b$: $\overrightarrow{w} = \cos(a+b)\overrightarrow{x} + \sin(a+b)\overrightarrow{y}$.
Le vecteur $\overrightarrow{w}$ fait un angle b par rapport au repère $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Dans ce nouveau repère, il s'écrit donc :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{w} &= \cos b\,\overrightarrow{u} + \sin b\,\overrightarrow{v} = \cos b\,(\cos a\,\overrightarrow{x} + \sin a\,\overrightarrow{y}) + \sin b\,(-\sin a\,\overrightarrow{x} + \cos a\,\overrightarrow{y}) \\ &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b)\,\overrightarrow{x} + (\sin a \cos b + \cos b \sin a)\,\overrightarrow{y}\end{aligned}$$

Donc par identification avec la première expression de $\overrightarrow{w}$, on trouve bien
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \ \text{ et } \ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

■

Remarque : Il est beaucoup plus facile de trouver la formule formule précédente à partir des exponentielles complexes : $e^{i(a+b)} = e^{ia}\,e^{ib}$.
Le problème est que, dans ce cours, nous allons justement utiliser cette formule de duplication pour démontrer cette propriété des exponentielles complexes.
Il faut donc trouver une porte de sortie pour ne pas tourner en rond. C'est la raison pour laquelle nous adoptons ici cette preuve.

Corollaire 3.7 *(Formules de l'angle double)*

$\forall \theta \in \mathbf{R}$,

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

Preuve

On applique simplement les formules d'addition et pour la première relation, on utilise Pythagore : $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ en gardant soit le cosinus, soit le sinus. ■

Les formules des deux corollaires qui suivent ne sont pas nécessairement à apprendre par cœur, car elle se retrouvent en un instant avec la preuve qui en est donnée juste après.
Par contre, il faut se souvenir que de telles formules existent et être capable de les retrouver rapidement.

Corollaire 3.8 *(Formules trigonométriques de soustraction)*

$\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2$,

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

Preuve

On remplace b par $-b$ dans la formule d'addition et on utilise les propriétés de parité des fonctions cosinus et sinus. ■

Corollaire 3.9 *(Formules de linéarisation)*

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) \qquad \sin a\sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$$

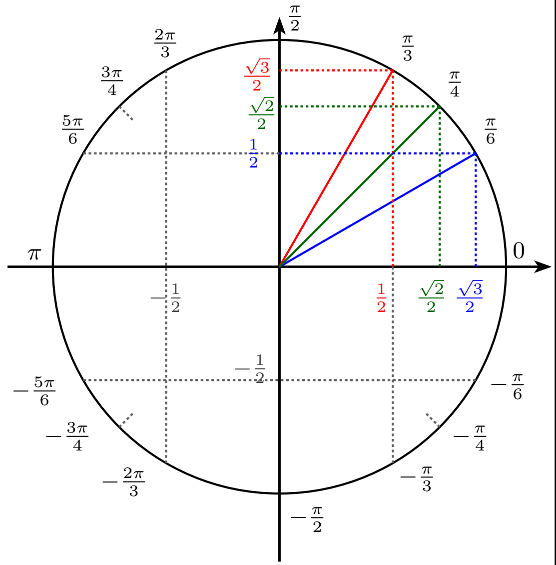
Preuve

Immédiat avec les formules précédentes. ■

Propriété 3.10 *(Angles remarquables)*

Quelques mesures à connaître (en s'aidant du cercle)

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Dans les formules pour le sinus, on remarque l'incrémentation sous la racine $1 = \sqrt{1}$ puis $\sqrt{2}$ puis $\sqrt{3}$. On a la même chose dans l'autre sens pour le cosinus.
Et maintenant, vous ne devriez plus avoir la moindre difficulté à couper une pizza en trois parts égales ! Comment faites-vous ?

Preuve

Pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ les résultats sont triviaux.
Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, on est sur la bissectrice et on a donc $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$.
Or $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ on trouve alors (comme les deux sont positifs) : $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
.
Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$, on sait que le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $A(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3})$ est isocèle en $(0,0)$,
or l'angle au sommet vaut $\frac{\pi}{3}$, il est donc équilatéral.
La hauteur issue de A coupe donc le côté opposé en son milieu : $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
On en déduit la valeur du sinus par Pythagore.
Enfin, $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$. On trouve donc les valeurs cherchées par les relations élémentaires de trigonométrie. ■

4 Équations trigonométriques

Théorème 4.1 *(Applications trigonométriques réciproques)*

Pour tout $c \in [-1, 1]$, l'équation $\cos x = c$ admet une unique solution dans $[0, \pi]$.
On note cette solution : $x = \arccos(c)$

Pour $c \notin [-1, 1]$, l'équation $\cos x = c$ n'admet pas de solution.

Pour tout $s \in [-1, 1]$, l'équation $\sin x = s$ admet une unique solution dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
On note cette solution : $x = \arcsin(s)$

Pour $c \notin [-1, 1]$, l'équation $\sin x = c$ n'admet pas de solution.

Pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'équation $\tan x = t$ admet une unique solution dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
On note cette solution : $x = \arctan(t)$

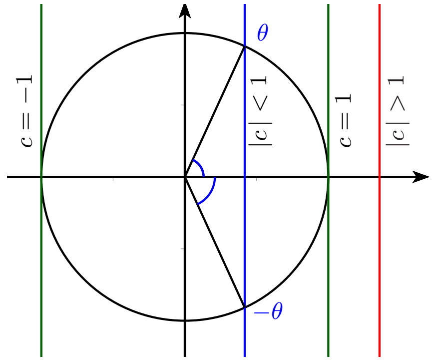
Remarque : Sur certaines calculatrices, la fonction arccos est notée $\cos^{-1}$.
De même pour arcsin et arctan.

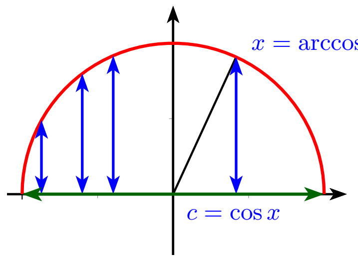
⚠ Il faut apprendre les intervalles correspondant à chacune des équations. À la fois pour l'inconnue et pour la solution. La propriété 4.2 précisera mieux leur importance.

Explications

Géométriquement, résoudre $\cos x = c$ dans $[0, \pi]$, c'est chercher l'ensemble des points du cercle dont l'abscisse est égale à c et donner leur argument.
Cela revient à tracer une droite verticale d'abscisse c dans le plan et étudier l'intersection avec le cercle trigonométrique. On observe que :

- Pour $|c| > 1$, la droite ne coupe pas le cercle, il n'y a pas de solution.
- Pour $c = 1$, la droite coupe le cercle en un seul point $\theta = 0[2\pi]$. Si on ne prend que l'argument principal, il n'y a qu'une seule solution : $\theta = 0$.
- Pour $c = 1$, la droite coupe le cercle en un seul point $\theta = \pi[2\pi]$. Si on ne prend que l'argument principal, il n'y a qu'une seule solution : $\theta = \pi$.
- Pour $|c| < 1$, la droite coupe le cercle en deux points θ et $-\theta$.
  Pour avoir l'unicité, on ne prend que la solution correspondant à l'argument principal dans la partie supérieure du cercle.



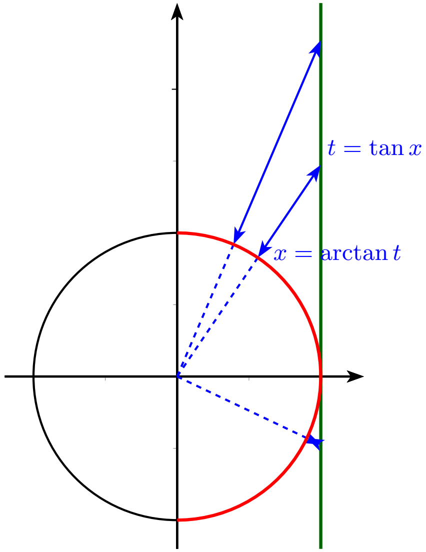


$x \mapsto \cos x$ réalise une *bijection* de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$: cos relie chaque point de $[0, \pi]$ à un unique point de $[-1, 1]$: on apparie les points des intervalles deux à deux.
Lorsque l'on va de $[0, \pi]$ vers son homologue $[-1, 1]$, on utilise le cosinus pour relier les points. Si on fait le parcours dans l'autre sens, on appelle cette application l'**arccosinus** : c'est l'application *réciproque* de cos.

La bijection, consiste donc simplement à relier point à point le demi-cercle supérieur au segment $[-1, 1]$ grâce à des lignes verticales. On peut considérer que ces deux éléments représentent en fait le même objet que l'on déforme comme un élastique (mais ça c'est une autre histoire).

De même, pour le sinus, on prend des droites horizontales et on ne garde que la partie droite du cercle trigonométrique.

Enfin pour la tangente, on prend les droites obliques qui ont servi à construire l'application, elle joignent chaque point de la droite réelle (mise verticalement à l'abscisse 1) avec un point du demi-cercle droit (ouvert).
Ici, la bijection étire le demi-cercle à l'infini comme un *super*-élastique !



⚠ Pour la tangente, l'intervalle est ouvert en $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. L'application tangente n'est pas définie aux deux extrémités.

Propriété 4.2 *(Composition des fonctions circulaires et réciproques)*

$$\begin{array}{ll}
\forall x \in [-1,1], & \sin(\arcsin x) = x \\
\forall x \in [-1,1], & \cos(\arccos x) = x \\
\forall x \in \mathbf{R}, & \tan(\arctan x) = x \\
\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], & \arcsin(\sin x) = x \\
\forall x \in [0,\pi], & \arccos(\cos x) = x \\
\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, & \arctan(\tan x) = x
\end{array}$$

Par contre, en général pour $x \in \mathbf{R}$, $\arccos(\cos x) \neq x$ et $\arcsin(\sin x) \neq x$

Explications

Pour $x \in \mathbf{R}$, on n'a pas l'égalité en général. En effet, lorsque l'on passe au sinus ou au cosinus, on enroule $\mathbf{R}$ tout entier sur le cercle trigonométrique en faisant une infinité de tours. Ainsi, plusieurs points se trouvent superposés (c'est le principe de « modulo 2π »). Ils ont le même sinus ou le même cosinus : on perd donc de l'information puisque des éléments différents donnent la même valeur.
En général, on perd l'équivalence lorsque l'on compose une égalité par la fonction (sinus ou cosinus).
Lorsque l'on compose $\cos x$ par l'arccosinus, on obtient l'argument principal correspondant à x. Mais ce n'est pas forcément x lui-même.

Rappelez-vous :

- on a toujours : $\cos(\arccos x) = x$
  (car la définition de arccos impose à x d'être déjà dans un intervalle bien limité).
- par contre, en général : $\arccos(\cos x) \neq x$
  (car la définition de cos ne donne pas de limitation sur les valeurs de x).

Exemple

$\arccos(\cos x) = 0 \iff x = 0 \pmod{2\pi}$.
$\cos(\arccos x) = 0 \iff x = 0$.

Remarque : La notation $\pmod{2\pi}$ ou $[2\pi]$ signifie que l'égalité est vraie *modulo* 2π, c'est-à-dire à 2π près : on peut ajouter ou soustraire d'un côté ou de l'autre de l'égalité autant de fois que l'on veut le terme 2π sans modifier cette égalité.

Exemple

Résoudre dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ puis sur $\mathbf{R}$, $\tan x = 1$.
Solution :

Théorème 4.3

Pour $(c,s) \in \mathbf{R}^2$, on définit le système :

$$(S) \ : \quad \begin{cases} \cos x = c \\ \sin x = s \end{cases}$$

Si $c^2 + s^2 \neq 1$, alors (S) n'a pas de solutions.
Si $c^2 + s^2 = 1$, alors (S) a une unique solution x_0 dans $]-\pi, \pi[$, et l'ensemble des solutions sur $\mathbf{R}$ est :

$$\mathcal{S} = \{x_0 + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z}\}$$

Explications

La droite horizontale $y = s$ doit couper la droite verticale $x = c$ sur le cercle trigonométrique pour qu'il y ait une solution. On obtient alors l'angle modulo 2π.

Méthode *(Calcul de la phase)*

En physique, on obtient souvent des expressions du type $G = A\cos\theta + B\sin\theta$ que l'on veut exprimer sous la forme $r\cos(\theta - \varphi)$.
φ correspond au décalage de phase (entre l'élément étudié et la source en $\cos\theta$).
Pour cela

- On cherche l'amplitude du signal $r = \sqrt{A^2 + B^2}$.
- On factorise par r : $G = r(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)$),
- Or $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, donc il existe $\varphi \in \mathbf{R}$ tel que $\alpha = \cos\varphi$ et $\beta = \sin\varphi$, donc

$$G = r(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta) = r\cos(\theta - \varphi)$$

Remarque : Si on cherche φ tel que $\alpha = \sin\varphi$ et $\beta = \cos\varphi$, alors on obtiendra une expression en sinus.

Exemple

Écrire $G = 3\cos\theta + 4\sin\theta$ sous la forme d'un cosinus.

Solution :

Exemple

Résoudre $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$.

Solution :