TD sur les chaînes de Markov

Exercice 1 (Parcours d'un graphe)
On définit un graphe par des *sommets* et des *arcs orientés* aussi appelés *flèches.*
Chaque flèche du graphe relie deux sommets : un sommet origine i et un sommet destination j. On dit que la flèche va de i vers j.

Un **graphe pondéré** doit suivre les règle suivantes :

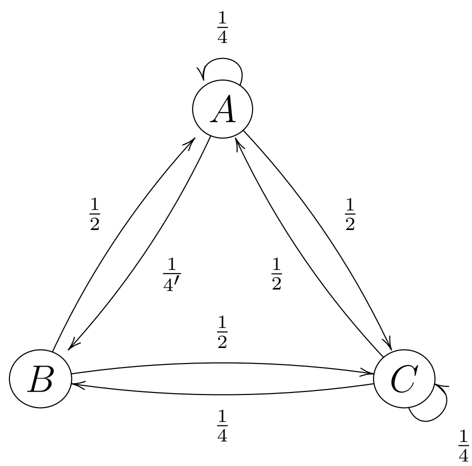
- Une flèche peut relier un sommet à lui-même.
- Pour tout couple de sommets (i, j), il existe une et une seule flèche qui va de i vers j.
  De même, il existe une unique flèche qui va de j vers i.
- Chaque flèche possède un *poids* que l'on indique en label.
- Tous les sommets sont *virtuellement* reliés entre eux. Mais lorsque la flèche est de poids nul, elle n'est pas représentée sur le graphe.

Le graphe est un **graphe de probabilités** si :

- Chaque flèche a un poids compris entre 0 et 1.
- La somme des poids de flèches partant d'un même sommet est égale à 1.

Dans ce cas, le poids de la flèche représente la probabilité de passer du sommet i au sommet j.

Dans cet exercice, on considère le graphe de probabilités G_1 ci-contre.



Graphe G_1

Lecture du graphe : Un mobile se déplace sur le graphe, suivant les probabilités indiquées par les flèches.
Ainsi, s'il se trouve en position A à l'instant n, alors à l'instant $n+1$, il reste en position A avec la probabilité $\frac{1}{4}$, en position B avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et en position C avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

On note $\mathbf{P}$ la loi de probabilité associée à ce graphe.

On suppose qu'à l'instant 0, le mobile est en position A et on veut connaître la probabilité qu'il soit à nouveau en position A à l'instant n.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$,
on définit les trois événements :

A_n : « le mobile est en position A à l'instant n. »
B_n : « le mobile est en position B à l'instant n. »
C_n : « le mobile est en position C à l'instant n. »

et on pose :

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(A_n) \\ \mathbf{P}(B_n) \\ \mathbf{P}(C_n) \end{pmatrix}$$

Partie 1 : Écriture matricielle

1) Tracer le graphe, et remplacer les valeurs numériques en label par la probabilité conditionnelle qu'elles représentent (entre les instants n et $n+1$).

2) Pour $n \in \mathbf{N}$, que peut-on dire de la famille des trois événements (A_n, B_n, C_n).

3) Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $U_{n+1} = M\,U_n$.
Donner d'abord l'expression littérale de M pour un graphe de probabilité quelconque à 3 sommets A, B et C.
Puis donner l'expression de M, pour le graphe G_1 considéré.

4) Dans l'énoncé, il est demandé que les poids des flèches soient tous positifs et que la somme des poids des flèches partant d'un même sommet soit égale à un. Pourquoi ?
À quelle condition sur les coefficients de la matrice M cela correspond-t-il ?
Méthode : Dans les exercices de ce type, il faudra toujours vérifier que cette condition est valide, même si ce n'est pas demandé.

5) Donner l'expression de U_n en fonction de U_0 et des puissances de M.
(Écrire une justification très soignée)

Partie 2 : Calcul des puissances

6) Montrer que $M^2 = \dfrac{3}{4}M + \dfrac{1}{4}I_3$

7) En déduire l'existence de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$M^n = a_n M + b_n I_3$$

Donner une relation de récurrence vérifiée par les suites (a_n) et (b_n).

8) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N},\ a_n + b_n = 1$.

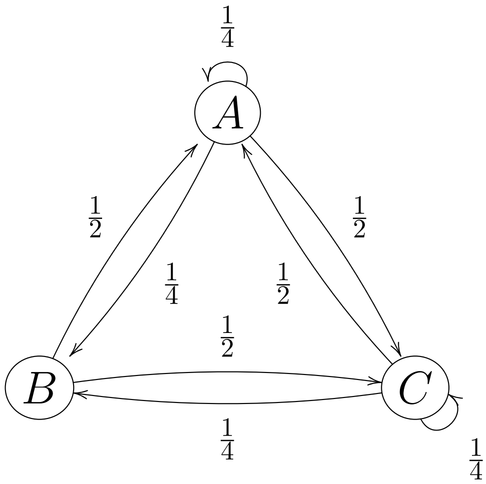
9) En déduire les expressions de a_n et de b_n en fonction de n.

10) Déterminer une expression « simple » de M^n (sous forme de tableau de coefficients) en fonction de a_n.

11) Donner l'expression de U_0.

12) En déduire les expressions de $\mathbf{P}(A_n)$, $\mathbf{P}\left(B_n\right)$ et $\mathbf{P}\left(C_n\right)$ en fonction de a_n.

13) Que peut-on dire de la position du mobile après un temps infini ?



Graphe G_1