Applications linéaires et systèmes linéaires - TD

Présentation des exercices : ordre au choix.

- Exercice 1 : géométrie et systèmes linéaires à paramètres, assez simple.
- Exercice 2 : système à n équations, lien avec la géométrie du plan.
- Exercice 3 : Espaces vectoriels et applications linéaires. Issu d'un problème de concours BL.

Exercice 1 ***(indications)***

1. Faire le pivot de Gauss sans jamais diviser par a.
   À la fin, on discute du nombre de pivots selon les valeurs de a et b.
   On trouve deux cas particuliers $a = -2$ et $a = 1$.
2. On retrouve le cas $a = -2$ et $b = -1$.

Exercice 2 ***(indications)***

1. On voit que $z_i + z_{i+1} = 2a_i$ (faire attention pour $i = n$).
2. Placer la ligne $i = n$ en position 1, puis faire les opérations en descendant pour mettre sous forme échelonnée.
3. La dernière ligne n'a pas de pivot dans la partie principale, l'existence de solution dépend de la présence ou non d'un pivot dans le second membre.
4. Mettre sous forme échelonnée réduite pour $n = 3$. Pour tracer, on peut placer l'origine du repère en a_2 sans nuire à la généralité.

Exercice 3 ***(indications)***

1. Ne pas utiliser la variable λ comme scalaire car elle est déjà utilisée.
   C'est un sous espace vectoriel de l'ensemble des applications de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$.
   Ne pas oublier de justifier que la combinaison linéaire est aussi deux fois dérivable.
3. Faire à part les cas $\lambda < 0$ et $\lambda > 0$.
   Pour chaque cas, commencer à montrer que f_λ et g_λ sont dans $\mathcal{E}$.
   Puis utiliser la définition d'une famille libre : $a\, f_1 + b\, f_2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$.
   Pour montrer l'implication, se souvenir d'un exercice de début d'année dans le chaptire de logique.
   Ici, on veut montrer : $(\forall x \in [0, 1],\ a\, f_1(x) + b\, f_2(x) = 0) \Rightarrow a = b = 0$.
4. Dériver la fonction et utiliser que f et f_λ sont des éléments de $\mathcal{E}$.
   On cherche ensuite à montrer que $\ker(\theta) = \{0\}$.
5. Idem, on dérive.
   Pour conclure sur la nullité de f, on utilise que $\lambda > 0$ et donc qu'une somme de termes positifs est nulle.
6. On intègre deux fois. Trouver une base en sortant les paramètres. On trouve deux vecteurs générateur (les vecteurs sont des fonctions), et on montre qu'ils sont libres.