Variables aléatoires sur un univers fini - TD-1

Présentation des exercices :

- L'exercice 1 utilise des méthodes très classiques.
- L'exercice 2 est assez facile.
- L'exercice 3 est plus difficile.

Exercice 1 ***(indications)***

1)(a) On tire une boule de façon équiprobable dans une urne qui en contient k rouges et N au total.

(b) Deuxième partie de la question avec la formule des probabilités totales qui fait apparaître naturellement l'espérance. $\mathbf{P}(A_{n+1}) = \dfrac{\mathbf{E}(R_n)}{N}$

2)(a) $R_{n+1} = R_n + X_{n+1}$.

(b) Linéarité de l'espérance.

(c) Suite arithmético-géométrique. Attention aux conditions initiales. $\mathbf{E}\left(R_n\right) = \left(1 - \dfrac{2}{N}\right)^n \left(R - \dfrac{N}{2}\right) + \dfrac{N}{2}$

Exercice 2 ***(indications)***

1) Y_n suit une loi de Bernoulli.

2) Voir les types de tirages qui réalisent l'événement : il n'y en a que deux possibles.

3)(a) Faire un raisonnement comme à la question précédente : déterminer les lancers qui réalisent l'événement.

(b) Les conditions sont pour que la chaîne de longueur k ne commence pas au début, ni ne finisse à la fin. Elles est donc précédée et suivie d'un face et les autres valeurs sont quelconques.

(c) Cette fois-ci : termine par « pile ».

(d) $Y_k = \sum_{i=1}^n X_{i,k}$ et on peut réduire un peu le nombre de termes dans la somme. Ensuite on utilise la linéarité de l'espérance... comme d'habitude !

Exercice 3 ***(indications)***

1) Voir un taux d'accroissement pour la première limite.
Faire un changement de variable pour la seconde limite.

2) Y voir une intersection d'événements à définir.

3) $\mathbf{1}_{A_i}$ vaut 1 quand la boîte A_i ne contient pas de boule.
Ainsi, le nombre d'urne ne contenant pas de boule est égal à la somme : $N_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}$.

4) Distinguer le cas $i = j$ et $i \neq j$.
Pour calculer $\mathbf{E}\left(N_n^2\right)$, utiliser l'expression de N_n trouvée à la question précédente.
On trouve une expression finale qu'on ne peut pas bien simplifier.

5) Écrire la puissance sous forme exponentielle et utiliser la question préalable. Penser que $r = n\frac{r}{n}$. On trouve $\mathbf{E}\left(N_n/n\right) \to \mathrm{e}^{-c}$.

6) Idem. On trouve $\mathbf{V}\left(N_n/n\right) = \frac{1}{n^2}\mathbf{V}\left(N_n\right) \to 0$.

7) C'est simplement la preuve de l'inégalité de Markov.