TD de soutien sur les espaces vectoriels

1 Espaces vectoriels

Exercice 1 ***(indications)***

1. non
2. oui
3. oui
4. non
5. oui
6. oui
7. non

Exercice 2 ***(indications)***

1. non
2. oui
3. oui (plus dur)
   On note (e_1, e_2, e_3) les trois fonctions.
   Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$ tel que
   $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$ (la fonction nulle).
   Alors, c'est vrai pour tout x.
   Par exemple, on peut particulariser avec 1, -1, ce qui donne $\lambda_2 = 0$, et donc $\lambda_3 = -\lambda_1$. On prend ensuite $x = 2$, on obient $\lambda_1 = 0$.
   Une autre méthode consiste à remarquer que si $x \to +\infty$, on doit encore trouver 0.
   Quitte à factoriser par x^3, on voit donc que $\lambda_3 = 0$.
   Puis $\lambda_2 = 0$, puis $\lambda_1 = 0$.

Exercice 3 ***(indications)***
Soit $E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4,\, x = 2y - t,\, y = z\right\}$.

1. Avec la caractérisation, c'est un sous espace de $\mathbf{R}^4$.
2. On écrit (x, y, z, t) uniquement en fonction de y et t (par exemple).
   On trouve alors l'écriture $(x, y, z, t) = ye_1 + te_2$, avec e_1 et e_2 deux vecteurs à préciser.
   Ainsi $E = \text{Vect}\,(e_1, e_2)$.
   Et (e_1, e_2) libre (à vérifier), donc c'est une base.

Exercice 4 ***(indications)***

1. C'est un sous-espace de $\mathbf{R}^4$ (4 coordonnées, même si elles ne dépendent que de trois paramètres).
2. Même méthode qu'à l'exercice précédent.

Exercices de difficulté croissante

Exercice 5 ***(indications)***

1. facile.
2. non, il faut donc vérifier pour tous les vecteurs à la fois et pas uniquement deux à deux pour affirmer la liberté.
   Ici, on trouve par exemple $-2v_1 + v_2 - v_3 = 0$.

Exercice 6 ***(indications)***
On suppose $a \notin \text{Vect}\,(e_1, e_2, \cdots, e_p)$.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (e_k + a) = 0$.
Alors
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)}_{\lambda_{n+1}} a = 0.$$
Or $a \notin \text{Vect}\,(e_1, e_2, \cdots, e_p)$, donc la famille $(e_1, e_2, \cdots, e_n, a)$ est libre.
Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$.
En particulier, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.
Ainsi la famille $(e_1 + a, \cdots, e_n + a)$ est libre.

Exercice 7 ***(indications)***

- Sous espace de $\mathbf{R}^n$ (à rédiger).
- à refléchir...
  Il faut comprendre qu'une base correspond aux « briques » élémentaires à partir desquelles on peut décrire un objet de l'espace de façon unique.
  Par exemple pour $\mathbf{R}_2$, on peut choisir l'abscisse et l'ordonnée.
  Quelle information porte l'abscisse ? Pour une abscisse de 1 et une ordonnée nulle, cela donne le vecteur $(1, 0)$: c'est ce vecteur qui permet de transformer la valeur réelle « abscisse » en un vecteur.
  Pour l'ordonnée, c'est le vecteur $(0, 1)$.
  On définit ainsi une base de $\mathbf{R}^2$ avec ces deux vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

  Dans cet exercice, il faut faire de même avec l'espace E.
  ⚠ les vecteurs de la base doivent tous appartenir à E.

Exercice 8 ***(indications)***

1. Par exemple, la fonction f qui vaut, pour $x \in [-1, 0]$, $f(x) = 2x - 3$, et pour $x \in [0, 1]$, $f(x) = -x - 3$..
   On choisit deux fonctions affines (une pour le côté négatif, et une pour le côté positif) en s'assurant qu'elles ont la même valeur en 0 (continuité).
2. De combien d'informations (au minimum) a-t-on besoin pour décrire une fonction de E ? Ce nombre d'informations vous dit le nombre de vecteurs qu'il y aura dans la base et il faut ensuite trouver un vecteur (fonction de E) correspondant à chacune des informations.