Espaces vectoriels en dimension finie

Exercice 1 ***(indications)***
Partie 1

1) $b = u_{n+1} - au_n$, il reste un argument à donner pour conclure.

2)(a)

(b) attention à u_0.

3) Sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Il faut utiliser la caractérisation des sous espaces vectoriels.

4) $\lambda x + \mu y = 0 \iff \forall n \in \mathbf{N},\ \lambda x_n + \mu y_n = 0$.
Il suffit de particulariser intelligemment.

5) Soit $u \in E_a^{(0)}$.

(a) Pour être élégant, calculer le déterminant de la matrice associée au système pour démonter que c'est un système de Cramer. Pas besoin de trouver les valeurs de λ et μ.

(b) Procéder par récurrence.
On pourra commencer par donner une relation entre b_u, b_x, b_y et λ, μ grâce aux cas $n = 0$ et $n = 1$.

(c)

6)

Partie 2

7) L'application en question est linéaire, il s'agit de montrer qu'elle est injective. Comment[1] ?
On n'est plus très loin...

8) Sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ (utilise le fait que $\mathbf{R}_p[X]$ est lui-même stable par combinaison linéaire).

9)

10) Quelles sont les suites associées au polynôme nul ?

11) Pour $k \in \mathbf{N}$, on pose $Q_k = (X+1)^k - aX^k$.

(a)

(b) vu en exercice, pas besoin de redémontrer.

(c) Montrer qu'il existe une suite *antécédent*. Immédiat si on comprend ce qu'on fait.

(d) En particulier donner l'image de θ (et pas seulement une inclusion).

12) Utiliser le théorème du rang.

13) On sait déjà qu'elle est de bon cardinal.

14) Utiliser la base précédente.

Partie 3

15) Si la partie précédente a été faite avec rigueur, il suffit de voir où l'argument $a \neq 1$ a été utilisé. Il faut alors modifier un peu pour que la relation fonctionne.
Cela devient assez subtil et demande un peu de hauteur par rapport au sujet.

16)

1. Pas très difficile quand on voit que les espaces sont de même dimension, montrer l'injectivité revient à montrer la surjectivité qui est ici plus simple pour une fois