TD - Complexes et trigonométrie

Exercice 1 ***(solution)***

1. $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}} \left(\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{-ik\pi}{n}}\right) = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\ \mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}$.
   Donc : $\left|\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right| = 2|i|\ \left|\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|\ \left|\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\right| = 2\left|\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|$.
   Or $0 \leqslant k \leqslant n-1$ donc $0 \leqslant \frac{k\pi}{n} \leqslant \frac{(n-1)\pi}{n} \leqslant \pi$ donc $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \geqslant 0$:

$$\boxed{\left|e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right| = 2\,\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

2.
$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} 2\,\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1} \mathfrak{Im}\left(\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\\
&= 2\ \mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \quad \text{(linéarité)}\\
&= 2\ \mathfrak{Im}\left(\frac{1-\left(\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{n}}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{n}}}\right) \quad \left(\text{car } \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{n}} \neq 1\right)\\
&= 2\ \mathfrak{Im}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{i\pi}}{1-\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{n}}}\right)\\
&= 2\ \mathfrak{Im}\left(\frac{2}{1-\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{n}}}\right) \quad \left(\text{car } \mathrm{e}^{i\pi} = -1\right)\\
&= 2\ \mathfrak{Im}\left(\frac{2}{\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2n}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{i\pi}{2n}} - \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2n}}\right)}\right) \quad \text{(angle moyen)}\\
&= 2\ \mathfrak{Im}\left(\frac{2}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\ \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2n}}}\right)\\
&= 2\ \mathfrak{Im}\left(\frac{i}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\ \mathrm{e}^{-\frac{i\pi}{2n}}\right)\\
&= 2\,\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\ \cos\left(-\frac{\pi}{2n}\right) = 2\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}$$

Exercice 2 ***(solution)***

1. (a) On procède par récurrence :
   Initialisation : pour $p = 0$, on pose $\boxed{a_0 = 1 \text{ et } b_0 = 0.}$
   Hérédité : on suppose l'existence au rang $p \in \mathbf{N}$, alors

$$\begin{aligned}
\left(1+i2\sqrt{2}\right)^{p+1} &= \left(1+i2\sqrt{2}\right) \times \left(1+i2\sqrt{2}\right)^p\\
&= \left(1+i2\sqrt{2}\right) \times \left(a_p + ib_p\sqrt{2}\right)\\
&= a_p - 4b_p + i(b_p + 2a_p)\sqrt{2}
\end{aligned}$$

   On pose $\boxed{a_{p+1} = a_p - 4b_p \in \mathbf{Z} \text{ et } b_{p+1} = b_p + 2a_p \in \mathbf{Z}.}$
   L'hérédité est donc vérifiée.

   (b) Par récurrence :
   Initialisation : pour $p = 0$, $a_0 - b_0 = 1$ et $(-1)^0 + 6\sum_{k=0}^{-1}(-1)^{-k}b_k = 1$. L'égalité est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose l'existence au rang $p \in \mathbf{N}$, alors

$$\begin{aligned}
a_{p+1} - b_{p+1} &= a_p - 4b_p - (b_p + 2a_p) \\
&= -a_p - 5b_p \\
&= -(a_p - b_p) - 6b_p \\
&= -\left((-1)^p + 6\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k} b_k\right) - 6b_p \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= (-1)^{p+1} + 6\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p+1-k} b_k + 6(-1)^{p+1-p} b_p \\
&= (-1)^{p+1} + 6\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+1-k} b_k.
\end{aligned}$$

Donc l'hérédité est bien vérifiée.

$$\boxed{\forall p \in \mathbf{N}, \qquad a_p - b_p = (-1)^p + 6\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k} b_k \cdot}$$

(c) $\forall k \in \mathbf{N}$, $b_k \in \mathbf{Z}$,, donc $6\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+1-k} b_k$ est multiple de 6, donc de 3.
Donc si on rajoute 1 ou -1, le nombre n'est plus multiple de 3.
Ainsi $\boxed{\forall p \in \mathbf{N}, \text{ si } b_p = 0 \text{ alors } a_p \text{ n'est pas multiple de 3.}}$
Donc on ne peut pas avoir en même temps « $b_p = 0$ et a_p multiple de 3 ».

2. (a) $\boxed{\theta = \arccos \frac{1}{3} \in [0, \pi] \text{ convient.}}$
Il est défini de manière unique par injectivité de la fonction cosinus sur $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$ (strictement décroissante).

(b) $e^{i\,2n\theta} = e^{i\,2n\frac{m}{n}\pi} = e^{i\,2m\pi} = 1$.

$$\boxed{e^{i\,2n\theta} = 1.}$$

(c) $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$ car $\theta \in [0, \pi]$.
Donc $\sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\boxed{\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}.}$$

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = \frac{1 + i2\sqrt{2}}{3}.}$$

(d) On a vu que $e^{i\,2n\theta} = 1$, donc $\left(\frac{1+i2\sqrt{2}}{3}\right)^{2n} = 1^{2n} = 1$.
Ainsi $\boxed{(1 + i\,2\sqrt{2})^{2n} = 3^{2n}.}$

(e) D'après la première question, on écrit $\left(1 + i2\sqrt{2}\right)^{2n} = a_{2n} + ib_{2n}\sqrt{2}$.
L'égalité précédente s'écrit donc $a_{2n} + ib_{2n}\sqrt{2} = 3^{2n}$.
Par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\boxed{a_{2n} = 3^{2n} \quad \text{et} \quad b_{2n} = 0.}$$

(f) On a vu question 1 que l'on ne pouvait avoir simultanément $b_p = 0$ et a_p multiple de 3, or c'est ce à quoi on aboutit ici. C'est donc absurde. Ainsi

$$\boxed{\frac{\theta}{n} \text{ est irrationnel.}}$$